# Probabilités élémentaires

**exercice 1 :**
Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux événements,

$$P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Appli: Quelle est la probabilité de tirer une dame ou un coeur dans un jeu de 52 cartes (les *ou* sont inclusifs sauf mention du contraire)? La probabilité de tirer une carte qui est un trèfle ou un as ou un valet ?

**exercice 2 :**
Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$ et $P(A \cap B) = 1/8$. Calculer les probabilités de $E$: “au moins un des événements se produit” et $F$: “un seul événement se produit”.

**exercice 3 :**
On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Quel est l'ensemble des résultats possibles ? Munissez cet univers d'une probabilité modélisant bien le phénomène étudié.

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois Face ?
- D'obtenir au moins une fois Face ?
- D'obtenir Pile lors du premier tirage puis au moins une fois Face dans les deux suivants ?
- D'obtenir Pile au premier tirage ou Face au troisième tirage ?

**exercice 4 :**
On tire 8 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :

- d'obtenir au moins un coeur ?
- d'obtenir un coeur et un roi exactement ?
- d'obtenir deux carrés ?

**exercice 5 :**
On lance trois fois un dé à six faces bien équilibré.

- Quelle est la probabilité d'obtenir les résultats $2, 4$ et $6$, dans le désordre ? $2, 2, 1$, dans le désordre ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir $(2, 3, 4)$ ? d'obtenir $(2, 2, 1)$ ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir le 421 ?

**exercice 6 :**
On jette deux dés à six faces et on fait la somme des résultats obtenus. Trouvez un univers $\Omega$, une probabilité $P$ et une variable aléatoire $S$ permettant de modéliser cette expérience. Donnez la loi de $S$. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit supérieure ou égale à 5 ? Quelle est la probabilité que le produit des chiffres obtenus soit inférieur strict à 11 ?

**exercice 7 :**
Le jeu du loto consiste à deviner les 6 entiers qui vont être tirés au hasard parmi les entiers $\{1, 2, 3, ..., 49\}$. Comment modéliser le tirage de ces 6 entiers ? On explicitera un univers $\Omega$ dont on donnera le cardinal, ainsi qu'une probabilité $P$ sur $\Omega$. Calculez les probabilités des événements suivants :

- $A_6$ : “avoir deviné les six bons numéros”.
- $A_k$ : “avoir deviné exactement $k$ bons numéros”, $k$=0 à 6.
- $E$ : échec “avoir zéro, un ou deux bons numéros”.
- $G$ : gain “avoir au moins trois bons numéros”.

**exercice 8 :**
Calculez la probabilité que dans une famille de six enfants, on ait trois garçons et trois filles. Précisez le modèle utilisé ; en particulier, on supposera que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à 1/2.

**exercice 9 :**
La loi de la v.a. $X$ est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $0,25$ | $p_2$ | $0,18$ | $p_4$ | $0,37$ |

Déterminer les valeurs de $p_2$ et $p_4$, sachant que les événements $X = 2$ et $X = 4$ sont équiprobables. Déterminer la fonction de répartition de $X$ et donner sa représentation graphique.

# Paramètres des lois de probabilité

**exercice 1 :**
Calculez l'espérance, la médiane, le(s) mode(s), la variance et l'écart-type des lois discrètes suivantes ($a, b$ sont des entiers, $\lambda$ est un réel positif, $0 < p < 1$ ) :
Loi de Bernoulli ($p$) : $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{1\}) = p$ ;
Loi uniforme ($a$,$b$) : $\Omega = \{a..b\}$, $P(\{k\}) = 1/(b - a + 1)$ ;
Loi binomiale ($n$,$p$) : $\Omega = \{0..n\}$, $P(\{k\}) = C_n^k \; p^k (1-p)^{(n-k)}$ ;
Loi géométrique ($p$) : $\Omega = \{0..\infty\}$, $P(\{k\}) = p(1-p)^k$.

**exercice 2 :**
Une urne contient trois sortes de boules, de masses différentes : 7 boules chacune de masse 1 kg, 5 boules chacune de masse 3 kg, 3 boules de masse 5 kg. On tire au hasard une boule de l'urne et on note $X$ sa masse en kilogrammes.

- Donnez la loi de $X$.
- Calculer l'espérance et la variance de $X$.

**exercice 3 :**
Au tirage du loto du mercredi 07 février 1990, il fallait jouer les numéros $4, 8, 21, 23, 42, 49$.

| | |
|---|---|
| Avec 6 bons numéros, le gain était de | 4300000 Francs. |
| 5 | 6800 Francs. |
| 4 | 120 Francs. |
| 3 | 9 Francs. |

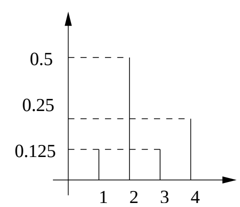
Pour un jeu simple de 1 Franc, calculez l'espérance de votre gain.

**exercice 4 :**
Soit $X$ une variable aléatoire telle que $E(X) = 1$ et $V(X) = 5$.
Calculez $E((2 + X)^2)$ et $V(4 + 3X)$.

**exercice 5 :**
On lance 2 fois un dé à six faces ; on note $S$ la somme des deux résultats obtenus. Calculez la loi de $S$, son espérance et sa variance.

**exercice 6 :**
On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile. On note $X$ le nombre de fois où Face est sortie au cours de ces lancers. Quelle est la loi de $X$ ? Calculez l'espérance et la variance de $X$. Calculez les probabilités $P(X \geq k)$, pour tout $k$ entier positif.

**exercice 7 :**
Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X$ dont le graphe des fréquences est donné ci-contre. On a porté en abscisse les différentes valeurs que peut prendre $X$, et en ordonnées leurs probabilités.




**exercice 8 :**
Erwan achète au marché des Lices un sachet contenant huit noix ; parmi ces noix, une d'entre elles est véreuse. Erwan ouvre les noix les unes après les autres ; si la noix n'est pas véreuse, il la mange et il recommence ; si elle est véreuse, il la jette, ainsi que toutes les noix qui restent dans le sachet.
Modélisez la situation ; on note par $X$ le nombre de noix mangées par Erwan. A quelle loi obéit $X$ ? Quelle est son espérance ?

**exercice 9 :**
Soit $X$ une variable aléatoire. Que peut-on dire si la variance de $X$ est nulle : $V(X) = 0$ ?
Que peut-on dire de la probabilité d'être inférieure à l'espérance : $P(X < E(X))$ ? D'être inférieure à la médiane ?