**NOM : LE BORGNE** **PRÉNOM : Stéphane**

# DS 2

(Durée 1h, calculatrices et documents interdits)

**Connaissances élémentaires** (2 points)
Une suite tendant vers $+\infty$ est-elle croissante à partir d'un certain rang ? Justifier la réponse par une démonstration si la réponse est oui, par un contre-exemple si la réponse est non.
Non. Contre-exemple : $u_n = n$ si $n$ est pair, $u_n = n - 5$ si $n$ est impair.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x-1| - |x+2| > 1.$$

On peut faire un tableau décrivant les expressions des valeurs absolues suivant les valeurs de $x$.

| $x$ | $-\infty$ -2 | -2 1 | 1 $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\|x-1\|$ | -x+1 | -x+1 | x-1 |
| \|x+2\| | -x-2 | x+2 | x+2 |
| $\|x-1\| - \|x+2\|$ | 3 | $-2x-1$ | -3 |

Les solutions sont donc les nombres inférieurs à -2 et les nombres de $[-2, 1]$ tels que $-2x - 1 > 1$ soit $x < -1$. Finalement l'ensemble des solutions est $]-\infty, -1[$.

**Vrai-Faux** (4 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**
a) L'ensemble $\{(x, y) \ / \ x^3y^8 \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.
b) L'ensemble $\{(x, y, z) \ / \ x^2 - 2y^2 + z^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.
c) Si une fonction $f$ est $C^1$, définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ alors sa matrice jacobienne est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. Vrai/Faux.
d) Si une fonction numérique $f$ de classe $C^1$, définie sur $\mathbb{R}^3$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$), a un gradient nul en tout point, alors $f$ est constante. Vrai/Faux.
e) Si $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0 alors $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. Vrai/Faux.
f) Deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ peuvent être différentes mais avoir même image. Vrai/Faux.
g) La fonction $(x, y) \mapsto \exp(1 - x^2 - y^2)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.
h) La fonction $(x, y) \mapsto \exp(1 - x^2 - y^2)$ atteint sa borne supérieure sur $\mathbb{R}^2$. Vrai/Faux.

**Exercice 1**(3 points)
Écrire la matrice jacobienne au point $(0, 1, 1)$ de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - x^2 - yz, \ln(1 + x^2 + y^4 + z)).$$

On suivra la convention (choisie dans le cours) faisant agir la matrice jacobienne par multiplication sur des vecteurs colonne.

**Exercice 2** (3 points)
Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ deux fois différentiable. On pose

$$g(x, y) = f(\cos(xy), x^2 - xy).$$

Exprimer
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$
en fonction des dérivées partielles de $f$.

Il est assez pratique d'écrire $g$ sous une forme plus abstraite
$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$
où $u(x,y) = \cos(xy)$ et $v(x,y) = x^2 - xy$. La règle de dérivation en chaîne donne
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x},$$
les fonctions $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ étant prises au point $(u(x,y), v(x,y))$. On dérive ensuite une deuxième fois (comme une somme de deux produits)
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v}).\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$
On applique alors deux nouvelles fois la règle de dérivation en chaîne. Pour $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u})(u(x,y), v(x,y)))$ :
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.\frac{\partial v}{\partial y},$$
et pour $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$ :
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v}) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\frac{\partial v}{\partial y}.$$
On obtient ainsi
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$
Ici on a
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y\sin(xy) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin(xy) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -xy\cos(xy)$$
et
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -1.$$
Finalement
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = xy\sin^2(xy).\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2x^2\sin(xy)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - x(2x-y).\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - xy\cos(xy)\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$
les dérivées partielles de $f$ étant prises au point $(u(x,y), v(x,y))$.

**Exercice 3** (3 points)
Considérons la fonction définie par
$$f(x,y,z) = 3 + 2x + 3xy + y^2 - z^2.$$
1) Trouver les points de la forme $(1,1,z)$ appartenant à la surface de niveau 0 de $f$.
Le point $(1,1,z)$ appartient à la surface de niveau 0 de $f$ si
$$3 + 2 + 3 + 1 - z^2 = 0, \quad \text{soit } z^2 = 9.$$

Deux points conviennent $(1, 1, 3)$ et $(1, 1, -3)$.
2) Trouver des équations des plans tangents à la surface $f = 0$ en ces points.
Le gradient de $f$ en un point de l'ensemble $f = 0$ fournit un vecteur orthogonal au plan tangent (et il y a bien un plan tangent au point considéré si ce gradient n'est pas nul). Calculons les dérivée partielles de $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z.$$

On obtient ainsi les équations des plans tangents à $f = 0$.
En $(1, 1, 3)$ :

$$5(x - 1) + 5(y - 1) - 6(z - 3) = 0.$$

En $(1, 1, -3)$ :

$$5(x - 1) + 5(y - 1) + 6(z + 3) = 0.$$

**Exercice 4** (3 points)
Montrer que l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \ / \ |x| + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
Une partie compacte de $\mathbb{R}^3$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(x, y, z)$ un point de $E$. Comme $|x|$, $y^2$, $z^2$ sont positifs ou nuls, et $|x| + y^2 + z^2 \leq 2$, on a

$$0 \leq |x| \leq 2, \quad 0 \leq y^2 \leq 2, \quad 0 \leq z^2 \leq 2,$$

soit

$$|x| \leq 2, \quad |y| \leq \sqrt{2}, \quad |z| \leq \sqrt{2},$$

et $E$ est donc bien borné.
Considérons la fonction $\phi$ définie par

$$\phi(x, y, z) = |x| + y^2 + z^2.$$

C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ et continue sur $\mathbb{R}^3$ (comme somme de fonctions continues). L'ensemble $E$ est l'image réciproque de $]-\infty, 2]$ par $\phi$. L'intervalle $]-\infty, 2]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Or l'image réciproque d'un ensemble fermé par une fonction continue est fermée. Donc $E$ est fermé.

**Exercice 5** (3 points)
On considère l'arc défini par $t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ pour $t$ compris entre $-1$ et $1$.
1) Montrer que la longueur de cet arc est donnée par l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

2) Calculer la longueur de cet arc.