UNE ALTERNATIVE AUX MÉTHODES DE SPLIT-STEP BASÉE SUR LA REPRÉSENTATION D'INTERACTION POUR RÉSOUDRE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER GÉNÉRALISÉE EN OPTIQUE

Stéphane Balac[1,3], **Arnaud Fernandez**[2], **Fabrice Mahé**[3]*

[1] *UMR FOTON, CNRS, Université de Rennes 1, Enssat, 22305, Lannion, France*
[2] *LAAS, CNRS, Université de Toulouse, BP 54200, 31031 Toulouse, France*
[3] *IRMAR, CNRS, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France*

stephane.balac@univ-rennes1.fr

RÉSUMÉ

L'équation non linéaire de Schrödinger généralisée (GNLSE) est largement utilisée pour modéliser la propagation d'une impulsion optique de largeur à mi-hauteur potentiellement inférieure à la picoseconde dans une fibre monomode. Celle-ci est le plus souvent résolue par un schéma de Split-Step symétrique. Nous présentons une méthode numérique alternative, aussi simple de mise en oeuvre informatique, mais beaucoup plus précise. Cette méthode dénommée en anglais « Interaction Picture Method » transforme par un changement d'inconnue adéquat la GNLSE en une équation aux dérivées partielles dont la résolution numérique est plus aisée. Nous présentons ici les caractéristiques de cette méthode et la comparons à la méthode de Split-Step symétrique.

MOTS-CLEFS : *Équation de Schrödinger généralisée ; Simulation numérique ; Split-Step.*

1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équation non linéaire de Schrödinger généralisée (GNLSE) pouvant décrire sous certaines hypothèses la propagation d'impulsions optiques de largeur proche ou inférieure à 1 ps dans une fibre optique et qui s'écrit [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}A(z,t) = -\frac{\alpha(z)}{2}A(z,t) + \left(\sum_{n=2}^{N} \mathrm{i}^{n+1}\frac{\beta_n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}A(z,t)\right) \\ + \mathrm{i}\gamma\left[1+\frac{\mathrm{i}}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\right]\cdot\left(A(z,t)\left((1-f_R)\left|A(z,t)\right|^2 + f_R\int_{\mathbb{R}} h_R(s)\left|A(z,t-s)\right|^2\,\mathrm{d}s\right)\right),\end{aligned} \tag{1}$$

où la fonction à valeurs complexes A représente l'enveloppe lentement variable de l'onde optique, supposée quasi-monochromatique de pulsation ω_0, considérée dans un repère mobile se déplaçant avec l'enveloppe de l'impulsion à la vitesse de groupe. La variable $z \in [0,L]$ où L désigne la longueur de la fibre représente la position le long de la fibre et $t \in \mathbb{R}$ le temps dans le repère mobile. Les paramètres physiques intervenant dans l'équation (1) sont : le coefficient de pertes linéiques α, les coefficients de dispersion linéaire $\beta_n, 2 \leq n \leq N$, le paramètre non linéaire γ représentant l'effet Kerr optique, le terme de choc optique simplifié $1/\omega_0$, la fonction réponse Raman h_R et la contribution f_R de cette réponse à la polarisation non linéaire. À l'équation aux dérivées partielles (1) est associée une donnée initiale a_0 correspondant à la forme prise au cours du temps par la fonction A à l'entrée de la fibre.

La méthode la plus couramment utilisée pour résoudre l'équation (1) est la méthode de Split-Step symétrique (« Symmetric Split-Step Fourier (SSF) method » en anglais) en raison notamment de sa simplicité de mise en œuvre numérique et de son efficacité. En 2007, J. Hult [2] utilisa une nouvelle approche pour résoudre la GNLSE exploitant une méthode développée dans les années 90 au Jack Dodd Center

*Ordre alphabétique des auteurs.

de l'université d'Otago (N.Z.) pour résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii dans le cadre de l'étude des condensats de Bose-Einstein [3]. Cette méthode a été baptisée « Interaction Picture method »(IP) car elle exploite un changement d'inconnue inspiré de la *représentation d'interaction* (dite aussi de Dirac) en mécanique quantique. D'un point de vue pratique, tout comme la méthode de Split-Step symétrique, la méthode IP appliquée à la GNLSE conduit elle aussi à considérer sur chaque sous-intervalle d'une subdivision donnée de l'intervalle $[0,L]$ une succession de 3 problèmes couplés entre eux. Toutefois, l'énorme avantage de la méthode IP sur la méthode SSF est qu'elle n'introduit aucune erreur de type erreur de splitting : la décomposition est exacte. Pour la méthode IP, résoudre cette succession de 3 problèmes sur chaque sous-intervalle est équivalent à résoudre la GNLSE (1) sur ce même sous-intervalle. Il en résulte un gain au niveau de la précision des résultats obtenus, ou dit autrement, à précision égale la méthode IP fournit en général une approximation en un temps de calcul bien inférieur à la méthode SSF.

2. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE IP

Soit $\mathscr{D}$ l'opérateur linéaire non borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ défini par $\mathscr{D} : A \longmapsto -\dfrac{\alpha}{2}u + \sum\limits_{n=2}^{N} \mathrm{i}^{n+1}\dfrac{\beta_n}{n!}\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}A$ et $\mathscr{N}$ l'opérateur non linéaire non borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ défini par

$$\mathscr{N} : A \longmapsto \mathrm{i}\gamma\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[(1-f_R)A|A|^2 + f_R A\int_{-\infty}^{+\infty} h_R(s)|A(\cdot - s)|^2\,\mathrm{d}s\right].$$

Avec ce formalisme, la GNLSE s'écrit $\frac{\partial}{\partial z}A(z) = \mathscr{D}A(z) + \mathscr{N}(A)(z)$, $\forall z \in [0,L]$. On considère une subdivision $(z_k)_{k=0,\dots,K}$ de l'intervalle $[0,L]$ et on note $z_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(z_k + z_{k+1})$. Résoudre (1) sous la condition initiale $A(z=0) = a_0$ revient à résoudre pour tout $k \in \{0,\dots,K-1\}$ la suite de problèmes auxiliaires

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k(z) = \mathscr{D}A_k(z) + \mathscr{N}(A_k)(z) \quad \forall z \in [z_k, z_{k+1}], \qquad A_k(z_k) = a_k, \tag{2}$$

où a_k est une fonction de la variable t donnée. On introduit pour nouvelle inconnue la fonction A_k^{ip} définie pour $(z,t) \in [z_k, z_{k+1}] \times \mathbb{R}$ par

$$A_k^{\mathrm{ip}}(z,t) = \exp(-(z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})A_k(z,t) \tag{3}$$

où la notation $\exp(z\mathscr{D})$ fait référence au groupe unitaire engendré par l'opérateur $\mathscr{D}$. On montre que A_k^{ip} est solution du problème

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k^{\mathrm{ip}}(z) = \mathscr{G}_k(z, A_k^{\mathrm{ip}}(z)) \quad \forall z \in [z_k, z_{k+1}], \qquad A_k^{\mathrm{ip}}(z_k) = \exp(-(z_k - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})a_k, \tag{4}$$

où $\mathscr{G}_k$ est défini par $\mathscr{G}_k(z, A_k^{\mathrm{ip}}(z)) = \exp(-(z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})\left[\mathscr{N}\left(\exp((z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})A_k^{\mathrm{ip}}(z)\right)\right]$. Par inversion de la relation (3), on obtient $A_k(z_{k+1},t) = \exp(-(z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})A_k^{\mathrm{ip}}(z_{k+1},t)$. L'intérêt de ce changement d'inconnue est que contrairement au problème initial (1), le nouveau problème (4) pour l'inconnue A_k^{ip} ne fait plus intervenir explicitement de dérivées partielles relativement au temps t. On est ramené à résoudre une simple équation différentielle non linéaire où t joue le rôle d'un paramètre. La dérivation par rapport à t est prise en compte à travers les opérateurs $\exp(\pm(z - z_{k+\frac{1}{2}})\mathscr{D})$. Le problème (4) peut être résolu numériquement en utilisant par exemple un schéma de Runge-Kutta. Procéder ainsi revient à résoudre sur chacun des intervalles $[z_k, z_{k+1}]$ les 3 problèmes couplés suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k^{+}(z) = \mathscr{D}A_k^{+}(z) \quad \forall z \in [z_k, z_{k+\frac{1}{2}}], \qquad A_k^{+}(z_k) = A_{k-1}(z_k), \tag{5}$$

où $A_{k-1}(z_k)$ représente la solution de (2) au nœud z_k calculé au pas $k-1$;

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k^{\mathrm{ip}}(z) = \mathscr{G}_k(z, A_k^{\mathrm{ip}}(z)) \quad \forall z \in [z_k, z_{k+1}], \qquad A_k^{\mathrm{ip}}(z_k,t) = A_k^{+}(z_{k+\frac{1}{2}}), \tag{6}$$

où $A_k^+(z_{k+\frac{1}{2}}) = \exp(\frac{h}{2}\mathscr{D})A_{k-1}(z_k)$ est la solution de (5) au nœud $z_{k+\frac{1}{2}}$;

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k^-(z) = \mathscr{D}A_k^-(z) \quad \forall z \in [z_{k+\frac{1}{2}}, z_{k+1}], \qquad A_k^-(z_{k+\frac{1}{2}}) = A_k^{\mathrm{ip}}(z_{k+1}), \tag{7}$$

où $A_k^{\mathrm{ip}}(z_{k+1})$ est la solution de (6) au nœud z_{k+1}. Et finalement la solution de (1) au nœud z_{k+1} est donnée par $A_k(z_{k+1}) = A_k^-(z_{k+1})$. Notons que l'utilisation de la méthode de Split-Step symétrique conduit à une formulation très similaire : on retrouve les mêmes problèmes linéaires (5) et (7) (qui sont résolus par transformée de Fourier) et pour le problème non linéaire (6), l'opérateur $\mathscr{G}_k$ est remplacé par l'opérateur $\mathscr{N}$. Dans les 2 cas, on résout ce problème non linéaire par la méthode usuelle de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Un code mettant en œuvre la méthode SSF peut donc être facilement modifié pour utiliser la méthode IP. La différence essentielle entre les 2 méthodes est que la méthode SSF induit une *erreur de splitting* (d'ordre 2) alors que la décomposition obtenue par la méthode IP est exacte ; on gagne donc en précision pour un coût inchangé.

3. Comparaison des méthodes IP et SSF

Les méthodes IP et SSF avec schéma RK4 ont été comparées entre-elles sur des cas tests en optique dans [2]. L'analyse mathématique de la méthode IP et sa comparaison théorique à la méthode SSF est proposée dans [4]. Nous reprenons ici un exemple correspondant à la propagation d'une impulsion gaussienne de 5 mW dans une fibre de 20km pour les paramètres suivants : $\alpha = 0.046\,\mathrm{km}^{-1}$, $\gamma = 4.3\,\mathrm{W}^{-1}\mathrm{km}^{-1}$, $f_R = 0.245$, $\beta_2 = -19.83\,\mathrm{ps}^2\mathrm{km}^{-1}$, $\beta_3 = 0.031\,\mathrm{ps}^3\mathrm{km}^{-1}$ et $\beta_n = 0$ for $n \geq 4$. Nous donnons dans le tableau suivant les temps de calcul et l'erreur quadratique relative $\|A(L) - A_{K-1}(L)\|_{\mathbb{L}^2} / \|A(L)\|_{\mathbb{L}^2}$ en sortie de fibre pour les 2 méthodes. Le gain en précision apporté par la méthode RK4-IP par rapport à la méthode SSF-RK4 est appréciable. Dit autrement, à précision identique ($\sim 1.5\,10^{-9}$ ici) en utilisant la méthode RK4-IP, on gagne en temps de calcul (d'un facteur 50 ici).

Method	pas (m)	temps CPU (s)	erreur quadratique relative
RK4-IP	100	1.42	$1.4957\,10^{-9}$
SSF-RK4	100	1.48	$2.5582\,10^{-6}$
RK4-IP	10	13.85	$4.6192\,10^{-13}$
SSF-RK4	10	14.49	$2.555\,10^{-8}$
SSF-RK4	2.5	70.17	$1.5968\,10^{-9}$

Mentionnons pour conclure qu'une version de la méthode IP incluant une stratégie de pas adaptatif est proposée dans [5]. Elle permet sans aucun surcoût d'adapter le pas de la subdivision à une tolérance fixée par l'utilisateur pour gagner encore en performance. Un programme mettant en œuvre cette méthode est disponible au téléchargement (sous licence CNRS Cecill) : `http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.balac/spip`. La méthode IP peut par ailleurs être utilisée pour résoudre d'autres équations aux dérivées partielles en optique comme l'équation HME (« Haus mode-locking equation »).

Références

[1] G. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, 4th ed. Academic Press, 2006.

[2] J. Hult, "A fourth-order Runge–Kutta in the Interaction Picture method for simulating supercontinuum generation in optical fibers," *J. Lightwave Technol.*, vol. 25, no. 12, pp. 3770–3775, 2007.

[3] B. M. Caradoc-Davies, R. J. Ballagh, and P. B. Blakie, "Three-dimensional vortex dynamics in Bose-Einstein condensates," *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 011602, 2000.

[4] S. Balac, A. Fernandez, F. Mahé, F. Méhats, and R. Texier-Picard, "The Interaction Picture method for solving the nonlinear Schrödinger equation in optics," *soumis pour publication* [hal.archives-ouvertes.fr/hal-00850518], 2015.

[5] S. Balac and F. Mahé, "Embedded Runge-Kutta scheme for step-size control in the Interaction Picture method," *Comput. Phys. Commun.* [hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797190], vol. 184, pp. 1211–1219, 2013.