NOM : **PRÉNOM :**

DS 1

(Durée 1h, calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
Calculer la somme $\sum_{k=2}^{27} 3^k$.
Écrire 37 en base 3.

Une démonstration du cours (3 points)
Soit $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ trois ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'intersection $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Question de cours (2 points)
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.
Quand dit-on que f n'est pas bornée sur D ?
Quand dit-on que f n'a pas de minimum local en $x_0 \in D$?

QCM (4 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**
– L'ensemble $\{(x,y) \ / \ 0 \leq x^2 + 2y^2 < 1\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– L'ensemble $\{(x,y) \ / \ x^2y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ peut converger sans que les deux suites réelles définies par les coordonnées ne convergent. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble fermé non vide a une borne inférieure. Vrai Faux.
– Une intersection de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte, alors sa partie complémentaire n'est pas bornée. Vrai Faux.
– Si une suite converge alors elle est bornée. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas ouverte, elle n'est pas fermée. Vrai Faux.

Exemples (2 points)
Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}^3$ qui soit bornée et qui ne converge pas.
Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}^2$ non bornée dont la frontière est bornée.

Dessin (2 points)
Dessiner le domaine du plan défini par $\{(x,y) \ / \ |xy| > 2\}$

Exercice 1 (5 points)
(a) Montrer *en utilisant la définition* (histoire de choix de rayons de boules donc) que

$$\{(x,y) \ / \ (x+2)^2 + (y-1)^2 < 4\}$$

est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer *en utilisant la définition* que $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$. En déduire que $[-1,1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(-1,-\sqrt{3})$.
Donner les coordonnées sphériques de $(-1,1,1)$.
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)