NOM : **PRÉNOM :**

.

DS 1

(Durée 1h, calculatrices et documents interdits)

Connaissances élémentaires (2 points)
Énoncer puis démontrer la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Une démonstration du cours (3 points)
Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Question de cours (2 points)
Soient D une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.
Quand dit-on que f a un minimum local au point x_0 de D ?
Quand dit-on que f est minorée sur D ?

QCM (4 points)
Aucune justification de réponse n'est demandée. Un demi point par bonne réponse, zéro par absence de réponse, moins un demi par réponse incorrecte. **Entourer la bonne réponse.**
– L'ensemble $\{(x,y)\ /\ 3|x|+y^6 \leq 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– L'ensemble $\{(x,y)\ /\ x+y^2 < 1\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte, sa partie complémentaire n'est pas bornée. Vrai Faux.
– Si une partie de $\mathbb{R}^2$ n'est pas ouverte, sa partie complémentaire n'est pas fermée. Vrai Faux.
– Une fonction positive sur un ensemble ouvert non vide a une borne inférieure. Vrai Faux.
– Une suite non bornée n'a pas de suite extraite convergente. Vrai Faux.
– La réunion de deux parties compactes de $\mathbb{R}^2$ est compacte. Vrai Faux.
– Si C est compact et (x_k) est une suite d'éléments de C, alors pour tout c dans C, on peut trouver une sous-suite de (x_k) convergeant vers c. Vrai Faux.

Exemples (2 points)
Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, bornée, n'atteignant pas sa borne supérieure mais atteignant sa borne inférieure.

Dessin (2 points)
Dessiner le domaine du plan défini par $\{(x,y)\ /\ 0 \leq y \leq 2\pi,\ |x| < \sin(y)\}$

Exercice 1 (5 points (2+3))
Montrer *en utilisant la définition* (histoire de choix de rayons de boules donc) que les parties suivantes sont ouvertes :
(a) $]-2,1[$ dans de $\mathbb{R}$,
(b) $\{(x,y)\ /\ x-y > 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (2 points)
Donner les coordonnées polaires de $(-3,3)$.
Donner les coordonnées sphériques de $(-1,-1,2)$.
(Dans les deux cas précisez quels intervalles vous choisissez pour définir les angles de vos coordonnées et donnez une réponse conforme à votre choix.)