

# CALCUL DE CHAMPS MAGNÉTIQUES DANS DES PROBLÈMES ISSUS DE L'IRM

**Stéphane Balac**

MAPLY, INSA de Lyon

Stephane.Balac@insa-lyon.fr

**Gabriel Caloz**

IRMAR, Univ. de Rennes 1

Gabriel.Caloz@univ-rennes1.fr

# PLAN DE L'EXPOSÉ

---

Partie I - Quelques situations en IRM nécessitant le calcul de champs magnétiques

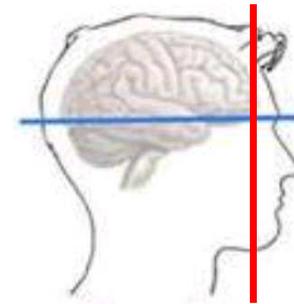
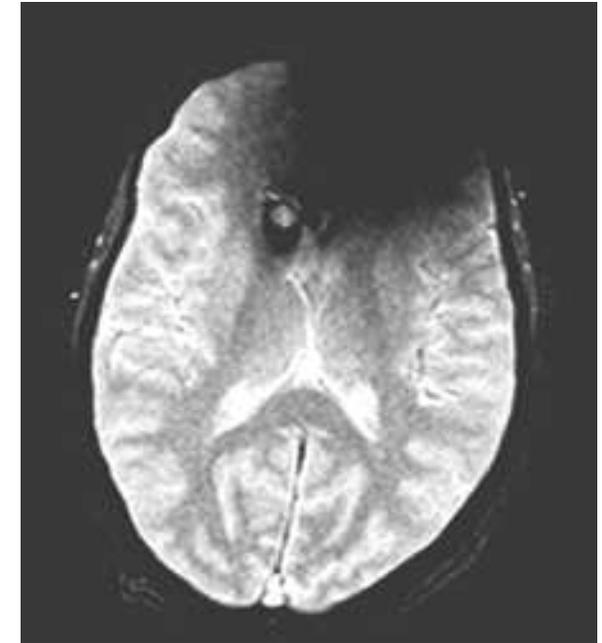
Partie II - Les problèmes de magnétostatique

Partie III - Méthodes numériques

Partie IV - Résultats numériques

# Partie I - ① Artefacts de susceptibilité magnétique

Coll. J. De Certaines, LRMBM, Univ. de Rennes 1



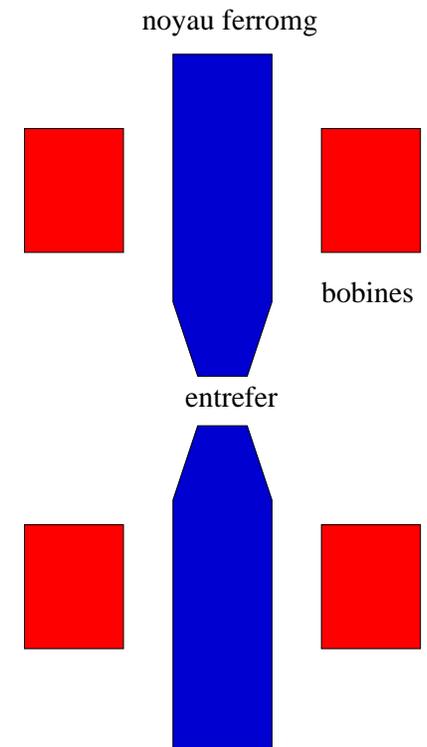
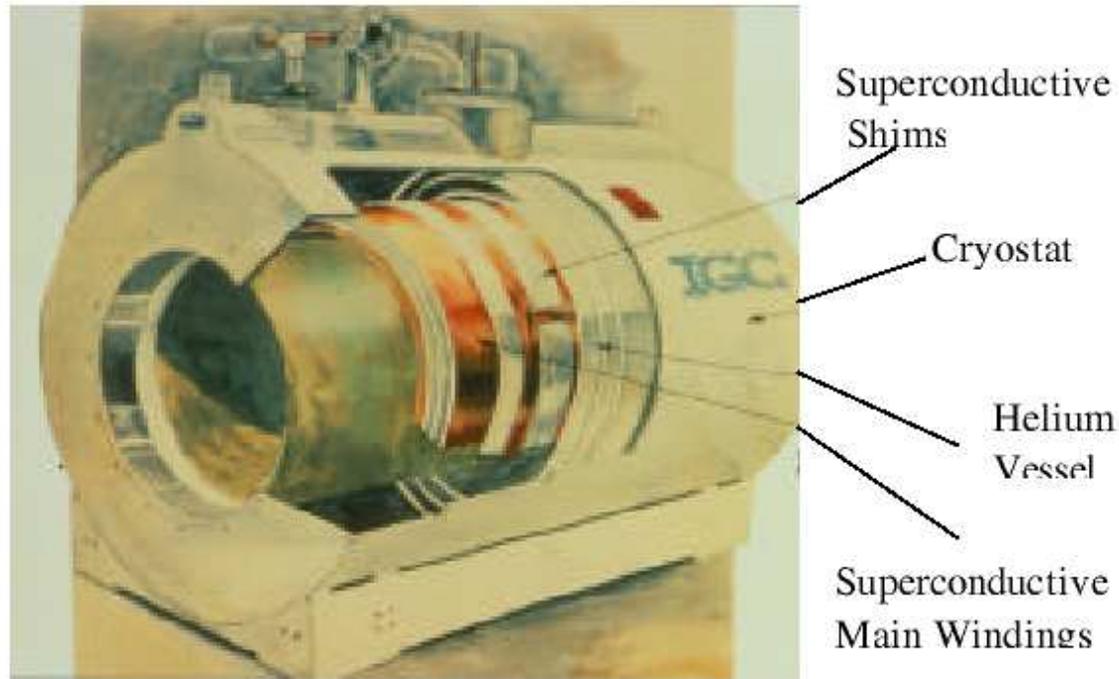
# Partie I - ② Simulateur IRM

---

Coll. H. Benoit-Cattin, C. Odet, CREATIS, Insa de Lyon.



# Partie I - ③ Optimisation de la forme d'un électro-aimant



Coll. J. De Certaines  
LRMBM, Univ. de Rennes 1

# Partie I - ④ Echauffement des tissus sous l'effet de champs RF

---

Travaux de G. Caloz & P. Boissoles, IRMAR, Univ. de Rennes 1.



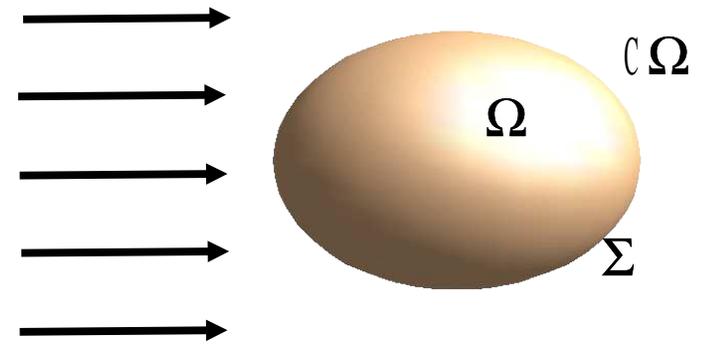
M. F. Dempsey and B. Condon. « Thermal Injuries Associated with MRI : a Review », *Clinical Radiology*, 56 (2001), P.457-465.

# Partie II - Les problèmes de magnétostatique

On considère :

- **Situation 1**

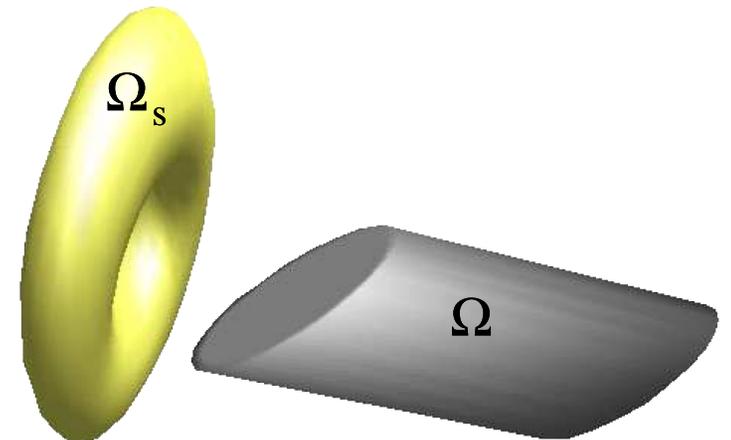
- un milieu magnétique  $\Omega$  (milieu biologique ou implant) soumis à un champ source  $\mathbf{H}_s$



ou

- **Situation 2**

- un inducteur  $\Omega_s$  parcouru par un courant de densité  $\mathbf{j}$  ( indép. du temps)
- un milieu magnétique  $\Omega$  (noyau ferromagnétique de l'électro-aimant)



## Partie II - ❶ Modélisation : situation 1

---

Le champ magnétique total  $\mathbf{H}$  est la somme du champ source  $\mathbf{H}_s$  (donné) et du champ induit par le milieu magnétique (dia/para)  $\mathbf{H}_m$  (inconnu).

▷ On part des équations de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

▷ On introduit une loi de comportement :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu = 1 + \chi_m \text{ avec } \chi_m \in [-10^{-3}, 10^{-3}].$$

▷ On établit que  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$(\mathcal{P}_H) \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_m = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \complement \Omega \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] = [\mu \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}] & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

## Partie II - ② Modélisation : situation 2

---

▷ On part des équations de la magnétostatique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{C}\Omega_s \end{array} \right.$$

▷ On introduit une loi de comportement (milieu ferromagnétique linéaire) :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \text{ où } \mu \in [10^2, 10^3].$$

▷ On décompose le champ magnétique  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

où ...

## Partie II - ② Modélisation : situation 2

---

① Le champ  $\mathbf{H}_s$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} & \text{dans } \Omega_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{0} & \text{dans } \complement \Omega_s \end{array} \right.$$

▷ On montre que :

$$\mathbf{H}_s(x) = \int_{\Omega_s} \mathbf{j}(y) \wedge \nabla_y G(x, y) dy \quad \text{où} \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}$$

➔  $\mathbf{H}_s$  se calcule par évaluation de cette intégrale volumique par quadrature numérique.

## Partie II - ② Modélisation : situation 2

---

② Le champ  $\mathbf{H}_m$  est solution du problème :

$$(\mathcal{P}_H) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{rot } \mathbf{H}_m & = & \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{div } \mathbf{H}_m & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \complement \Omega \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] & = & [\mu \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}] \quad \text{à travers } \Sigma \end{array} \right.$$

On est donc amené dans les 2 situations à résoudre le même problème  $(\mathcal{P}_H)$  ...

## Partie II - ③ Introduction du potentiel magnétique

---

▷ On a  $\mathbf{H}_m = -\nabla\phi$  avec  $\phi$  solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \complement\Omega \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}) & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

- **situation 1** :  $\mu = 1 + \chi_m$  avec  $\chi_m \in [-10^{-3}, 10^{-3}]$  (milieu dia ou para)
- **situation 2** :  $\mu \in [10^2, 10^3]$  (milieu ferromagnétique linéaire)

→ Problème 3D en domaine non borné.

## Partie III - ❶ Méthode numérique : situation 1

---

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\Omega \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}) & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

→ Problème 3D en domaine non borné.

▷ Propriété pour la perméabilité magnétique :

$$\mu = 1 + \chi_m \text{ avec } \chi_m \in [-10^{-3}, 10^{-3}]$$

▷ La condition d'interface s'écrit :

$$(1 + \chi_m) \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\Omega} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\mathbb{C}\Omega} = \chi_m (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n})$$

## Partie III - ❶ Méthode numérique : situation 1

---

▷ On résoud le problème approché (erreur commise de l'ordre de  $\chi_m$ ) :

$$(\mathcal{P}_a) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\Omega \\ \left[ \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = \chi_m (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}) & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

▷ Le potentiel  $\phi$  admet la formule de représentation intégrale :

$$\phi(x) = \chi_m \int_{\Sigma} (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}) G(x, y) d\sigma_y$$

▷ On a donc :

$$\mathbf{H}_m(x) = -\chi_m \int_{\Sigma} (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}) \nabla_x G(x, y) d\sigma_y$$

S. Balac, G. Caloz, Applied Numerical Mathematics, 41 (2002), P.345-367.

## Partie III - ① Méthode numérique : situation 2

---

Le potentiel  $\phi$  est solution du problème (avec  $\mu \approx 10^3$  dans  $\Omega$ ) :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \mathbb{C}\Omega \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = [\mu] \underbrace{\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}}_{:= g} & \text{à travers } \Sigma \end{cases}$$

→ Problème 3D en domaine non borné.

▷  $\phi$  admet la formule de représentation intégrale : pour  $x \notin \Sigma$ ,

$$\phi(x) = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(y) G(x, y) d\sigma_y - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \phi(y) G_n(x, y) d\sigma_y$$

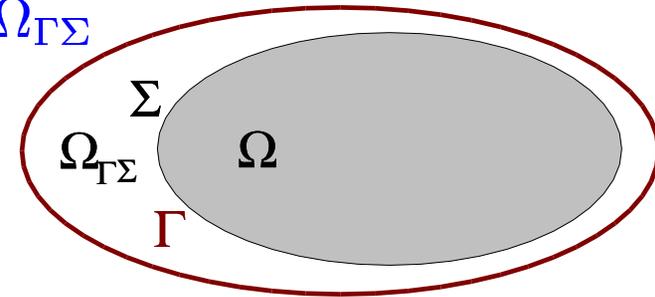
où  $G_n(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \mathbf{n}$ .

## Partie III - ① Méthode numérique : situation 2

---

▷ On borne le domaine d'étude en introduisant une **frontière artificielle**  $\Gamma$  arbitrairement proche de  $\Sigma$ . On résoud le problème :

$$(\mathcal{P}_b) \quad \begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \Omega_{\Gamma\Sigma} \\ \left[ \mu \frac{\partial\phi}{\partial n} \right] & = (\mu - 1) g & \text{à travers } \Sigma \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} + \lambda\phi & = (\mu - 1) h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$



où

$$h(x) = \int_{\Sigma} g(y) D^{\lambda} G(x, y) d\sigma_y - \int_{\Sigma} \phi(y) D^{\lambda} G_n(x, y) d\sigma_y$$

$$\text{et } D^{\lambda} G = \frac{\partial G}{\partial n} + \lambda G.$$

## Partie III - ❶ Méthode numérique : situation 2

---

▷ **Formulation variationnelle :**

trouver  $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$  tel que pour tout  $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

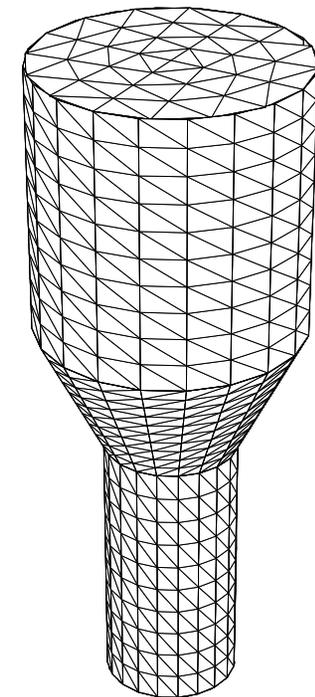
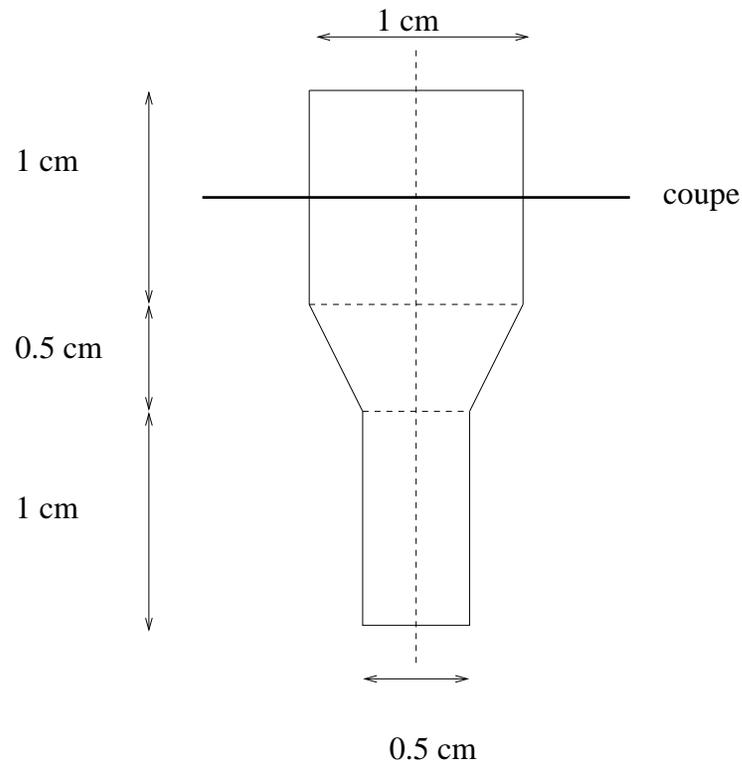
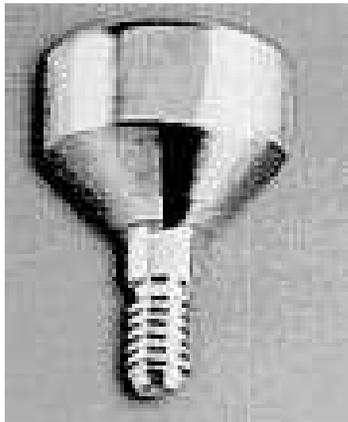
$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx + \lambda \int_{\Gamma} \phi \psi \, d\gamma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \phi(x) D^\lambda G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ = & (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\lambda G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \end{aligned}$$

▷ **Caractéristiques de la méthode :**

- Utilisation d'EF classiques (Lagrange)
- Pas d'intégrale singulière ( $\Gamma \neq \Sigma$ )
- Possibilité de localiser le calcul dans un voisinage de  $\Omega$
- Calcul de  $\mathbf{H}$  ponctuellement par une formule de représentation intégrale

S. Balac, G. Caloz, IEEE Trans. Magn., 38 (2002), P.393-396

# Partie IV - ① Artefact de susceptibilité : un exemple

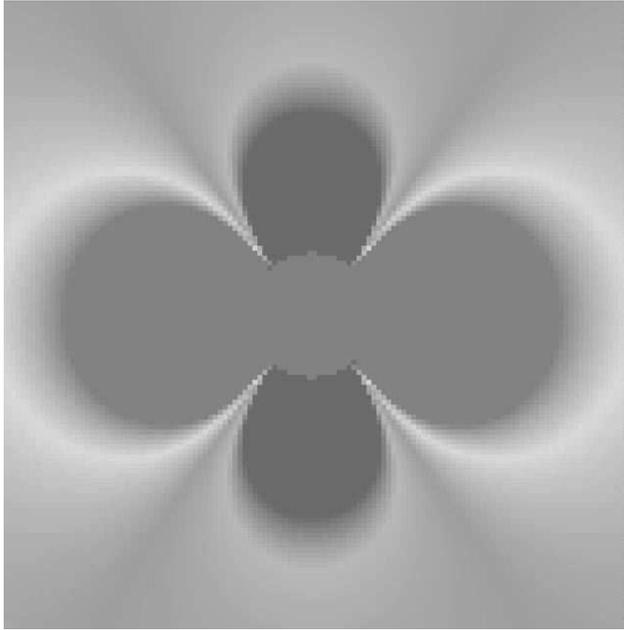


Coiffe de cicatrisation dentaire

Maillage de la surface

## Partie IV - ① Artefact de susceptibilité : un exemple

---



Isovaleurs pour  $B'_z$

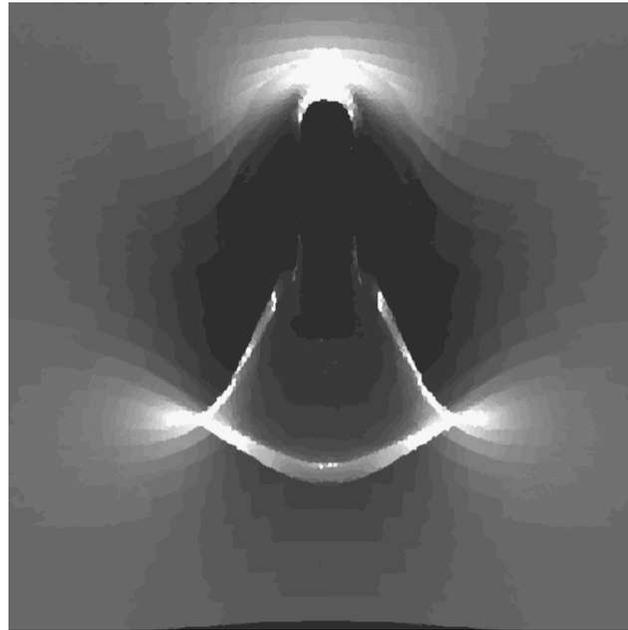


Image simulée

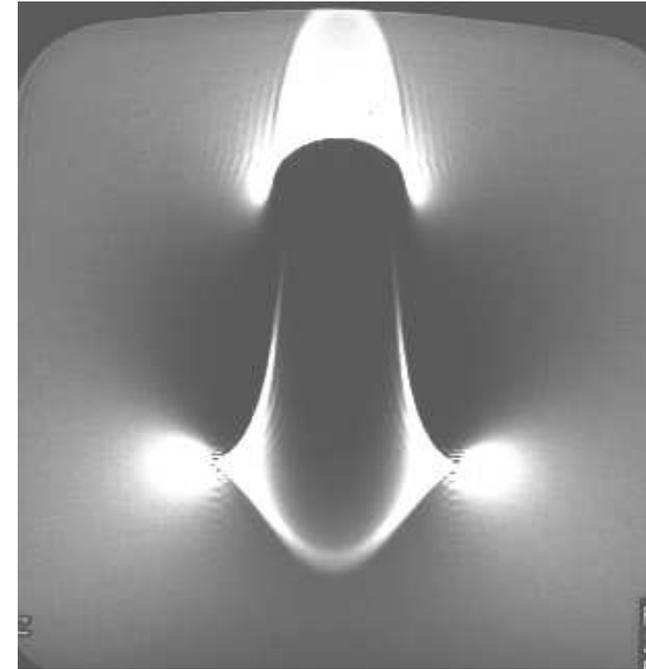


Image expérimentale

S. Balac, G. Caloz, *J. of Magnetic Resonance in Medicine*, 45 (2001), P.724-727

## Partie IV - ② Simulateur IRM : un exemple de simulation

---

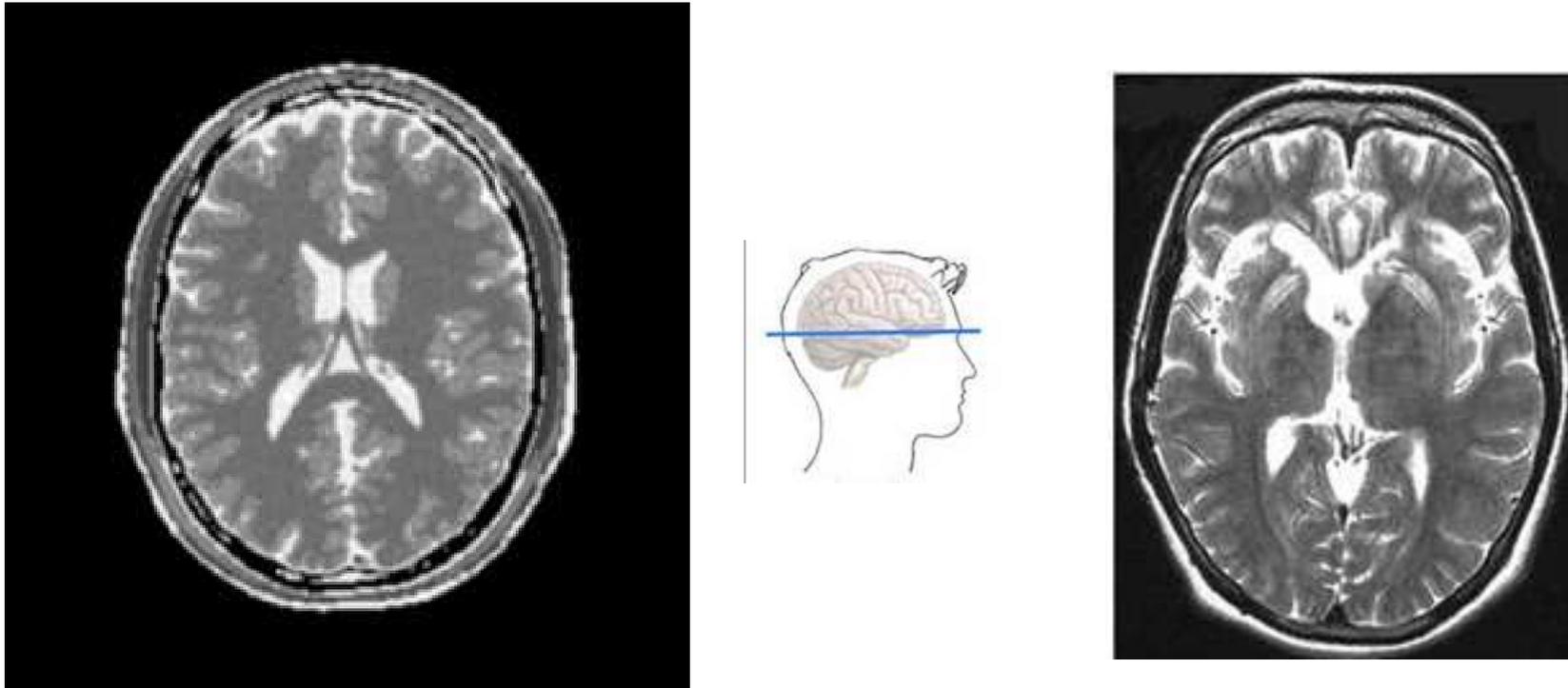


Image simulée 256x256 pixels (SE, B0=1.5 T, TE=100 ms, TR=2000 ms)

[G] H. Benoit-Cattin et coll. « The SIMRI project : A versatile and interactive MRI simulator », *Journal of Magnetic Resonance*, à paraître

[D] The Whole Brain Atlas, [www.med.harvard.edu/AANLIB](http://www.med.harvard.edu/AANLIB)

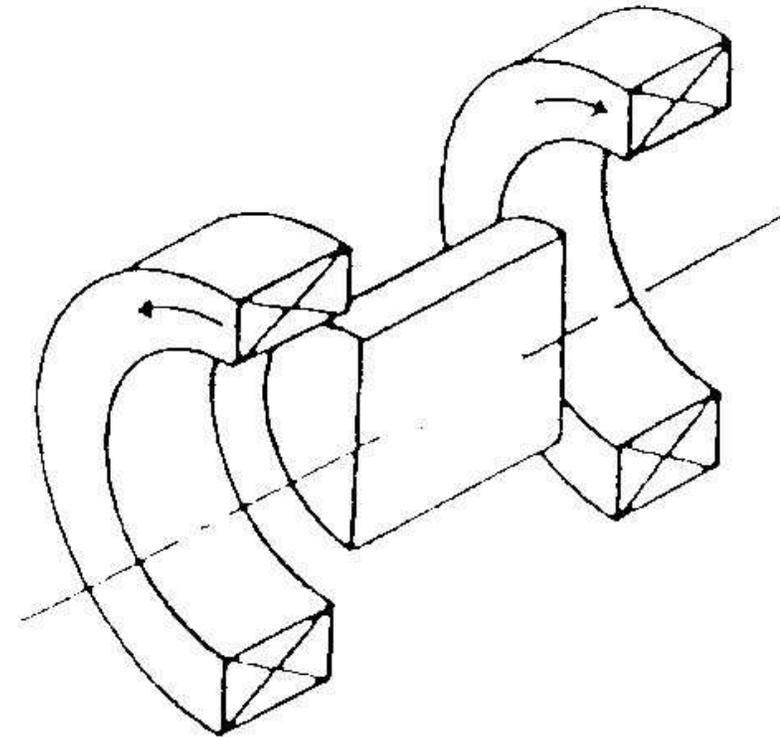
## Partie IV - ③ Champ créé par un électro-aimant

---

▷ Les courants dans les bobines sont de densité constante et de sens opposé.

▷ Propriété du noyau ferromagnétique :

- diamètre : 1 cm
- longueur : 3 cm
- perméabilité magnétique  $\mu = 10^3$



## Partie IV - ③ Champ créé par un électro-aimant

▷ Frontière artificielle  $\Gamma$  : sphère de rayon 4 cm.  
Maillage du domaine  $\Omega_\Gamma$  : 5840 éléments.

▷ Mise en œuvre numérique : avec MELINA  
(D. Martin, IRMAR)

▷ Sur Pentium III 700 Mhz bi-pro :  
- temps de calcul du potentiel magnétique : 136 s.  
- temps de calcul du champ en 570 points : 107 s.

