

Une méthode de calcul du champ magnétique pour l'optimisation de forme d'un dispositif électromagnétique

Stéphane Balac

Institut Camille Jordan (UMR 5208), INSA de Lyon

Gabriel Caloz

Institut de Recherche Mathématique de Rennes
(UMR 6625), Université de Rennes 1

Proposer une méthode de calcul du champ magnétique adaptée aux spécificités des méthodes numériques utilisées pour l'optimisation de la forme d'un dispositif électromagnétique constitué :

- d'un inducteur Ω_s parcouru par un courant de densité \mathbf{j} **indépendant du temps**
- d'un ou plusieurs milieux (faiblement) ferromagnétiques Ω



➡ Cadre de la magnétostatique linéaire

□ Les méthodes numériques pour la recherche des minima avec ou sans contrainte en optimisation de forme sont **de nature itérative**.

□ **Objectif** : **réduire le coût de calcul** du champ magnétique par la méthode des éléments finis **pour une configuration géométrique 3-D donnée**.

- formulation en **potentiel magnétique** (plutôt qu'en champ magnétique)
- **localisation** du calcul « autour » du dispositif électromg.
- calcul du champ magnétique par une **formule de représentation intégrale** aux nœuds d'une surface de contrôle (plutôt que de la dérivation numérique sur les éléments finis)

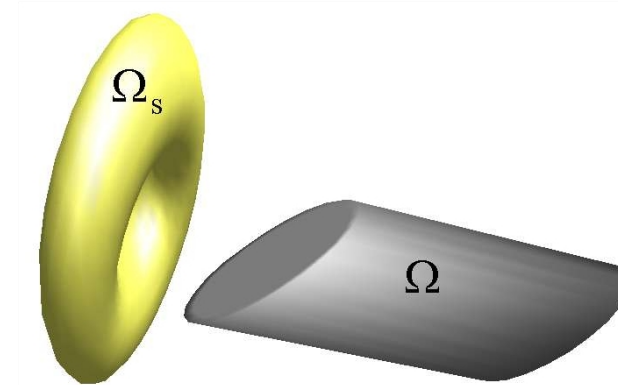
- 1 Formulation du problème de la magnétostatique
- 2 Couplage E.F. - formule de représentation intégrale
- 3 Calcul du champ magnétique
- 4 Intérêt supplémentaire pour l'optimisation

1 - Le problème de la magnétostatique

On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ dans les milieux non magnétiques.



- On introduit une loi de comportement (linéaire) pour le noyau ferromagnétique Ω :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

- On décompose le champ magnétique \mathbf{H} de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

où ...

❶ Le champ \mathbf{H}_s vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\overline{\Omega}_s \end{cases}$$

On montre que :

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{où} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

▶ \mathbf{H}_s se calcule en évaluant cette intégrale volumique par quadrature numérique.

② Le champ \mathbf{H}_m est solution du problème :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathcal{C}\bar{\Omega} \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = [\mu] \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n} & \text{à travers } \Sigma = \partial\Omega \end{cases}$$

On a $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$ avec ϕ solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathcal{C}\bar{\Omega} \\ \left[\mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})}_{= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

Caractéristique : problème 3D en domaine non borné.

▶ Résoudre (\mathcal{P}) par une méthode E.F. standard nécessite de borner le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** et de construire une **condition aux limites** sur cette frontière.

✍ M. LENOIR and A. JAMI. *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 16, pp. 341-359 (1978).

▶ Le principe de la méthode reste valable avec l'équation d'Helmholtz (au lieu de l'équation de Laplace)

Formule de représentation intégrale

Le potentiel ϕ solution de (\mathcal{P}) vérifie pour $x \notin \Sigma$,

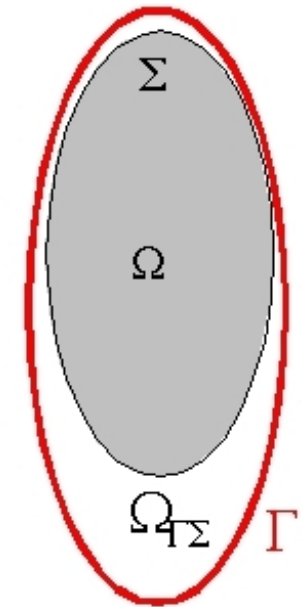
$$\phi(\mathbf{x}) = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \phi(\mathbf{y}) G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$ et $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}$.

On borne le domaine de calcul en introduisant une **frontière artificielle** Γ arbitrairement proche de Σ . On résout le problème :

$$(\mathcal{P}_b) \quad \begin{cases} \Delta \phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega_{\Gamma\Sigma} \\ \left[\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] & = (\mu - 1) g & \text{à travers } \Sigma \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} + \phi & = (\mu - 1) h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où



$$h(x) = \int_{\Sigma} g(y) D^{\Gamma} G(x, y) d\sigma_y - \int_{\Sigma} \phi(y) D^{\Gamma} G_n(x, y) d\sigma_y$$

$$\text{et } D^{\Gamma} G = \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}} + G.$$

Formulation variationnelle

On note $\Omega_\Gamma = \bar{\Omega} \cup \Omega_{\Sigma\Gamma}$.

Trouver $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$ tel que pour tout $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma} \phi \psi \, d\gamma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \phi(x) D^\Gamma G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ = & (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\Gamma G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \end{aligned}$$

On montre que :

- 1 Le problème (\mathcal{P}_b) admet une unique solution $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$ qui est la restriction de la solution du pb (\mathcal{P}) au domaine Ω_Γ .
- 2 L'erreur de discrétisation par E.F. isoparamétriques de Lagrange P_k se comporte en $\mathcal{O}(h^k)$.

✍ S. BALAC and G. CALOZ. *Coupling of FEM and integral representation in magnetostatics*, submitted to Int. J. Numer. Model. (2006).

Caractéristiques de la méthode

- Possibilité de localiser le calcul dans un voisinage de Ω
- Utilisation d'E.F. classiques (Lagrange)
Matrice non symétrique mais de taille « raisonnable » et creuse
- Pas d'intégrale singulière ($\Gamma \neq \Sigma$)

Mise en oeuvre numérique avec le code MELINA (D. Martin)

<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina>

3 - Calcul du champ magnétique

On a $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$ avec $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$ donné par

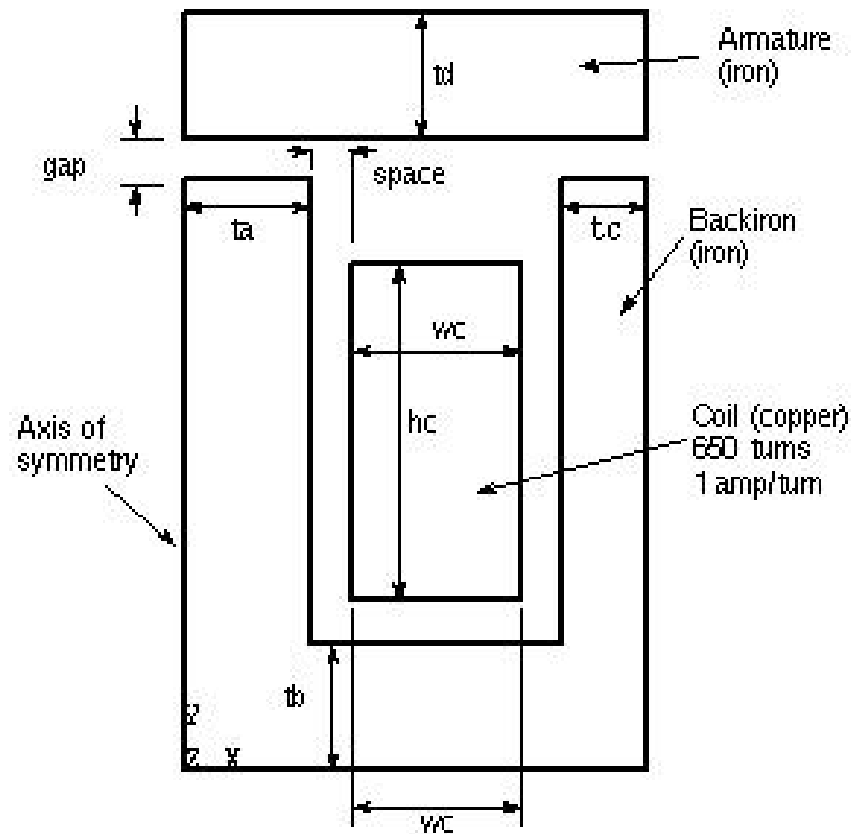
$$H_m(\mathbf{x}) = (\mu - 1) \left(\underbrace{\int_{\Sigma} g(\mathbf{y}) \nabla_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y}_{= J_1(\mathbf{x})} - \underbrace{\int_{\Sigma} \phi(\mathbf{y}) \nabla_x G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y}_{= J_2(\mathbf{x})} \right) \quad (1)$$

► Le champ magnétique \mathbf{H} s'obtient ponctuellement (par ex. nœuds d'une surface de contrôle) **par évaluation des 2 intégrales de surface $J_1(\mathbf{x})$ et $J_2(\mathbf{x})$.**

✍ S. BALAC and G. CALOZ. *Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 39, pp. 1997-2002 (2003).

4 - Un intérêt supplémentaire pour l'optimisation

Exemple d'un actionneur linéaire dynamique : 2 domaines magnétiques dont un « à optimiser »



Armature: the moving component of the actuator

Backiron: the stationary iron component of the actuator that completes the magnetic circuit around the coil

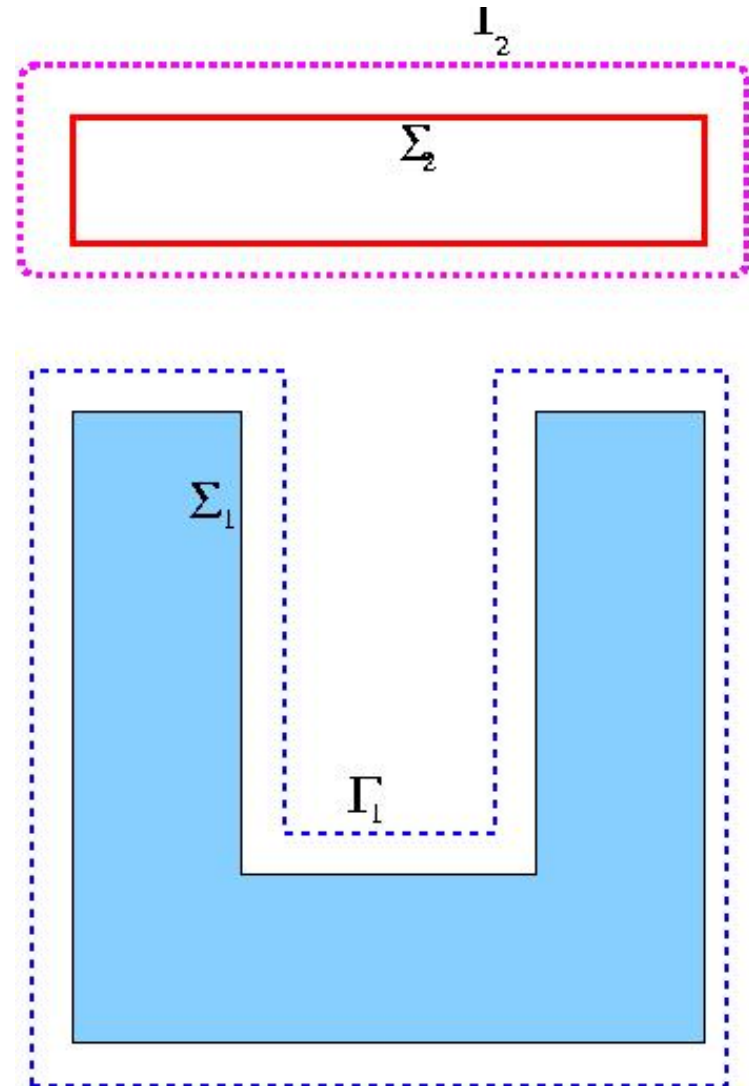
Coil: a stranded, wound coil supplying a predefined current

Gap: the thin rectangular region of air between the armature and the pole faces of the back-iron

✍ S. B. YOON, J. HUR, Y. D. CHUN, and D. S. HYUN. *Shape Optimization of solenoid actuator using the finite element method and numerical optimization technique*, IEEE Trans. on Magnetics, vol. 33, pp. 4140-4142 (1997).

On introduit deux frontières de couplage :

- une autour de la géométrie fixe
- une autour de la géométrie à optimiser



Formulation variationnelle

Trouver $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$ tel que pour tout $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$
 $(\Omega_\Gamma = \Omega_{\Gamma_1} \cup \Omega_{\Gamma_2})$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \mu_i \int_{\Omega_i} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\omega + \int_{\Omega_{\Sigma_i \Gamma_i}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\omega + \int_{\Gamma_i} \phi \psi \, d\gamma \\
 & + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\mu_i - 1) \int_{\Gamma_j} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma_i} \phi(x) D^{\Gamma_j} G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\
 & = \sum_{i=1}^2 (\mu_i - 1) \int_{\Sigma_i} g \psi \, d\sigma \\
 & + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\mu_i - 1) \int_{\Gamma_j} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma_i} g(x) D^{\Gamma_j} G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y
 \end{aligned}$$

Avantages

Entre deux itérations de l'algorithme d'optimisation

- on ne re-maillie qu'une zone réduite
- une partie des termes matriciels restent inchangés

La méthode présente certains avantages pour l'optimisation de forme d'un dispositif électromagnétique.

- Permet une localisation du calcul : la frontière Γ peut être placée très proche de la frontière du noyau ferromagnétique Σ .
- Permet de découpler les calculs entre une géométrie fixe et une géométrie qui évolue au cours du processus d'optimisation de forme.
- Possibilité de calculer le champ magnétique de manière ponctuelle (et non globale) en des nœuds d'une surface de contrôle.

Articles de présentation de la méthode :
maths.insa-lyon.fr/~balac/publications