Théorie des ensembles et dénombrement

Notation : Le complémentaire d'un ensemble A est noté A^c.

exercice 1 :
Dans l'ensemble E des dix premiers entiers naturels non nuls, on considère les trois sous-ensembles :

$$A = \{1,3,5,7,9\} \quad B = \{1,2,3,4,5,6\} \quad C = \{5,6,7,8,9,10\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants :

- $A \cap (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cap C$
- $(A \cup B)^c$
- A^c
- $A \cup B \cup C$
- $C^c \cap B^c$
- $B \backslash A$

exercice 2 :
Soient A, B, C, trois sous-ensembles quelconques d'un ensemble donné X. Démontrez les relations suivantes :

- $A \cap (B \cup C) \; = \; (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
- $A \backslash B = A \cap B^c$

exercice 3 :
On considère un jeu de 32 cartes.

- Combien y a t-il de donnes de 4 cartes ?
- Combien y a t-il de donnes de 4 cartes d'une seule couleur ($\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$) ?
- Combien y a t-il de donnes de 4 cartes contenant exactement un as ?
- Combien y a t-il de donnes de 4 cartes contenant au moins un as ?

exercice 4 :
Donner le nombre de mots de neuf lettres différents qu'on peut former avec l'ensemble de lettres suivant : $AEIOLNRST$
Même question avec les lettres suivantes : $EEEEBRRRV$

exercice 5 :
Un jeu de tarot comprend 14 cartes de chaque couleur et 22 atouts, dont trois "bouts" (oudlers). Au cours de la donne, chacun des quatre joueurs reçoit 18 cartes et on constitue un écart (un chien) de 6 cartes. Déterminer :

- le nombre de donnes différentes qu'un joueur peut recevoir ;
- le nombre de donnes contenant exactement un "bout" ;
- le nombre de donnes contenant exactement deux "bouts" ;
- le nombre de chiens possibles ;
- le nombre de chiens contenant au moins un oudler ou un roi ;

Déterminer le nombre de jeux comprenant :

- exactement dix atouts ;
- au moins dix atouts ;
- un oudler et un roi exactement ;
- au moins un oudler et au moins un roi.

Coefficients binômiaux

Triangle de Pascal

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

exercice 1 :
Soit n, m, i, r des entiers positifs, k un entier relatif. Montrer les égalités :

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
- $k\ C_n^k = n\ C_{n-1}^{k-1}$
- $C_k^i\ C_n^k = C_n^i\ C_{n-i}^{k-i}$
- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$
- $\sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k = n\ 2^{n-1}$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2\ C_n^k = \ 2^{n-2}\ n(n+1)$
- $\sum_{i=0}^{n} C_i^k = C_{n+1}^{k+1}$
- $\frac{1}{3}\ C_{C_n^2}^2 \ = \ C_{n+1}^4$
- $\sum_{i=0}^{r} C_n^i\ C_m^{r-i} = C_{m+n}^r$
- $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

Pour chacune de ces égalités, on pourra essayer quatre méthodes différentes : en raisonnant par récurrence, à partir de la formule du binôme, à l'aide de la formule explicite reliant les coefficients binomiaux à la factorielle, ou bien par des raisonnements de type ensembliste.

exercice 2 :
– Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on $C_n^3 = 220$?
– Que vaut C_{n+1}^p / C_n^p ?
– Quel est le coefficient de x^5 dans $(x+2)^{12}$?