

Une méthode de couplage éléments finis - représentation intégrale en magnétostatique

Stéphane Balac^a, Gabriel Caloz^b

^a FOTON (UMR 6082), Université de Rennes 1, F-22305 Lannion

^b IRMAR (UMR 6625), Université de Rennes 1, F-35042 Rennes

stephane.balac@univ-rennes1.fr

Résumé—Nous présentons une méthode de calcul du champ magnétique engendré par un dispositif électromagnétique basée sur le couplage entre une méthode d'éléments finis et une formule de représentation intégrale. Le problème posé dans un domaine tridimensionnel non borné est formulé en introduisant le potentiel magnétique scalaire réduit (PMR). Une formule de représentation intégrale permet d'écrire un problème équivalent posé dans un domaine borné et celui-ci est résolu numériquement en utilisant une méthode classique d'éléments finis. Une fois le PMR calculé, la formule de représentation intégrale permet de calculer le champ magnétique en tout point de l'espace sans avoir besoin de recourir aux techniques de dérivation numérique.

I. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU COUPLAGE

NOUS nous intéressons au calcul numérique du champ magnétique \mathbf{H} engendré par un dispositif électromagnétique composé d'un corps Ω faiblement ferromagnétique de perméabilité magnétique μ constante et d'un inducteur Ω_s caractérisé par une densité de courant \mathbf{j} ; le problème est posé dans l'espace.

Le champ magnétique total \mathbf{H} s'écrit sous la forme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$ où \mathbf{H}_s , le champ généré par le courant source est calculé en utilisant les formules de Biot et Savart, et \mathbf{H}_m , le champ induit par le corps ferro-magnétique, satisfait $\mathbf{H}_m = -\nabla\varphi$ où le *potentiel magnétique réduit* (PMR) φ est donné par

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } \overline{\Omega}^c, \\ \mu \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Omega^c} = (\mu - 1) g & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec $g = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}$. Ce problème est posé dans un domaine non borné et le calcul du PMR se fait à l'aide d'un couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale; cette approche est fortement inspirée des travaux présentés dans [1]. Le domaine extérieur initialement non borné est borné par une frontière artificielle Γ qui peut être choisie très proche mais distincte de la frontière Σ du domaine Ω , voir la fig. 1.

La condition limite à imposer sur la frontière artificielle Γ est obtenue en utilisant la formule de représentation intégrale suivante pour le PMR

$$\begin{aligned} \forall y \notin \Sigma \quad \varphi(y) &= (\mu - 1) \int_{\Sigma} g(x) G(x, y) d\sigma_x \\ &\quad - (\mu - 1) \int_{\Sigma} \varphi(x) G_n(x, y) d\sigma_x. \end{aligned} \quad (2)$$

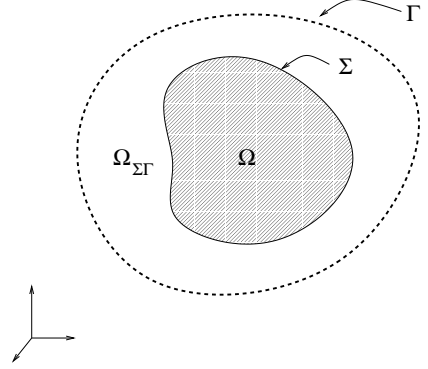


Fig. 1. Notations utilisées.

La formulation variationnelle du problème posé dans le nouveau domaine borné Ω_Γ délimité par la frontière artificielle Γ s'écrit : trouver $\varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$ tel que pour tout $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\omega + \int_{\Omega_{\Sigma\Gamma}} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, d\omega + \int_{\Gamma} \varphi \psi \, d\gamma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} \varphi(x) D^\Gamma G_n(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y \\ & = (\mu - 1) \int_{\Sigma} g \psi \, d\sigma \\ & + (\mu - 1) \int_{\Gamma} \psi(y) \left\{ \int_{\Sigma} g(x) D^\Gamma G(x, y) \, d\sigma_x \right\} d\gamma_y, \end{aligned} \quad (3)$$

où G représente le noyau de Green associé au Laplacien 3D, G_n sa dérivée normale sur Σ et D^Γ l'opérateur différentiel de bord sur Γ défini par $D^\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial n} + u$.

II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

La formulation variationnelle (3) est discrétisée par une approximation éléments finis standard [2]. Comme les deux frontières Γ et Σ sont distinctes, tous les intégrands apparaissant dans la formulation variationnelle (3) sont réguliers. La mise en œuvre numérique de la méthode est faite en utilisant la bibliothèque de calculs éléments finis MÉLINA [3]. Pour des éléments finis isoparamétriques de degré k , nous avons démontré que l'erreur de discrétisation a un comportement en $\mathcal{O}(h^k)$. Une fois le PMR calculé,

nous utilisons la formule intégrale :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y) = & \mathbf{H}_s(y) + (1 - \mu) \int_{\Sigma} g(x) \nabla_y G(x, y) d\sigma_x \\ & - (1 - \mu) \int_{\Sigma} \varphi(x) \nabla_y G_n(x, y) d\sigma_x, \end{aligned} \quad (4)$$

pour calculer le champ magnétique en un point $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$. Mentionnons que la formule (4) ne peut pas être utilisée en l'état : pour des valeurs de μ très supérieures à l'unité, les inévitables erreurs numériques lors du calcul du PMR conduisent à de très mauvais résultats lors du calcul de \mathbf{H} par la formule (4). Toutefois, l'utilisation d'un développement asymptotique du PMR en fonction de μ conduit, à partir de (4), à une formule intégrale permettant de calculer \mathbf{H} avec précision, voir [4].

III. UN EXEMPLE

On considère un électro-aimant constitué d'un noyau cylindrique Ω (diamètre 1.5 cm, longueur 4 cm) et d'inducteurs Ω_s (densité de courant de 1 A/mm²), voir la fig. 2. La perméabilité magnétique relative du matériau formant le noyau vaut $\mu = 10^3$. Le domaine de calcul Ω_{Γ} est délimité en introduisant une frontière artificielle Γ constitué par une sphère de rayon 3 cm puis un maillage de ce domaine, formé ici de 56160 tétraèdres, est réalisé, voir la fig. 3. Les valeurs du PMR calculées par la méthode de couplage éléments finis - formule intégrale sont représentées à la fig. 4. Le champ magnétique \mathbf{H} dans Ω calculé en utilisant la relation (4) modifiée est représenté à la fig. 5. Le calcul dans son ensemble sur un PC Pentium IV 3Ghz a nécessité 166 s.

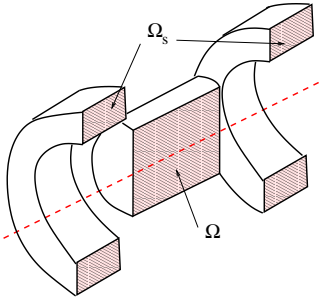


Fig. 2. Exemple considéré.

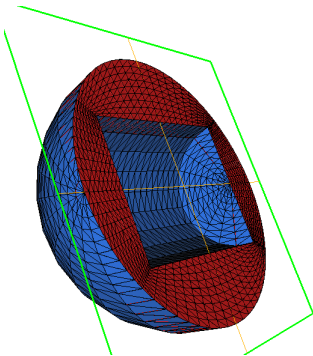


Fig. 3. Aperçu du maillage du domaine Ω_{Γ} utilisé.

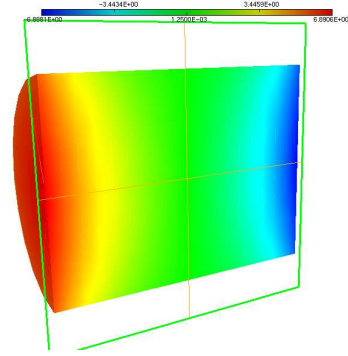


Fig. 4. Aperçu des isovaleurs du PMR dans le plan de coupe de la fig. 2.

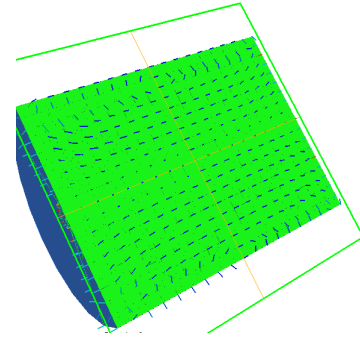


Fig. 5. Champ magnétique total \mathbf{H} dans le plan de coupe de la fig. 2.

IV. CONCLUSION

La méthode présentée ici réconcilie les avantages des éléments finis et des éléments frontières. Le comportement de la solution à l'infini est pris en compte de manière exacte sur la frontière artificielle. Cette méthode de calcul nous paraît bien adaptée à des problèmes d'optimisation de forme en électromagnétisme où le domaine d'intérêt est localisé, comme l'entrefer d'un électro-aimant. La frontière de couplage peut être choisie proche du dispositif de manière à réduire le domaine où utiliser la méthode d'éléments finis. Les valeurs du champ magnétique aux nœuds de la surface de contrôle peuvent être calculées par la formule intégrale (4) modifiée. Nous avons développé une méthode analogue en formulation axisymétrique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Lenoir, "Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance des vagues bidimensionnelles," Rapport de Recherche 164, ENSTA, Paris, mai 1982.
- [2] S. Balac and G. Caloz, "Magnetostatic field computations based on the coupling of finite element and integral representation methods," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, pp. 393–396, 2002.
- [3] D. Martin, "Documentation de la bibliothèque de calculs éléments finis mélima," <http://homepage.mac.com/danielmartin/melina>.
- [4] S. Balac and G. Caloz, "Cancellation errors in an integral for calculating magnetic field from reduced scalar potential," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, pp. 1997–2002, 2003.