NOM : LE BORGNE **PRÉNOM : Stéphane**

DS 1

(Durée 1h, calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
Calculer la somme $\sum_{k=2}^{27} 3^k$.
$\sum_{k=2}^{27} 3^k = 3^2 \sum_{k=0}^{25} 3^k = 9.\frac{3^{26}-1}{3-1} = 9.\frac{3^{26}-1}{2}$.
Écrire 37 en base 3.
$37 = 27 + 9 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3^0 = \overline{1101}$

Une démonstration du cours (3 points)
Soit $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ trois ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'intersection $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit x un point de $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3$. Alors pour tout $i = 1, 2, 3$, x appartient à $\mathcal{O}_i$. Par hypothèse $\mathcal{O}_i$ est ouvert, donc il existe un nombre r_i tel que $B(x, r_i)$ soit inclus dans $\mathcal{O}_i$. Posons $r = \min\{r_1, r_2, r_3\}$. Alors, pour tout $i = 1, 2, 3$, on a $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$, donc $B(x, r) \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3$.

Question de cours (2 points)
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.
Quand dit-on que f n'est pas bornée sur D ?
On dit que f n'est pas bornée sur D si

$$\forall M\ \exists x \in D \text{ tel que } |f(x)| > M.$$

Quand dit-on que f n'a pas de minimum local en $x_0 \in D$?
Quand

$$\forall r > 0\ \exists x \in B(x_0, r) \text{ tel que } f(x) < f(x_0).$$

QCM (4 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**
– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ 0 \leq x^2 + 2y^2 < 1\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– L'ensemble $\{(x, y) \ / \ x^2y^2 \leq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ peut converger sans que les deux suites réelles définies par les coordonnées ne convergent. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble fermé non vide a une borne inférieure. Vrai Faux.
– Une intersection de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte, alors sa partie complémentaire n'est pas bornée. Vrai Faux.
– Si une suite converge alors elle est bornée. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas ouverte, elle n'est pas fermée. Vrai Faux.

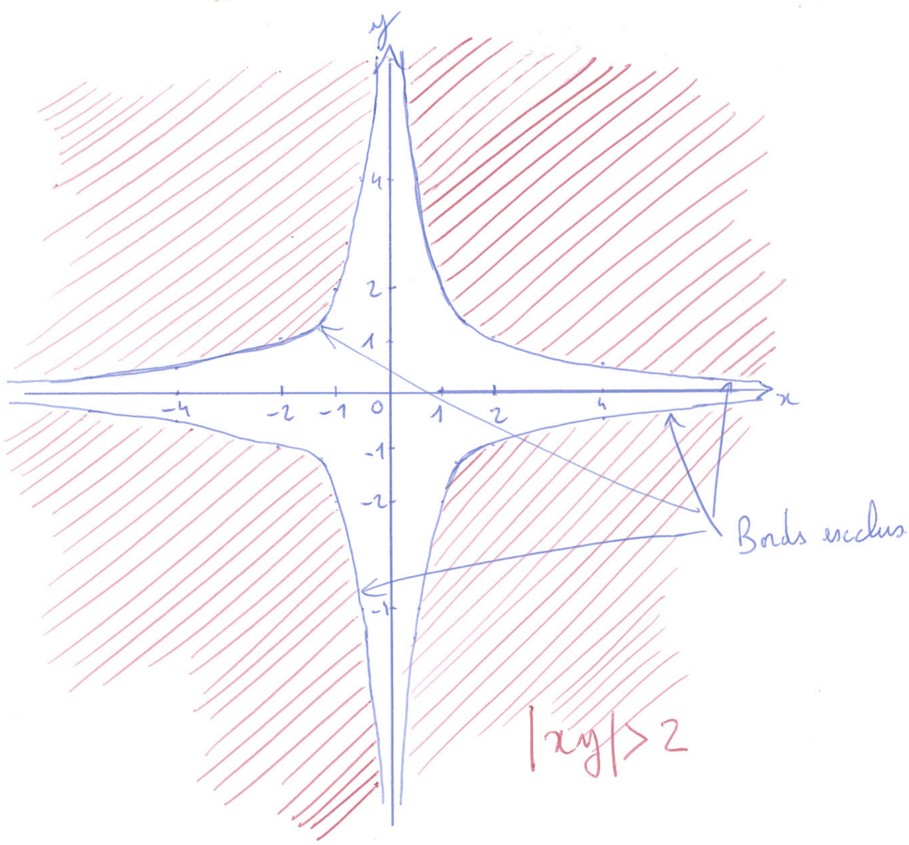
Exemples (2 points)
Donner un exemple de suite dans $\mathbb{R}^3$ qui soit bornée et qui ne converge pas.

$$(((-1)^n, 1, 1))_{n \in \mathbb{N}}$$

Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}^2$ non bornée dont la frontière est bornée.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 > 1\}$$

Dessin (2 points)
Dessiner le domaine du plan défini par $\{(x, y)\ /\ |xy| > 2\}$



Exercice 1 (5 points)
(a) Montrer *en utilisant la définition* (histoire de choix de rayons de boules donc) que

$$\{(x, y)\ /\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 4\}$$

est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Appelons D cet ensemble. C'est un disque centré en $(-2, 1)$ de rayon 2. Soit $(a, b) \in D$. On a $d((a, b), (-2, 1)) < 2$. Posons $r = 2 - d((a, b), (-2, 1))$. C'est un nombre strictement positif. Soit (x, y) un point de $B((a, b), r)$. On a

$$\begin{aligned} d((x, y), (-2, 1)) &\le d((x, y), (a, b)) + d((a, b), (-2, 1)) < r + d((a, b), (-2, 1)) \\ &= 2 - d((a, b), (-2, 1)) + d((a, b), (-2, 1)) = 2, \end{aligned}$$

la première inégalité étant l'inégalité triangulaire. Nous avons donc $d((x, y), (-2, 1)) < 2$, autrement dit (x, y) appartient à D. Nous avons montré que $B((a, b), r)$ est inclus dans D.
(b) Montrer *en utilisant la définition* que $] - \infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$. En déduire que $[-1, 1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
Soit x un élément de $]-\infty, -1[$. Posons $r = -x-1$. C'est un nombre strictement positif. Si y appartient à $]x-r, x+r[$, on $y < x+r = x-1-x = -1$ autrement dit $y \in]-\infty, -1[$. Cela montre que $]-\infty, -1[$ est ouvert.
Soit x un élément de $]1, +\infty[$. Posons $r = x - 1$. C'est un nombre strictement positif. Si y appartient

à $]x-r, x+r[$, on $y > x-r = x-x+1 = 1$ autrement dit $y \in]1, +\infty[$. Cela montre que $]1, +\infty[$ est ouvert.
$[-1, 1]$ est le complémentaire de la réunion $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Cet ensemble est ouvert comme réunion de deux ouverts et le complémentaire d'un ouvert étant fermé, $[-1, 1]$ est fermé.

Exercice 2 (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(-1, -\sqrt{3})$.

$$(2, \frac{4\pi}{3})$$

Choix d'intervalle : pour θ, $[0, 2\pi]$.
Donner les coordonnées sphériques de $(-1, 1, 1)$.

$$(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4}, \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Choix d'intervalles : pour θ, $[0, 2\pi]$, pour ϕ, $[0, \pi]$.
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)