

# Couplage éléments finis - formulation intégrale pour le calcul du champ magnétique en magnétostatique

**Stéphane Balac**

Institut Camille Jordan (UMR 5208), INSA de Lyon

**Gabriel Caloz**

IRMAR (UMR 6625), Université de Rennes 1



Calcul du champ magnétique généré par un électro-aimant constitué :

- d'un inducteur  $\Omega_s$  parcouru par un courant de densité  $\mathbf{j}$  **indépendant du temps**
- d'un noyau ferromagnétique  $\Omega$



- 1 Le problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt de la méthode pour de l'optimisation de forme

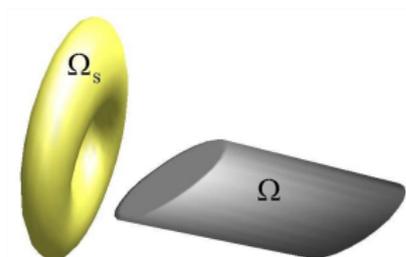
- 1 Le problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt de la méthode pour de l'optimisation de forme

# Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

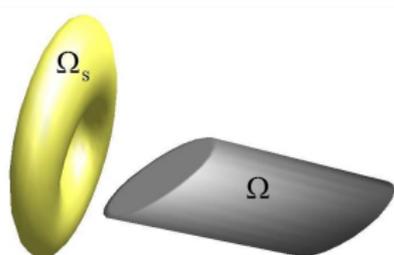
où ...

# Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

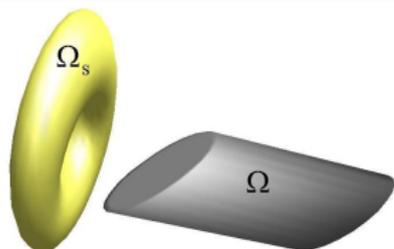
où ...

# Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique  $\Omega$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

où ...

❶ Le champ  $\mathbf{H}_s$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \overline{\mathbb{C}\Omega_s} \end{cases}$$

On montre que :

$$\mathbf{H}_s(x) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(y) \wedge \nabla_y G(x, y) dy \quad \text{où} \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}$$

➤  $\mathbf{H}_s$  se calcule en évaluant cette intégrale volumique par quadrature numérique.

❶ Le champ  $\mathbf{H}_s$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \overline{\mathbb{C}\Omega_s} \end{cases}$$

On montre que :

$$\mathbf{H}_s(x) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(y) \wedge \nabla_y G(x, y) dy \quad \text{où} \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}$$

➤  $\mathbf{H}_s$  se calcule en évaluant cette intégrale volumique par quadrature numérique.

② Le champ  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = [\mu] \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} & \text{à travers } \Sigma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  avec  $\phi$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})}_{= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

**Caractéristique** : problème 3D en domaine non borné.

② Le champ  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = [\mu] \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} & \text{à travers } \Sigma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  avec  $\phi$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})}_{= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

**Caractéristique** : problème 3D en domaine non borné.

➤ Résoudre ( $\mathcal{P}$ ) par une méthode E.F. standard nécessite de borner le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** et de construire une **condition aux limites** sur cette frontière.

- Utilisation d'une condition aux limites approchée.  
➤ A. BAYLISS, M. GUNZBURGER and E. TURKEL, *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, SIAM J. Appl. Math., 1982.
- Utilisation d'une condition aux limites exacte.  
➤ M. LENOIR and A. JAMI. *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1978.

➤ Résoudre ( $\mathcal{P}$ ) par une méthode E.F. standard nécessite de borner le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** et de construire une **condition aux limites** sur cette frontière.

- Utilisation d'une condition aux limites approchée.  
✎ A. BAYLISS, M. GUNZBURGER and E. TURKEL, *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, SIAM J. Appl. Math., 1982.
- Utilisation d'une condition aux limites exacte.  
✎ M. LENOIR and A. JAMI. *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1978.

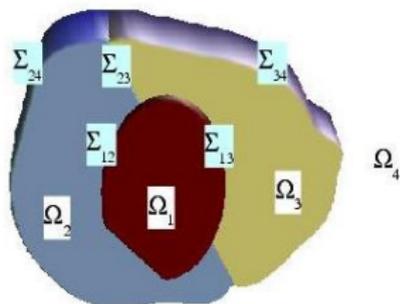
➤ Résoudre ( $\mathcal{P}$ ) par une méthode E.F. standard nécessite de borner le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** et de construire une **condition aux limites** sur cette frontière.

- Utilisation d'une condition aux limites approchée.  
✍ A. BAYLISS, M. GUNZBURGER and E. TURKEL, *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, SIAM J. Appl. Math., 1982.
- Utilisation d'une condition aux limites exacte.  
✍ M. LENOIR and A. JAMI. *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1978.

La situation où le noyau ferromagnétique est formé de plusieurs milieux peut également être envisagée.

Le potentiel magnétique vérifie alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \dots, \Omega_{N+1} \\ \mu_j \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Omega_j} - \mu_i \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\Omega_i} = (\mu_j - \mu_i) g \\ \quad \text{à travers } \Sigma_{ij}, 1 \leq i < j \leq N+1 \end{array} \right.$$



- 1 Le problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt de la méthode pour de l'optimisation de forme

## Formule de représentation intégrale

Le potentiel  $\phi$  solution de  $(\mathcal{P})$  vérifie pour  $x \notin \Sigma$ ,

$$\phi(x) = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(y) G(x, y) d\sigma_y - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \phi(y) G_n(x, y) d\sigma_y$$

où  $G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}$  et  $G_n(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}$ .

► Détails

◀ Retour

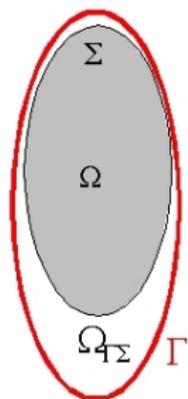
On borne le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle**  $\Gamma$  arbitrairement proche de  $\Sigma$ . On résout le problème :

$$(\mathcal{P}_b) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega_{\Gamma\Sigma} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = (\mu - 1) g & \text{à travers } \Sigma \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} + \phi & = (\mu - 1) h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où

$$h(x) = \int_{\Sigma} g(y) D^{\Gamma} G(x, y) d\sigma_y - \int_{\Sigma} \phi(y) D^{\Gamma} G_n(x, y) d\sigma_y$$

$$\text{et } D^{\Gamma} G = \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}} + G.$$



## Formulation variationnelle

On note  $\Omega_\Gamma = \bar{\Omega} \cup \Omega_{\Sigma\Gamma}$ .

Trouver  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  tel que pour tout  $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma} \phi \psi \, d\gamma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \phi(x) D^\Gamma G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ = & (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\Gamma G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \end{aligned}$$

On montre que :

- 1 Le problème  $(\mathcal{P}_b)$  admet une unique solution  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  qui est la restriction de la solution du pb  $(\mathcal{P})$  au domaine  $\Omega_\Gamma$ .
- 2 L'erreur de discrétisation par E.F. isoparamétriques de Lagrange  $P_k$  se comporte en  $\mathcal{O}(h^k)$ .

↗ S. BALAC and G. CALOZ. *Coupling of FEM and integral representation in magnetostatics*, submitted to Int. J. Numer. Model. (2006).

On montre que :

- 1 Le problème  $(\mathcal{P}_b)$  admet une unique solution  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  qui est la restriction de la solution du pb  $(\mathcal{P})$  au domaine  $\Omega_\Gamma$ .
- 2 L'erreur de discrétisation par E.F. isoparamétriques de Lagrange  $P_k$  se comporte en  $\mathcal{O}(h^k)$ .

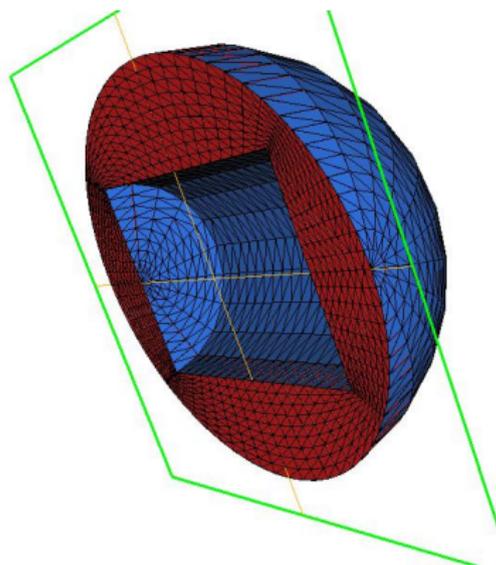
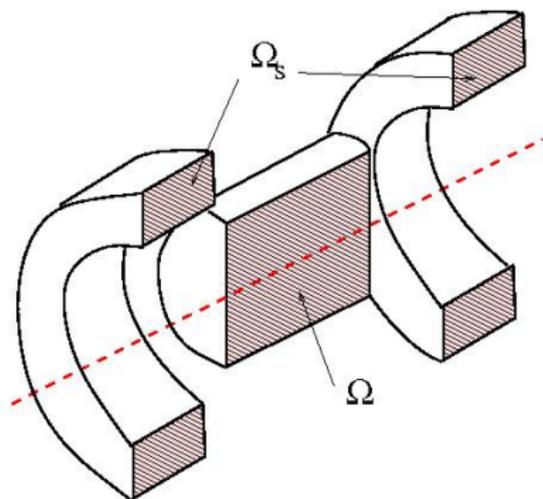
✎ S. BALAC and G. CALOZ. *Coupling of FEM and integral representation in magnetostatics*, submitted to Int. J. Numer. Model. (2006).

## Caractéristiques de la méthode :

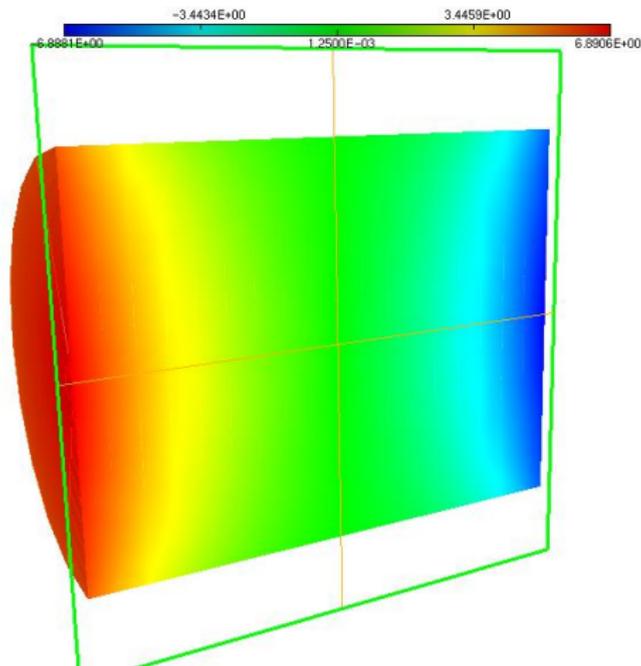
- Possibilité de localiser le calcul dans un voisinage de  $\Omega$
- Utilisation d'E.F. classiques (Lagrange)  
Matrice non symétrique mais de taille « raisonnable » et creuse
- Pas d'intégrale singulière ( $\Gamma \neq \Sigma$ )

Mise en oeuvre numérique avec le code MELINA (D. Martin)

<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>



- Électroaimant formé de deux bobines parcourues par un courant de densité constante.
- Noyau ferromagnétique de perméabilité  $\mu = 10^3$ .
- Maillage du domaine  $\Omega_\Gamma$  avec 56160 tétraédres.



Visualisation du potentiel à l'intérieur du noyau.  
Temps de calcul : 17 s. (PC Intel PIV 3Ghz)

Medit (P. Frey) [www.ann.jussieu.fr/~frey/logiciels/medit.htm](http://www.ann.jussieu.fr/~frey/logiciels/medit.htm) 

- 1 Le problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt de la méthode pour de l'optimisation de forme

# Calcul du champ magnétique

On a  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$  avec  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(x) &= (\mu - 1) \left( \overbrace{\int_{\Sigma} g(y) \nabla_x G(x, y) d\sigma_y}^{= J_1(x)} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Sigma} \phi(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y}_{= J_2(x)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

► FRI

- ↪ Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  s'obtient par évaluation des 2 intégrales de surface  $J_1(x)$  et  $J_2(x)$ .
- ↪ La formule permet de calculer ponctuellement le champ magnétique (ex. nœuds d'une surface de contrôle).

# Calcul du champ magnétique

On a  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$  avec  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(x) &= (\mu - 1) \left( \overbrace{\int_{\Sigma} g(y) \nabla_x G(x, y) d\sigma_y}^{= J_1(x)} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Sigma} \phi(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y}_{= J_2(x)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

► FRI

⇒ Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  s'obtient par évaluation des 2 intégrales de surface  $J_1(x)$  et  $J_2(x)$ .

⇒ La formule permet de calculer ponctuellement le champ magnétique (ex. nœuds d'une surface de contrôle).

On a  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$  avec  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(x) &= (\mu - 1) \left( \overbrace{\int_{\Sigma} g(y) \nabla_x G(x, y) d\sigma_y}^{= J_1(x)} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Sigma} \phi(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y}_{= J_2(x)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

► FRI

- ⇒ Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  s'obtient par évaluation des 2 intégrales de surface  $J_1(x)$  et  $J_2(x)$ .
- ⇒ La formule permet de calculer ponctuellement le champ magnétique (ex. nœuds d'une surface de contrôle).



Le calcul de  $\mathbf{H}_m$  par cette formule est **inefficace** pour des valeurs de  $\mu \geq 10$ .

**Table:** Valeurs de la composante principale de  $J_1$  et  $J_2$ , de  $\mathbf{H}_m$  calculé par la relation (1) et valeur exacte pour  $\mu = 10^3$ .

	$J_1(x_k)$	$J_2(x_k)$	$\mathbf{H}_m$ par (1)	$\mathbf{H}_m$ exact
$x_1$	$0.9266 \cdot 10^4$	$0.9327 \cdot 10^4$	$-0.4792 \cdot 10^6$	$-0.2284 \cdot 10^6$
$x_2$	$0.8897 \cdot 10^4$	$0.8954 \cdot 10^4$	$-0.4522 \cdot 10^6$	$-0.2193 \cdot 10^6$
$x_3$	$0.7437 \cdot 10^4$	$0.7529 \cdot 10^4$	$-0.7301 \cdot 10^6$	$-0.1847 \cdot 10^6$
$x_4$	$0.8534 \cdot 10^4$	$0.8629 \cdot 10^4$	$-0.7577 \cdot 10^6$	$-0.2116 \cdot 10^6$
$x_5$	$0.6962 \cdot 10^4$	$0.7087 \cdot 10^4$	$-0.9959 \cdot 10^6$	$-0.1740 \cdot 10^6$

➤ Des tests numériques montrent par ailleurs que **l'erreur est d'autant plus grande que  $\mu$  est grand.**

# Un développement asymptotique

⇒ On cherche à étudier le comportement de  $\phi$  et  $\mathbf{H}_m$  en fonction de  $\mu$ .

On écrit les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}\phi|_{\Omega} &= \phi_0^i + \frac{1}{\mu}\phi_1^i + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^i + \dots \\ \phi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}} &= \phi_0^e + \frac{1}{\mu}\phi_1^e + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^e + \dots\end{aligned}$$

de l'ordre de l'erreur  
numérique de la méthode

# Un développement asymptotique

⇒ On cherche à étudier le comportement de  $\phi$  et  $\mathbf{H}_m$  en fonction de  $\mu$ .

On écrit les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}\phi|_{\Omega} &= \phi_0^i + \frac{1}{\mu}\phi_1^i + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^i + \dots \\ \phi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}} &= \phi_0^e + \frac{1}{\mu}\phi_1^e + \frac{1}{\mu^2}\phi_2^e + \dots\end{aligned}$$

de l'ordre de l'erreur  
numérique de la méthode

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $\phi_k^i$  et  $\phi_k^e$  sont solutions des problèmes couplés suivants :

➔ Dans le domaine intérieur  $\Omega$

$$(\mathcal{P}_0^i) \begin{cases} \Delta \phi_0^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_0^i = g & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta \phi_1^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_1^i = \partial_n \phi_0^e - g & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

puis pour  $k \geq 2$

$$(\mathcal{P}_k^i) \begin{cases} \Delta \phi_k^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_k^i = \partial_n \phi_{k-1}^e & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

➔ Dans le domaine extérieur  $\mathbb{C}\bar{\Omega}$

$$(\mathcal{P}_k^e) \begin{cases} \Delta \phi_k^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \phi_k^e = \phi_k^i & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $\phi_k^i$  et  $\phi_k^e$  sont solutions des problèmes couplés suivants :

➔ Dans le domaine intérieur  $\Omega$

$$(\mathcal{P}_0^i) \begin{cases} \Delta \phi_0^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_0^i = g & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta \phi_1^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_1^i = \partial_n \phi_0^e - g & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

puis pour  $k \geq 2$

$$(\mathcal{P}_k^i) \begin{cases} \Delta \phi_k^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_k^i = \partial_n \phi_{k-1}^e & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

➔ Dans le domaine extérieur  $\mathbb{C}\bar{\Omega}$

$$(\mathcal{P}_k^e) \begin{cases} \Delta \phi_k^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \phi_k^e = \phi_k^i & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

## Proposition

- il existe un unique couple  $((\phi_k^i)_{k \in \mathbb{N}}, (\phi_k^e)_{k \in \mathbb{N}})$  solution des problèmes couplés  $(\mathcal{P}_k^i), (\mathcal{P}_k^e), k \in \mathbb{N}$ .

- Les séries  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e$  convergent vers  $\phi$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  et dans  $\mathbb{W}^1(\mathbb{C}\Omega)$  resp.

- Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a les estimations de troncature :

$$\|\phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e\|_{1, \mathbb{C}\Omega} \leq \frac{C_e}{\mu^N} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

$$\|\phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i\|_{1, \Omega} \leq \frac{C_i}{\mu^{N+1}} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

où  $C_e, C_i$  sont indépendantes de  $\mu$ .

## Proposition

- il existe un unique couple  $((\phi_k^i)_{k \in \mathbb{N}}, (\phi_k^e)_{k \in \mathbb{N}})$  solution des problèmes couplés  $(\mathcal{P}_k^i), (\mathcal{P}_k^e), k \in \mathbb{N}$ .
- Les séries  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e$  convergent vers  $\phi$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  et dans  $\mathbb{W}^1(\mathbb{C}\Omega)$  resp.
- Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a les estimations de troncature :

$$\|\phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e\|_{1, \mathbb{C}\Omega} \leq \frac{C_e}{\mu^N} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

$$\|\phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i\|_{1, \Omega} \leq \frac{C_i}{\mu^{N+1}} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

où  $C_e, C_i$  sont indépendantes de  $\mu$ .

## Proposition

- il existe un unique couple  $((\phi_k^i)_{k \in \mathbb{N}}, (\phi_k^e)_{k \in \mathbb{N}})$  solution des problèmes couplés  $(\mathcal{P}_k^i), (\mathcal{P}_k^e), k \in \mathbb{N}$ .

- Les séries  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e$  convergent vers  $\phi$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  et dans  $\mathbb{W}^1(\mathbb{C}\Omega)$  resp.

- Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a les estimations de troncature :

$$\left\| \phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^e \right\|_{1, \mathbb{C}\Omega} \leq \frac{C_e}{\mu^N} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

$$\left\| \phi - \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu^k} \phi_k^i \right\|_{1, \Omega} \leq \frac{C_i}{\mu^{N+1}} \|g\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma}$$

où  $C_e, C_i$  sont indépendantes de  $\mu$ .

En injectant le D.A. dans la F.R.I. on obtient :

$$\mathbf{H}_m(x) = (1 - \mu) \int_{\Sigma} \left( g(y) \nabla_x G(x, y) - \phi_0^j(y) \nabla_x G_n(x, y) \right) d\sigma_y \\ + \int_{\Sigma} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu^k} \phi_k^j(y) \right) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y.$$

Explication :

- Théoriquement le terme en rouge est nul ( $\phi_0$  étant solution de  $(\mathcal{P}_0^j)$ ).
- Numériquement ce terme n'est pas nul (en raison de l'erreur numérique) et est multiplié par une constante  $\mu - 1$  qui est grande.

En injectant le D.A. dans la F.R.I. on obtient :

$$\mathbf{H}_m(x) = (1 - \mu) \int_{\Sigma} \left( g(y) \nabla_x G(x, y) - \phi_0^j(y) \nabla_x G_n(x, y) \right) d\sigma_y \\ + \int_{\Sigma} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu^k} \phi_k^j(y) \right) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y.$$

Explication :

- Théoriquement le terme en rouge est nul ( $\phi_0$  étant solution de  $(\mathcal{P}_0^j)$ ).
- Numériquement ce terme n'est pas nul (en raison de l'erreur numérique) et est multiplié par une constante  $\mu - 1$  qui est grande.

En injectant le D.A. dans la F.R.I. on obtient :

$$\mathbf{H}_m(x) = (1 - \mu) \int_{\Sigma} \left( g(y) \nabla_x G(x, y) - \phi_0^j(y) \nabla_x G_n(x, y) \right) d\sigma_y \\ + \int_{\Sigma} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu - 1}{\mu^k} \phi_k^j(y) \right) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y.$$

Explication :

- Théoriquement le terme en rouge est nul ( $\phi_0$  étant solution de  $(\mathcal{P}_0^j)$ ).
- Numériquement ce terme n'est pas nul (en raison de l'erreur numérique) et est multiplié par une constante  $\mu - 1$  qui est grande.

# Une nouvelle formule intégrale pour calculer $\mathbf{H}_m$

La formule intégrale utilisée pour calculer le champ magnétique est :

$$\mathbf{H}_m(x) \approx \frac{\mu - 1}{\mu} \int_{\Sigma} \phi_1^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y + \frac{\mu - 1}{\mu^2} \int_{\Sigma} \phi_2^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y$$

Caractéristiques :

- Pour calculer  $\phi_1^i$  et  $\phi_2^i$ , il faut résoudre les problèmes  $(\mathcal{P}_0^i)$ ,  $(\mathcal{P}_0^e)$ ,  $(\mathcal{P}_1^i)$ ,  $(\mathcal{P}_1^e)$  et  $(\mathcal{P}_2^i)$ .
- Mais ce n'est pas si coûteux numériquement car on a e fait deux équations de Laplace à résoudre avec plusieurs second membres.

✍ S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).



# Une nouvelle formule intégrale pour calculer $\mathbf{H}_m$

La formule intégrale utilisée pour calculer le champ magnétique est :

$$\mathbf{H}_m(x) \approx \frac{\mu - 1}{\mu} \int_{\Sigma} \phi_1^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y + \frac{\mu - 1}{\mu^2} \int_{\Sigma} \phi_2^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y$$

Caractéristiques :

- Pour calculer  $\phi_1^i$  et  $\phi_2^i$ , il faut résoudre les problèmes  $(\mathcal{P}_0^i)$ ,  $(\mathcal{P}_0^e)$ ,  $(\mathcal{P}_1^i)$ ,  $(\mathcal{P}_1^e)$  et  $(\mathcal{P}_2^i)$ .
- Mais ce n'est pas si coûteux numériquement car on a e fait deux équations de Laplace à résoudre avec plusieurs second membres.

✍ S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).



# Une nouvelle formule intégrale pour calculer $\mathbf{H}_m$

La formule intégrale utilisée pour calculer le champ magnétique est :

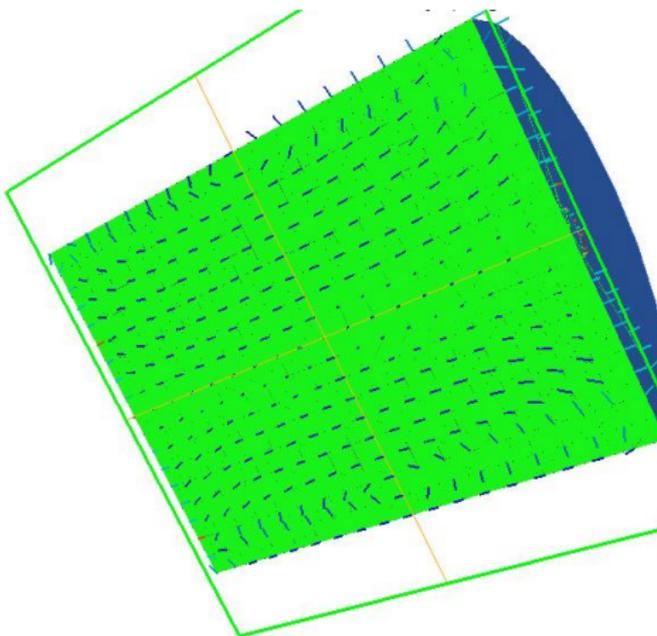
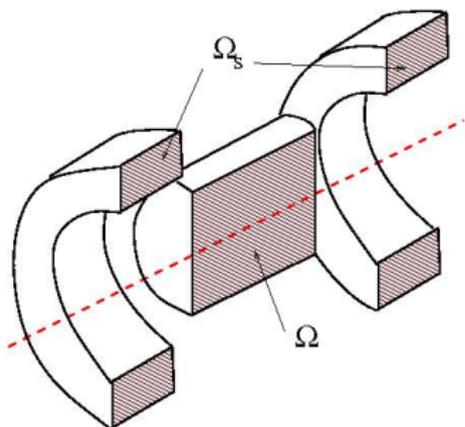
$$\mathbf{H}_m(x) \approx \frac{\mu - 1}{\mu} \int_{\Sigma} \phi_1^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y + \frac{\mu - 1}{\mu^2} \int_{\Sigma} \phi_2^i(y) \nabla_x G_n(x, y) d\sigma_y$$

Caractéristiques :

- Pour calculer  $\phi_1^i$  et  $\phi_2^i$ , il faut résoudre les problèmes  $(\mathcal{P}_0^i)$ ,  $(\mathcal{P}_0^e)$ ,  $(\mathcal{P}_1^i)$ ,  $(\mathcal{P}_1^e)$  et  $(\mathcal{P}_2^i)$ .
- Mais ce n'est pas si coûteux numériquement car on a e fait deux équations de Laplace à résoudre avec plusieurs second membres.

✍ S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).

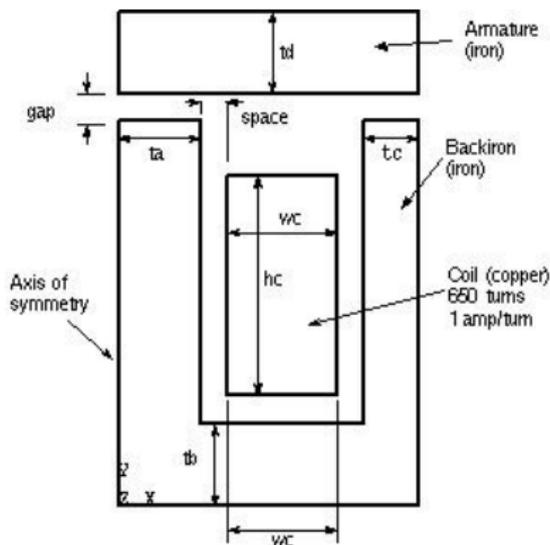




Champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans le noyau.  
Temps de calcul : 20 s. (PC Intel PIV 3Ghz)

- 1 Le problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt de la méthode pour de l'optimisation de forme

Exemple d'un actionneur linéaire dynamique : 2 domaines magnétiques dont un « à optimiser »



**Armature:** the moving component of the actuator

**Backiron:** the stationary iron component of the actuator that completes the magnetic circuit around the coil

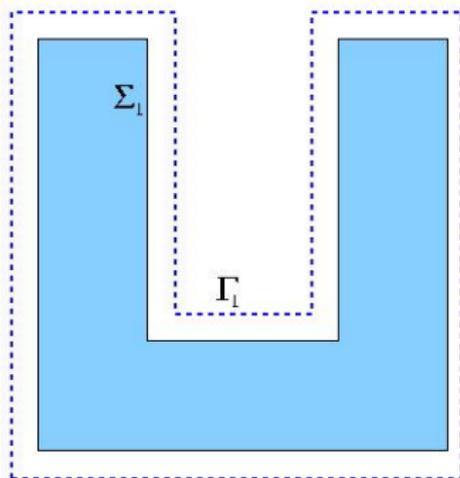
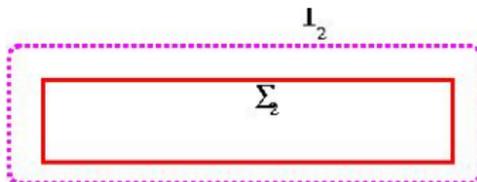
**Coil:** a stranded, wound coil supplying a predefined current

**Gap:** the thin rectangular region of air between the armature and the pole faces of the back-iron

↳ S. B. YOON, J. HUR, Y. D. CHUN, and D. S. HYUN. *Shape Optimization of solenoid actuator using the finite element method and numerical optimization technique*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 33, pp. 4140-4142 (1997).

On introduit deux frontières de couplage :

- une autour de la géométrie fixe
- une autour de la géométrie à optimiser



## Avantages

Entre deux itérations de l'algorithme d'optimisation

- on ne re-maille qu'une zone réduite
- une partie des termes matriciels restent inchangés

- La méthode présente les caractéristiques suivantes :
  - Permet une localisation du calcul : la frontière  $\Gamma$  peut être placée très proche de la frontière du noyau ferromagnétique  $\Sigma$ .
  - Possibilité de calculer le champ magnétique de manière ponctuelle (et non globale) en des nœuds d'une surface de contrôle.
- A suivre :
  - Mise en œuvre de la méthode pour des problèmes axisymétriques.
  - Optimisation de forme.

Références citées disponibles depuis :

[maths.insa-lyon.fr/~balac/publis](https://maths.insa-lyon.fr/~balac/publis)

- La méthode présente les caractéristiques suivantes :
  - Permet une localisation du calcul : la frontière  $\Gamma$  peut être placée très proche de la frontière du noyau ferromagnétique  $\Sigma$ .
  - Possibilité de calculer le champ magnétique de manière ponctuelle (et non globale) en des nœuds d'une surface de contrôle.
- A suivre :
  - Mise en œuvre de la méthode pour des problèmes axisymétriques.
  - Optimisation de forme.

Références citées disponibles depuis :

[maths.insa-lyon.fr/~balac/publis](https://maths.insa-lyon.fr/~balac/publis)



# Obtention de la formule intégrale I

Comme le potentiel  $\varphi$  est harmonique dans  $\mathbb{C}\bar{\Omega}$  on a la formule de représentation intégrale pour  $y \in \mathbb{C}\bar{\Omega}$ ,

$$\varphi(y) = \int_{\Sigma} \varphi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}}(x) G_n(x, y) d\sigma_x - \int_{\Sigma} \partial_n \varphi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}}(x) G(x, y) d\sigma_x. \quad (2)$$

Prenons  $x \in \Omega$  et  $y \in \mathbb{C}\bar{\Omega}$ . On déduit de la 2ieme formule de Green la relation

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta_x \varphi(x) G(x, y) - \varphi(x) \Delta_x G(x, y)) dx \\ &= \int_{\Sigma} (\partial_n \varphi|_{\Omega}(x) G(x, y) - \varphi|_{\Omega}(x) G_n(x, y)) d\sigma_x. \quad (3) \end{aligned}$$

On multiplie (3) par  $\mu$  et on somme à (2) pour obtenir pour  $y \in \mathbb{C}\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \int_{\Sigma} (\varphi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}}(x) - \mu \varphi|_{\Omega}(x)) G_n(x, y) d\sigma_x \\ &\quad - \int_{\Sigma} (\partial_n \varphi|_{\mathbb{C}\bar{\Omega}}(x) - \mu \partial_n \varphi|_{\Omega}(x)) G(x, y) d\sigma_x. \quad (4) \end{aligned} \quad \text{INSIA}$$

En utilisant la condition limite sur  $\Sigma$ , il vient pour  $y \in \mathbb{C}\bar{\Omega}$ ,

$$\varphi(y) = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(x) G(x, y) d\sigma_x - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \varphi(x) G_n(x, y) d\sigma_x.$$

[← Retour](#)

⇒ Problème de Neumann intérieur ( $\mathcal{P}_0^i$ )

$$(\mathcal{P}_0^i) \begin{cases} \Delta \phi_0^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_0^i = g & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

- On a existence d'une solution dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  car la condition de compatibilité est satisfaite :

$$\int_{\Sigma} g \, d\sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{H}_s \, dx = 0.$$

- Il existe une unique solution  $\tilde{\phi}_0^i$  dans  $\{\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega) ; \int_{\Omega} \psi \, dx = 0\}$  et on a  $\phi_0^i = \tilde{\phi}_0^i + C_0$  avec  $C_0 \in \mathbb{R}$  indéterminée.

# Existence et unicité II

⇒ Problème de Dirichlet extérieur ( $\mathcal{P}_0^e$ )

$$(\mathcal{P}_0^e) \begin{cases} \Delta \phi_0^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \phi_0^e = \phi_0^j & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

On résout en fait :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\phi}_0^e = 0 & \text{dans } \mathbb{C}\bar{\Omega} \\ \tilde{\phi}_0^e = \tilde{\phi}_0^j & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Il existe une unique solution  $\tilde{\phi}_0^e$  dans  $\mathbb{W}^1(\mathbb{C}\bar{\Omega})$ .

⇒ Problème de Neumann intérieur ( $\mathcal{P}_1^i$ )

$$(\mathcal{P}_1^i) \begin{cases} \Delta \phi_1^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \phi_1^i = \partial_n \phi_0^e - g & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

On résout en fait :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\phi}_1^i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n \tilde{\phi}_1^i = \partial_n \tilde{\phi}_0^e - g & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

- On a existence d'une solution dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  si la condition de compatibilité est satisfaite :

$$\int_{\Sigma} \partial_n \tilde{\phi}_1^i \, d\sigma = \int_{\Sigma} \partial_n \tilde{\phi}_0^e \, d\sigma = 0.$$

# Existence et unicité IV

- Si on prend  $C_0 = - \int_{\Sigma} \partial_n \tilde{\phi}_0^e \, d\sigma / \int_{\Sigma} \partial_n v \, d\sigma$  et  $\phi_0^e = \tilde{\phi}_0^e - C_0 v$  où

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 1 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

alors

$$\int_{\Sigma} \tilde{\phi}_0^e \, d\sigma = \int_{\Sigma} \partial_n \tilde{\phi}_0^e \, d\sigma + C_0 \int_{\Sigma} \partial_n v \, d\sigma = 0$$

et  $C_0$  est déterminée.