

Simulation numérique des artefacts de susceptibilité magnétique en IRM dans le cas d'une géométrie cylindrique

Stéphane Balac
Laboratoire de Mathématiques Appliquées (MAPLY),
INSA de Lyon, 69621 Villeurbanne, France.
E-mail: Stephane.Balac@insa-lyon.fr

mars 2001

Résumé

Nous présentons un programme `MATLAB` permettant de simuler les artefacts de susceptibilité magnétique générés, dans le cadre d'une expérience IRM, par un échantillon biologique ayant la forme d'un cylindre creux de grande longueur. Cette situation correspond par exemple à une modélisation simplifiée d'un os entouré de tissus biologiques aux propriétés magnétiques uniformes, ou d'une broche orthopédique métallique.

1 Introduction

On considère un échantillon biologique formé de deux milieux aux propriétés magnétiques différentes ayant une forme cylindrique de grande longueur. Par exemple, cette situation peut représenter de manière simplifiée un os de forme cylindre à l'intérieur de tissus biologiques eux-mêmes de forme cylindrique, le tout pouvant représenter un bras ou une jambe. Cette situation peut également représenter une broche orthopédique métallique à l'intérieur d'un os ou de tissus.

Dans le cadre d'une expérience IRM, d'importantes variations des propriétés magnétiques entre les milieux biologiques sont responsables d'une déformation de l'image appelée artefact de susceptibilité magnétique, voir [1], [2]. Lorsque l'échantillon biologique est soumis au champ magnétique principal de l'imageur IRM \mathbf{B}_0 , les fortes variations de propriétés magnétiques des milieux sont à l'origine d'un champ magnétique induit. Ce champ magnétique perturbateur, bien que très faible est suffisamment important pour perturber l'action des gradients de champ magnétique utilisés pour le codage de l'image. C'est là l'origine de l'artefact.

Dans ce document nous présentons un programme `MATLAB` permettant de simuler numériquement cette déformation de l'image dans le cas d'un échantillon biologique de géométrie simple (un cylindre creux de longueur infinie). L'intérêt d'un tel programme est avant tout didactique; l'hypothèse sur la géométrie du domaine est très restrictive. Elle est néanmoins essentielle ici : pour des géométries plus compliquées, il est impossible d'obtenir une expression explicite du champ magnétique perturbateur et la simulation numérique nécessite des codes de calcul élaborés. Nous négligeons dans cette étude les perturbations possibles du champ radio-fréquence \mathbf{B}_1 . La simulation numérique de l'artefact nécessite dans un premier temps de calculer le champ magnétique induit, à l'origine de la perturbation des gradients. La deuxième partie de l'étude consiste à déterminer comment cette perturbation des gradients se traduit par une perturbation du signal et de l'image IRM.

On désigne par Ω_1 le domaine cylindrique intérieur, par Ω_2 le domaine cylindrique extérieur et par Ω_0 le milieu extérieur supposé être le vide, voir la figure 1. On désigne par Σ_1 la frontière du domaine Ω_1 et par Σ_2 la frontière extérieure séparant les domaines Ω_2 et Ω_0 .

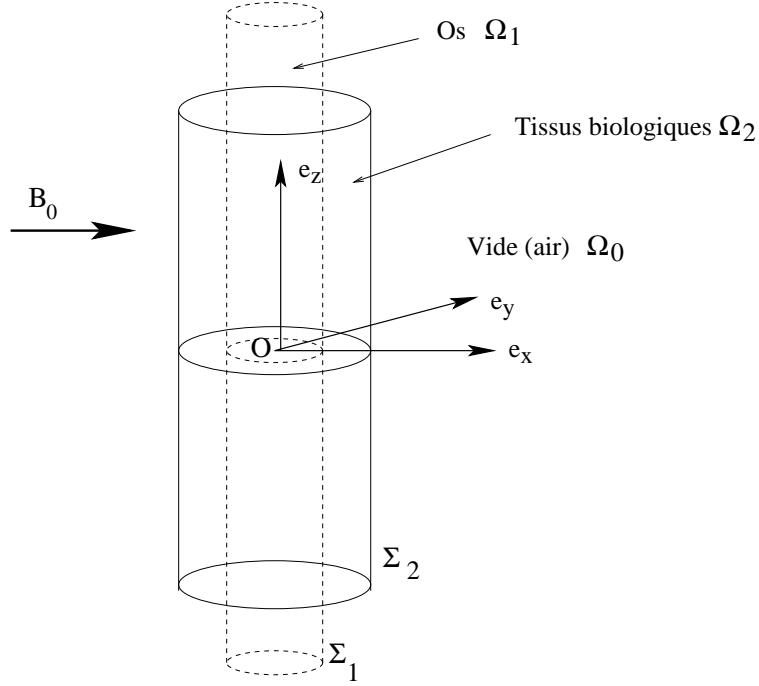


FIG. 1 – Situation envisagée.

2 Étude du problème de magnétostatique

2.1 Le problème de magnétostatique

Le calcul du champ magnétique perturbateur passe par la résolution des équations de la magnétostatique. Soit \mathbf{B} le vecteur induction magnétique totale et \mathbf{H} le champ magnétique total. Les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} sont régis par les équations de la magnétostatique,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1)$$

Loin des milieux magnétiques, les champs sont homogènes ; on a

$$\lim_{|(x,y,z)| \rightarrow \infty} \mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}_0. \quad (2)$$

Dans le domaine extérieur Ω_0 , les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} sont liés par la relation

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad (3)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On note $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0$.

On suppose que les 2 milieux Ω_1 et Ω_2 sont des milieux diamagnétiques ou paramagnétiques. Les champs \mathbf{H} et \mathbf{B} sont alors liés une loi de comportement de la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}, \quad (4)$$

où μ est une constante appelée perméabilité magnétique relative du milieu. On a $\mu = 1 + \chi_m$ où χ_m est la susceptibilité magnétique du milieu.

Le champ magnétique total \mathbf{H} est la somme du champ inducteur \mathbf{H}_0 et du champ induit \mathbf{H}_m . On s'intéresse au calcul du champ induit $\mathbf{H}_m = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$. En prenant le champ \mathbf{H}_m pour inconnue et compte tenu des lois de comportement, le problème (1) s'écrit,

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_m = 0 & \text{dans } \Omega_0, \Omega_1 \text{ et } \Omega_2, \\ [\mu \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{n}] = -[\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}] & \text{à travers } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2, \end{cases} \quad (5)$$

où $[\]$ désigne le saut de la quantité entre les crochets à travers la surface considérée et \mathbf{n} désigne la normale extérieure à la dite surface.

D'un point de vue calculatoire, il est intéressant d'introduire un potentiel scalaire comme inconnue. Le champ \mathbf{H}_m vérifiant $\operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^3 , on en déduit qu'il existe une unique fonction scalaire ϕ dans l'espace de Sobolev

$$\mathbb{W}_0^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ \psi ; \frac{\psi}{\sqrt{1 + |(x, y, z)|^2}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad \nabla \psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)^3 \right\},$$

telle que

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \phi. \quad (6)$$

La fonction ϕ est appelée potentiel magnétique scalaire *réduit*. Le potentiel magnétique ϕ est solution de

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_0, \Omega_1 \text{ et } \Omega_2, \\ \left[\mu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right] = [\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}] & \text{à travers } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2. \end{cases} \quad (7)$$

Le potentiel magnétique est continu dans tout l'espace; on a donc

$$\begin{cases} [\phi] = 0 & \text{à travers } \Sigma_1, \\ [\phi] = 0 & \text{à travers } \Sigma_2. \end{cases} \quad (8)$$

De plus,

$$\lim_{|(x, y, z)| \rightarrow +\infty} \phi(x, y, z) = 0. \quad (9)$$

Le champ \mathbf{H}_0 vérifie $\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0$ dans \mathbb{R}^3 ; on a par conséquent $[\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}] = 0$ à travers Σ_1 et Σ_2 . Les conditions d'interface peuvent donc aussi s'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_0} - \mu_2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2} = (1 - \mu_2) \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{à travers } \Sigma_2, \quad (10)$$

$$\mu_2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_2} - \mu_1 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_1} = (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{à travers } \Sigma_1, \quad (11)$$

où $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_i}$ désigne la trace de la dérivée normale du potentiel issu du domaine Ω_i sur la frontière de ce domaine.

On obtient donc l'expression du champ magnétique perturbateur \mathbf{H}_m par la relation (6) une fois que l'expression du potentiel magnétique ϕ est déterminée par la résolution du problème aux dérivées partielles (7). Le problème (7) n'admet pas de solution explicitement calculable dans le cas où les domaines sont de géométries quelconques. La forme géométrique envisagée ici correspond à l'un des rares cas où il est possible de calculer explicitement le potentiel magnétique ϕ .

2.2 Hypothèses simplificatrices

Nous supposons que l'échantillon considéré a la forme d'un cylindre creux de longueur «infinie». Nous notons R_1 le rayon du cylindre intérieur et R_2 le rayon du cylindre extérieur, voir la figure 3. Nous supposons par ailleurs que le champ principal \mathbf{B}_0 de l'imager IRM est dirigé perpendiculairement par rapport à l'axe du cylindre. Nous considérons par ailleurs un repère orthonormé $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ dont le vecteur \mathbf{e}_z est selon l'axe du cylindre et dont l'origine est un point quelconque de l'axe du cylindre. Le vecteur \mathbf{e}_x est choisi colinéaire au champ principal \mathbf{B}_0 .

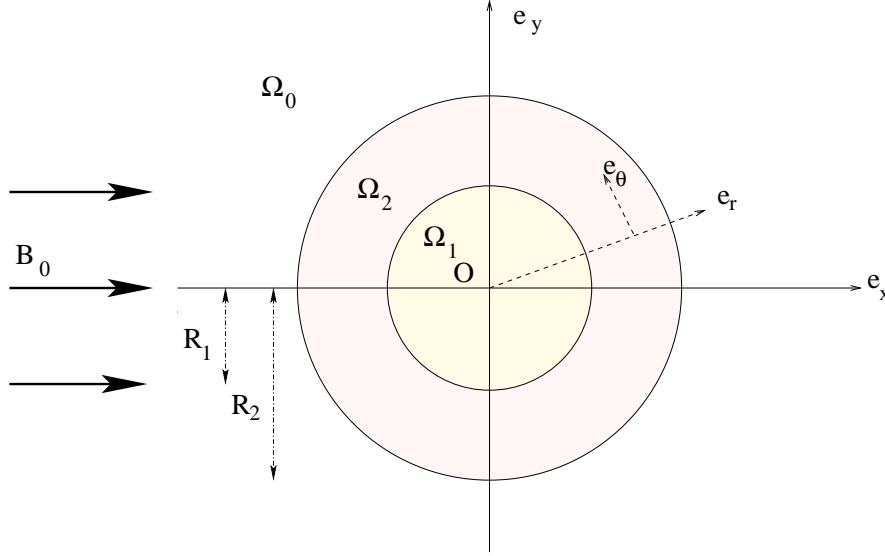


FIG. 2 – Trace des domaines dans le plan transverse.

Compte-tenu de la géométrie considérée et du fait que le champ principal \mathbf{B}_0 est constant, le potentiel magnétique ϕ ne dépend pas de la coordonnée z selon \mathbf{e}_z . Par ailleurs, il est naturel d'exprimer le potentiel magnétique dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ des coordonnées cylindriques. Autrement dit, nous avons $\phi(x, y, z) = \hat{\phi}(r, \theta)$ où ϕ et $\hat{\phi}$ sont liées par la relation

$$\hat{\phi}(r, \theta) = \phi(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (12)$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Nous introduisons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_1 &= [0, R_1[\times]0, 2\pi[, \\ \hat{\Omega}_2 &=]R_1, R_2[\times]0, 2\pi[, \\ \hat{\Omega}_1 &= [R_2, +\infty[\times]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Ces domaines correspondent à la description dans la base des coordonnées cylindriques de la trace dans le plan transverse des domaines Ω_1, Ω_2 et Ω_0 .

Dans la base des coordonnées cylindriques, le problème (7) s'écrit,

trouver $\widehat{\phi}(r, \theta)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} \right) (r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial \theta^2} (r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \widehat{\Omega}_1, \widehat{\Omega}_2 \text{ et } \widehat{\Omega}_0, \\ \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} \Big|_{\widehat{\Omega}_0} (R_2, \theta) - \mu_2 \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} \Big|_{\widehat{\Omega}_2} (R_2, \theta) = (1 - \mu_2) H_0 \cos \theta \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[, \\ \mu_2 \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} \Big|_{\widehat{\Omega}_0} (R_1, \theta) - \mu_1 \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} \Big|_{\widehat{\Omega}_2} (R_1, \theta) = (\mu_2 - \mu_1) H_0 \cos \theta \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[. \end{array} \right. \quad (13)$$

On a également les relations suivantes qui se déduisent des relation (8) et (9),

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\phi}(R_1, \theta) \Big|_{\widehat{\Omega}_1} = \widehat{\phi}(R_1, \theta) \Big|_{\widehat{\Omega}_2} \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[, \\ \widehat{\phi}(R_2, \theta) \Big|_{\widehat{\Omega}_2} = \widehat{\phi}(R_2, \theta) \Big|_{\widehat{\Omega}_0} \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[, \end{array} \right. \quad (14)$$

et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \widehat{\phi}(r, \theta) = 0. \quad (15)$$

Il nous faut enfin imposer des conditions de compatibilité liées aux symétries du domaine,

$$\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \theta} (r, 0) = 0 \quad \text{pour tout } r \in]0, +\infty[, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial \theta} (r, 2\pi) = 0 \quad \text{pour tout } r \in]0, +\infty[, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} (0, \theta) = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[. \quad (18)$$

2.3 Résolution du problème de magnétostatique

Compte tenu des symétries du problème considéré, on recherche une solution à variables séparées du problème (13) sous la forme $\widehat{\phi}(r, \theta) = R(r)T(\theta)$. L'équation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial r} (r, \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial \theta^2} (r, \theta) = 0$$

permet d'établir par cette méthode que, dans chaque domaine, la solution est de la forme

$$\widehat{\phi}(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

où pour tout entier n on désigne par A_n, B_n, C_n et D_n des constantes réelles¹. Les relations (13) à (18) permettent de calculer les valeurs de ces constantes. On trouve finalement que le potentiel magnétique s'exprime en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\widehat{\phi}(r, \theta) = \alpha r \cos \theta \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (19)$$

$$\widehat{\phi}(r, \theta) = \gamma r \cos \theta + \frac{\delta}{r} \cos \theta \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (20)$$

$$\widehat{\phi}(r, \theta) = \frac{\beta}{r} \cos \theta \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (21)$$

¹Ce calcul long et pénible est omis ici.

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont 4 constantes définies par

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2H_0 R_1^2 R_2^2 (\mu_2 - \mu_1)}{R_1^2 (\mu_2^2 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_1 \mu_2) - R_2^2 (\mu_2 + \mu_1 + \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2)}, \\ \gamma &= \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left((\mu_2 - \mu_1) H_0 + \frac{\delta}{R_1^2} (\mu_2 + \mu_1) \right), \\ \beta &= \gamma R_2^2 + \delta, \\ \alpha &= \gamma + \frac{\delta}{R_1^2}.\end{aligned}$$

On obtient alors pour expression du champ magnétique induit \mathbf{H}_m ,

$$\text{dans } \Omega_1 : \quad \mathbf{H}_m = -\alpha \cos \theta \mathbf{e}_r + A_1 \sin \theta \mathbf{e}_\theta = -\alpha \mathbf{e}_x, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\text{dans } \Omega_2 : \quad \mathbf{H}_m &= \left(-\gamma + \frac{\delta}{r^2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r + \left(\gamma + \frac{\delta}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ &= \left(\delta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \gamma \right) \mathbf{e}_x + 2\delta \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{e}_y,\end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\text{dans } \Omega_3 : \quad \mathbf{H}_m &= \frac{\beta}{r^2} \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{\beta}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ &= \beta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{e}_x + 2\beta \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{e}_y.\end{aligned} \quad (24)$$

Disposant de l'expression du champ magnétique perturbateur \mathbf{H}_m , il est possible de déterminer de quelle manière le processus d'acquisition de l'image IRM est perturbé et de simuler numériquement l'artefact engendré.

3 Simulation des artefacts

3.1 Algorithme de simulation

La situation envisagée est la suivante. On cherche à réaliser l'image d'une coupe de l'échantillon d'épaisseur e_c , perpendiculairement à l'axe du cylindre, à l'aide d'une séquence Spin-Écho. Compte tenu des inhomogénéités de champ magnétique, le processus d'acquisition de l'image est perturbé. Nous renvoyons à [3] pour une modélisation mathématique complète du phénomène. Nous nous contentons ici d'appliquer à notre situation particulière ces résultats.

On note H' la composante du champ perturbateur \mathbf{H}_m selon la direction du champ principal \mathbf{H}_0 . On a

$$\text{dans } \Omega_1 : \quad H' = -\alpha, \quad (25)$$

$$\text{dans } \Omega_2 : \quad H' = -\gamma + \frac{\delta}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (26)$$

$$\text{dans } \Omega_3 : \quad H' = \beta \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (27)$$

On note aussi $B' = \mu H'$ où μ désigne la perméabilité magnétique relative du milieu considéré.

On a

$$B' = a + \frac{b}{r^2} \left(\frac{2x^2}{r^2} - 1 \right) \quad (28)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

$$\begin{cases} (a, b) = (-\mu_1 \alpha, 0) & \text{dans } \Omega_1, \\ (a, b) = (-\mu_2 \gamma, \mu_2 \delta) & \text{dans } \Omega_2, \\ (a, b) = (0, \beta) & \text{dans } \Omega_0. \end{cases} \quad (29)$$

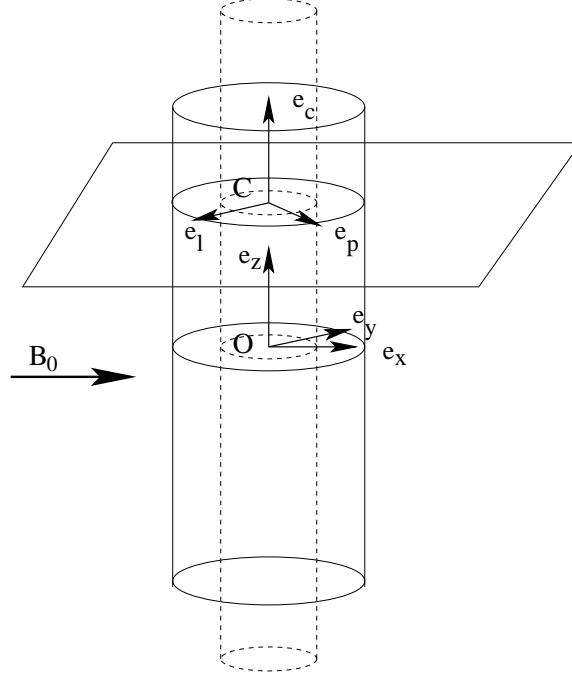


FIG. 3 – Position du plan de coupe.

On se place dans le repère $(C, \mathbf{n}_l, \mathbf{n}_p, \mathbf{n}_c)$ lié au plan de coupe, voir la figure 3. Les vecteurs $\mathbf{n}_l, \mathbf{n}_p$ et \mathbf{n}_c sont respectivement les directions des gradients de lecture, de phase et de coupe. On suppose que $\mathbf{n}_c = \mathbf{e}_z$ (on s'intéresse à une coupe perpendiculaire à l'axe du cylindre). On désigne par (x_l, x_p, x_c) les coordonnées du point courant dans ce repère. On note $(\ell_x, \ell_y, 0)$ les composantes du vecteur \mathbf{n}_l dans la base cartésienne $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et $(p_x, p_y, 0)$ celles du vecteur \mathbf{n}_p .

Rappelons les résultats présentés dans [3] qui permettent de calculer l'intensité T de l'image au point (pixel) (τ_1, τ_2) lorsque le processus d'acquisition d'une image IRM est perturbé par un champ magnétique parasite. En raison de l'épaisseur de coupe non nulle, l'ensemble des plans de cote ζ avec $\zeta \in [-\frac{\epsilon_c}{2}, \frac{\epsilon_c}{2}]$ se superposent sur l'image. Nous avons

$$T(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\frac{\epsilon_c}{2}}^{\frac{\epsilon_c}{2}} A(\tau_1, \tau_2, \zeta) d\zeta. \quad (30)$$

Compte tenu de la perturbation des différents gradients de champ magnétique, l'intensité au point (τ_1, τ_2, ζ) résulte de la mise en résonance des noyaux situés au(x) point(s) (x_l, x_p, x_c) vérifiant

$$\begin{cases} x_l + \frac{B'(x_r, x_p, x_s)}{g_l} = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'(x_r, x_p, x_s)}{g_c} = \zeta. \end{cases} \quad (31)$$

Une fois ce(s) point(s) déterminé(s), leur contribution à l'intensité de l'image est donnée par

$$A(\tau_1, \tau_2, \zeta) = \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'(x_r, x_p, x_s)\right|} I(x_l, x_p, x_c). \quad (32)$$

Une étape essentielle pour la mise en œuvre de l'algorithme de simulation consiste, étant donné un point (τ_1, τ_2, ζ) de l'image, à déterminer le(s) point(s) (x_l, x_p, x_c) de l'échantillon qui est (sont) reproduit(s) en ce point. Le système (31) s'écrit encore, par simple combinaison de la première et de la dernière équation,

$$\begin{cases} x_l + \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \\ x_c + \frac{B'(x_r, x_p, x_s)}{g_c} = \zeta. \end{cases} \quad (33)$$

Nous sommes alors amenés à trouver x_c solution de

$$x_c + \frac{B'_z(x_l, x_p, x_c)}{g_c} = \zeta \quad (34)$$

où

$$\begin{cases} x_l + \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) = \tau_1, \\ x_p = \tau_2, \end{cases} \quad (35)$$

les paramètres g_l, g_p, τ_1, τ_2 et ζ étant fixés. L'expression de la perturbation B' en fonction des coordonnées liées au plan de coupe, est

$$B'(x_l, x_p, x_c) = a + \frac{b}{r^2} \left(\frac{2(\ell_x x_l + p_x x_p)^2}{r^2} - 1 \right) \quad (36)$$

où $r = \sqrt{x_l^2 + x_p^2}$. Résoudre (34) revient donc à résoudre l'équation

$$(x_c - \zeta) + \frac{1}{g_c} \left(a + \frac{b}{r^2} \left(\frac{2(\ell_x x_l + p_x x_p)^2}{r^2} - 1 \right) \right) = 0 \quad (37)$$

avec $x_l = \tau_1 - \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c)$ et $x_p = \tau_2$, c'est-à-dire à déterminer les solutions x_c de l'équation

$$g_c r^4 (x_c - \zeta) + a r^4 + 2b \left(\ell_x \left(\tau_1 - \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) \right) + p_x \tau_2 \right)^2 - b r^2 = 0 \quad (38)$$

où $r = \sqrt{\left(\tau_1 - \frac{g_c}{g_l}(\zeta - x_c) \right)^2 + \tau_2^2}$. On est finalement conduit à calculer les racines réelles d'un polynôme de degré 5 en l'indéterminée x_c . On obtient alors x_l et x_p par (35) et l'intensité de l'image associée au pixel (τ_1, τ_2) est obtenue par (32) et (30).

3.2 Distorsions de l'image IRM

Rappelons les différents types de distorsions de l'image mis en jeu dans la création de l'artefact. Ces distorsions sont mis en évidence graphiquement par le programme MATLAB que nous avons écrit.

Distorsions géométriques

(a) – La troisième équation du système (33) nous montre que la présence d'un champ magnétique perturbateur entraîne un écart dans la direction du gradient de coupe entre le point P reproduit et sa position supposée. Le plan de coupe sélectionné est déformé : les noyaux mis en résonance ne sont pas nécessairement ceux de la coupe choisie.

(b) – La première et la deuxième équation du système (33) nous permettent d'appréhender la manière dont la perturbation du codage par la phase et par la fréquence se traduit en définitive sur l'image. En l'absence de perturbation du champ magnétique, un point P de coordonnées (x_l, x_p, x_c) dans le repère associé au plan de coupe est représenté sur l'image (au changement d'échelle près) à la position $(\tau_1 = x_l, \tau_2 = x_p)$. Si un champ magnétique perturbateur existe pendant la période de codage de l'image, ce point P va être représenté sur l'image à la position

$$(\tau_1 = x_l + \frac{B'(x_r, x_p, x_s)}{g_l}, \tau_2 = x_p). \quad (39)$$

Les modifications liées à la perturbation du codage en fréquence se traduisent par un déplacement selon la direction du gradient de lecture de la position sur l'image du point P reproduit. Ces perturbations sont à l'origine d'une déformation des contours de l'objet selon la direction du gradient de lecture, dont l'importance est inversement proportionnelle à l'intensité de ce gradient.

Distorsions d'intensité

La relation (32) met en évidence des perturbations de l'intensité de l'image.

(a) – Ces perturbations sont liées pour une part à la déformation du plan de coupe (terme $I(x_l, x_p, x_c)$). Deux situations peuvent avoir lieu :

- s'il existe plusieurs solutions au système (33), plusieurs points de l'objet sont associés à un même point image (τ_1, τ_2, ζ) ; il y a alors apparition d'un hypersignal ;
- si le système (33) n'admet pas de solution, il n'y a pas de points de l'objet à correspondre au point image (τ_1, τ_2, ζ) ; on obtient alors un hyposignal.

(b) – Des modifications de l'intensité de l'image sont également liées aux variations du champ perturbateur suivant la direction du gradient de lecture. Cette perturbation est représentée par le terme

$$\mathcal{K} = \frac{1}{|1 + \frac{1}{g_l} \frac{\partial}{\partial x_l} B'(x_r, x_p, x_s)|}. \quad (40)$$

3.3 Le programme MATLAB

Nous avons développé un programme sous MATLAB permettant de simuler les artefacts de susceptibilité magnétique dans la situation décrite en introduction. Il est possible de simuler les artefacts de susceptibilité magnétique de manière simple car on dispose d'une formule explicite pour la perturbation de champ magnétique. Ceci n'est pas le cas pour des géométries plus complexes. En plus de l'image de l'artefact, le programme permet de visualiser les différents effets d'une perturbation du champ magnétique de l'appareil IRM : déformation du plan de coupe et distorsions géométriques à l'intérieur de la coupe sélectionnée.

4 Résultats numériques

4.1 Une première simulation

Nous avons simulé l'artefact dans le cas cité en introduction où le milieu Ω_1 est de l'os (susceptibilité magnétique $\chi_m = 10^{-5}$, rayon $R_1 = 5$ mm) et où le milieu Ω_2 est un tissu biologique (susceptibilité magnétique $\chi_m = -10^{-5}$, rayon $R_2 = 10$ mm). La densité relative de protons entre les deux milieux est 1 : 10. Le champ \mathbf{B}_0 a pour intensité 1 Tesla, les gradients ont une intensité de 10^{-2} Tesla par mètre. L'épaisseur de coupe est de 3 mm.

La figure 4 indique la déformation du plan de coupe (on n'a représenté qu'une partie des points de ce plan). On remarquera que cette déformation est assez faible. La figure 5 donne les déformations géométriques à l'intérieur du plan coupe (on n'a représenté qu'une partie des points de ce plan). Sur cet exemple précis, les déformations géométriques à l'intérieur du plan ne sont pas significatives. La figure 6 représente l'image de l'artefact. Signalons que l'on aurait dû observer (s'il n'y avait eu de perturbation du processus d'acquisition de l'image) deux disques concentriques de couleur uniforme.

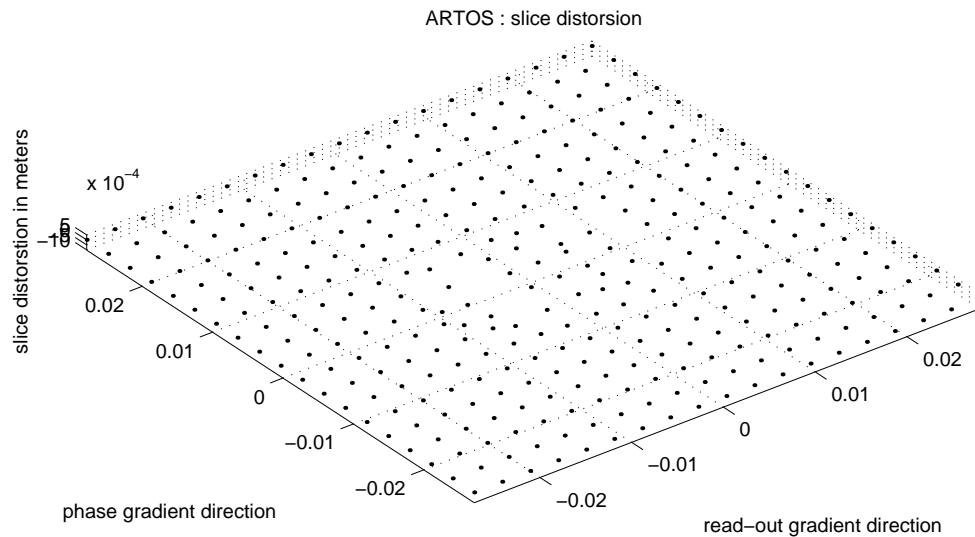


FIG. 4 – Déformation du plan de coupe.

La simulation a duré 30 minutes sur un Pentium II, 700 Mhz pour des coupes de 256×256 points.

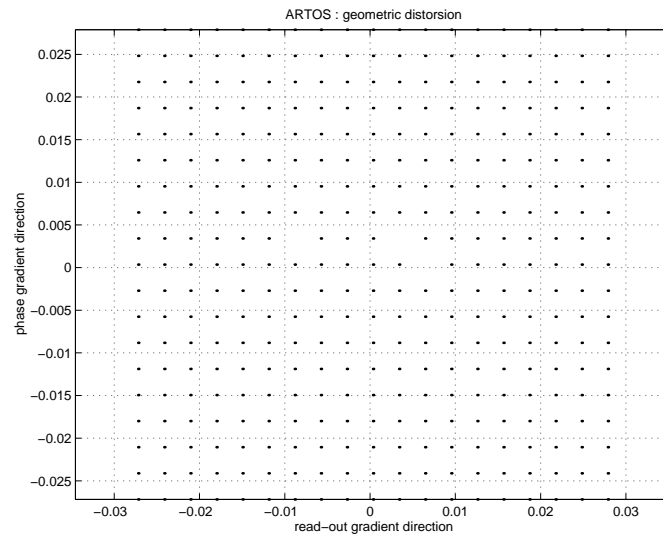
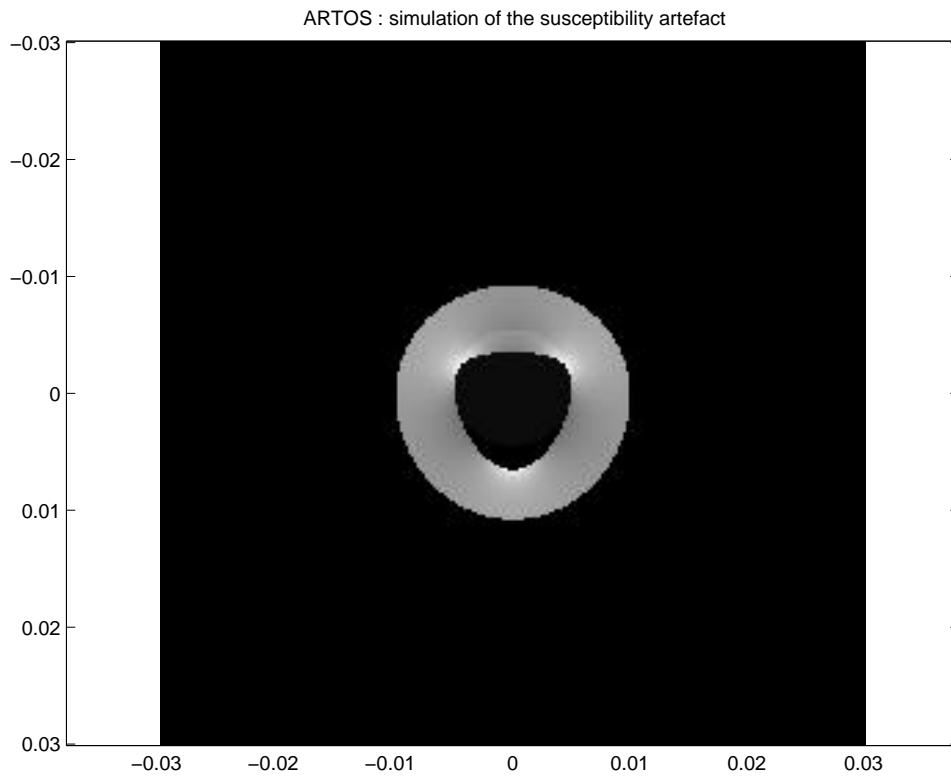


FIG. 5 – Distorsion géométrique dans le plan de coupe.



(c 2001) S. Balac – MAPLY – INSA de Lyon

FIG. 6 – Artefact obtenu par simulation numérique.

4.2 Une seconde simulation

Nous avons également simulé l'artefact dans le cas où le milieu Ω_1 est un implant métallique (susceptibilité magnétique $\chi_m = 10^{-4}$, rayon $R_1 = 5$ mm), par exemple une broche orthopédique. Le milieu Ω_2 est un tissu biologique (susceptibilité magnétique $\chi_m = -10^{-5}$, rayon $R_2 = 10$ mm). La densité relative de protons entre les deux milieux est 0 : 1. Le champ \mathbf{B}_0 a pour intensité 1 Telsa, les gradients ont une intensité de 10^{-2} Tesla par mètre. L'épaisseur de coupe est de 3 mm.

La figure 7 indique la déformation du plan de coupe. La figure 8 donne les déformations géométriques à l'intérieur du plan coupe. On remarquera que ces déformations sont un peu plus importantes que dans la simulation précédente. Ceci est lié à la valeur de la susceptibilité du milieu Ω_1 qui est plus importante. La figure 9 représente l'image de l'artefact. La déformation de l'image est beaucoup plus prononcée que dans la simulation précédente.

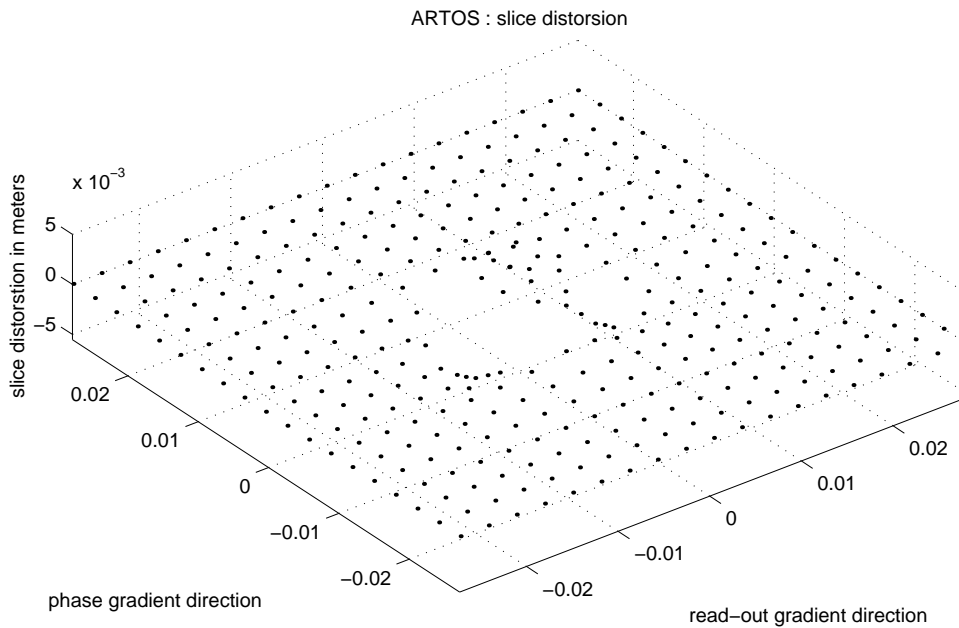


FIG. 7 – Déformation du plan de coupe.

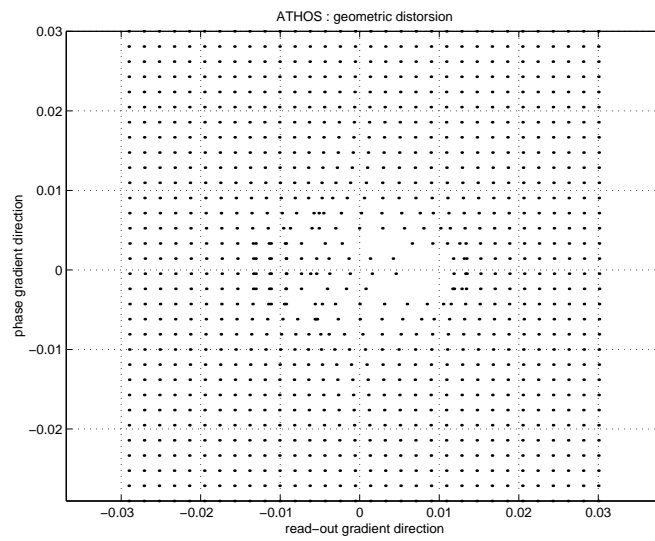


FIG. 8 – Distorsion géométrique dans le plan de coupe.

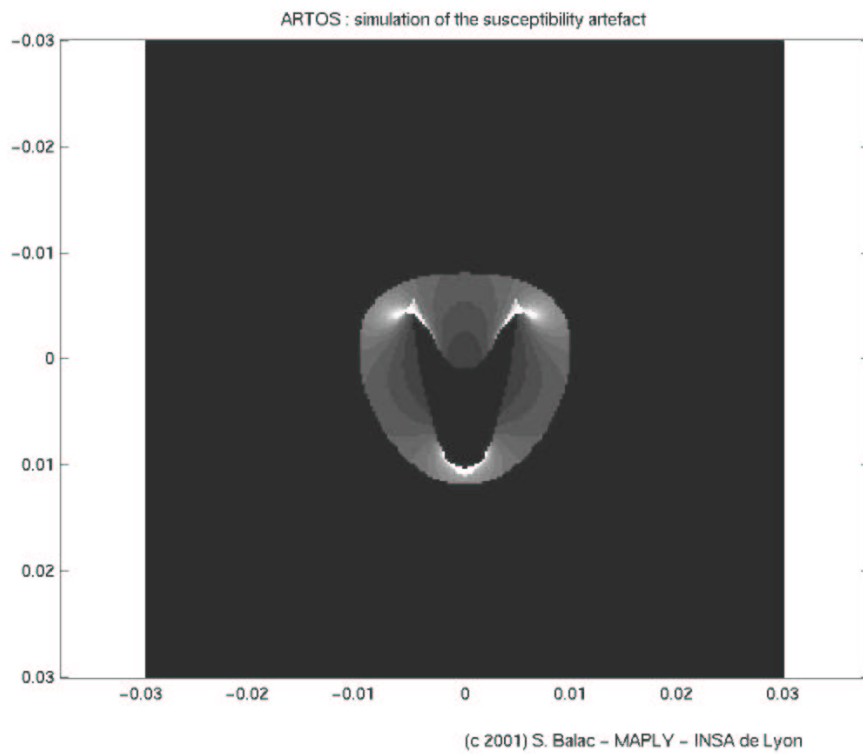


FIG. 9 – Artefact obtenu par simulation numérique.

Références

- [1] S. Balac, *Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM : étude du problème de magnétostatique et simulation numérique*, (PhD thesis, Université de Rennes 1, Rennes, France, 1997).
- [2] J.F. Schenck, *The role of magnetic susceptibility in magnetic resonance imaging*. **Medical Physics**, 23 :815-850, 1996 .
- [3] S. Balac et G. Caloz, *Mathematical modeling and numerical simulation of magnetic susceptibility artifacts in Magnetic Resonance Imaging*, **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, 3 :335-349, 2000.
- [4] S. Balac et G. Caloz, *Induced magnetic field computations using a boundary integral formulation*, **Applied Numerical Mathematics**, 41 :345-367, 2002.

Le programme MATLAB

Le programme MATLAB que nous présentons peut être téléchargé à l'adresse suivante :

www.maths.univ-rennes1.fr/~balac

```
% ATHOS a Matlab program for the numerical simulation
% of magnetic susceptibility artifacts in magnetic
% resonance imaging (MRI) for a hollow cylinder geometry.
%
% (c) Stephane Balac - MAPLY - INSA Lyon - mars 2001
% =====
% DESCRIPTION OF THE EXPERIMENT
% - the following variables may be changed
% -----
global r1; r1 = .5e-2; % radius of the 2 cylinders in meter
global r2; r2 = 1e-2;
global Xm; Xm = [1e-5, -1e-5, 0]; % magnetic susceptibilities in the 3 domains
global rho; rho = [1, 10, 0]; % proton density in the 3 domains
global B0; B0 = 1; % strenght of the field B_0 in tesla
global ec; ec = 3e-3; % width of the slice in meter
global g; g = [1e-2 1e-2 1e-2]; % gradients strength in T/m
beta = 0; % angle between the xaxis and the
% read-out gradient direction
% length of the slice:
global Lr; Lr = 4e-2; % along the read-out gradient direction in meter
global Lp; Lp = 4e-2; % along the phase gradient direction in meter
Np = 256; % number of pixels = Np^2
%
% - DO NOT modify the following variables
%
global adim; adim = 1E-2; % carateristic distance
global C; C = [0 0 0]; % origin of the slice
global c; c = sqrt(sum(C.^2));
global ns; ns = [0 0 1]; % direction of the slice gradient
global nr; nr = [cos(beta) sin(beta) 0]; % direction of the read-out gradient
global np; np = [-sin(beta) cos(beta) 0]; % direction of the phase gradient
global mu; mu = 1+Xm;
global mu0; mu0 = 4*pi*1.E-7; % magnetic permeability of vaccum
H0 = B0/mu0; % magnetic field strenght
Z = [1 0 0]; % Direction of B0 in the laboratory frame
% constants for the computation of the magnetic field induced by the cylinder
global CD; global CC; global CB; global CA;
if (mu(2)~=mu(1)) % 2 cylinders with distincts magnetic susceptibilities
    CD = 2*r1^2*r2^2*H0*(mu(2)-mu(1))/...
    (-r2^2*(mu(1)+mu(2)+mu(1)*mu(2)+mu(2)^2)+r1^2*(mu(2)^2+mu(1)-mu(2)-mu(1)*mu(2)));
    CC = H0 +CD*(mu(2)+mu(1))/((mu(2)-mu(1))*r1^2);
    CA = CC+CD/r1^2;
    CB = CC*r2^2+CD;
else % only one medium
    CA = (mu(1) - 1)*H0/(mu(1)+1);
    CB = (mu(1) - 1)*H0/(r2^2*(mu(1)+1));
    CC = CA;
    CD = 0;
end
% quadrature formula for integration over the slice width
NG = 5;
```

```

Gpts = [.906179, .538469, 0., -0.538469, -0.906179];
Gpds = [.236926, .478628, .568888, .478628, .236926];
%=====
%warning off % suppresses all subsequent warning messages
times1=cputime;
indi = 0; inde = 0;
IMG=[]; % array containing the pixels intensity
%
% Loop over the pixels
%
for ir = 1:Np
    disp([' ** ',num2str(round((100*ir)/Np)),'% '])
    Pix(1) = - (Lr/2) + (ir-1)*Lr/(Np-1);
for ip = 1:Np
    Pix(2) = - (Lp/2) + (ip-1)*Lp/(Np-1);
    IMG(ir,ip)=0;

for is = 1:NG % Loop over the quadrature nodes
    Pix(3) = ec*Gpts(is)/2;

% Search of the voxels connected to the pixel Pix
    Vox = voxel(Pix(1),Pix(2),Pix(3));
    nvox = size(Vox,2);
    for ivox=1:nvox
% Computation of the magnetic field induced by the ball in the point Vox(ivox)
        BdB = calBdB(Vox(:,ivox));
        Jac=1./abs(1+BdB(2)/g(1));
        IMG(ir,ip) = IMG(ir,ip) + Gpds(is)*Jac*BdB(3);
        if ((is == 3) & (mod(ir,round(Np/20))==0) & (mod(ip,round(Np/20))==0))
            inde = inde+1;
            DEF(:,inde) = Vox(:,ivox);
        end
        if ((is == 3) & (mod(ir,round(Np/20))==0) & (mod(ip,round(Np/20))==0))
            indi = indi+1;
            DIS(:,indi) = [Vox(1,ivox)+BdB(1)/g(1); Vox(2,ivox)];
        end
    end
end
end
end
times2=cputime-times1; disp(['CPU time =',num2str(times2),'sec.']);
%
% Image display
%
hx = Lr/(Np-1);
hy = Lp/(Np-1);
X = -0.5*Lr:hx:0.5*Lr;
Y = -0.5*Lp:hy:0.5*Lp;
graylevel = 0.01; % Gray level
Mn = min(min(IMG));
Mx = max(max(IMG));
XX = graylevel*((Mx+Mn)/2)*ones(size(IMG));
IM = min(IMG,XX);
colormap(gray)
imagesc(X,Y,IMG)
title('ARTOS : simulation of the susceptibility artefact')

```



```
text(0, 0.6*Lr, '(c 2001) S. Balac - MAPLY - INSA de Lyon')
axis equal
```

```
figure
plot3(DEF(1,:),DEF(2,:),DEF(3:),'.')
grid
axis equal
title('ARTOS : slice distorsion')
xlabel('read-out gradient direction')
ylabel('phase gradient direction')
zlabel('slice distorstion in meters')
```

```
figure
plot(DIS(1,:),DIS(2:),'.')
grid
axis equal
title('ARTOS : geometric distorsion')
xlabel('read-out gradient direction')
ylabel('phase gradient direction')
```

```
:::::::::::::::
voxel.m
```

```
:::::::::::::::
```

```
function Vo=voxel(tau1,tau2,zeta)
%
% IN : a pixel (tau1,tau2,zeta)
% OUT : the voxels in the sample that are connected to the pixel P
%       V(i,n) is the i-th component of the n-th voxel
% All the coordinates are given in the frame (C,nr,np,nc)
%
% (c) Stephane Balac - MAPLY - INSA Lyon - mars 2001
```

```
global r1; global r2; global g; global adim
```

```
Vo = [];
R=[];
% computation of the roots of F
R = fndrc(tau1/adim,tau2/adim,zeta/adim,r1/adim,r2/adim,adim);
R = adim*R;
% computation of the coordinates of the voxels Vo linked to P
for i=1:length(R)
    xs = R(i);
    xr = tau1 + (xs-zeta)*g(3)/g(1);
    xp = tau2;
    Vo(1,i) = xr;
    Vo(2,i) = xp;
    Vo(3,i) = xs;
end
```

```
:::::::::::::::
```

```
calBdB.m
```

```
:::::::::::::::
```

```
function R = calBdB(P)
%
% INPUT : P = coordinates of the voxel in the slice frame
% OUTPUT : the following values
```

```

% R(1) = component along Z of the magnetic field
%         induced by the ball B'_z in P
% R(2) = derivative along n_r of B'_z in P
%         d[B'_z(P)]/d[x_r]
% R(3) = proton density in the domain P belongs to.
%
% (c) Stephane Balac - MAPLY - INSA Lyon - mars 2001
%

% parameters of the experiment
global r1; global r2; global mu; global mu0; global rho; global CA;
global CB; global CC; global CD; global nr; global np

xr = P(1);
xp = P(2);
r = sqrt(xr^2 + xp^2);
if (r < r1)
% P belongs to domain 1
    R(1) = - mu0*mu(1)*CA;
    R(2) = calr2(-mu0*mu(1)*CA,0,nr(1),np(1),xp,xr);
    R(3) = rho(1);
elseif (r < r2)
% P belongs to domain 2
    R(1) = - mu0*mu(2)*(CC - CD*(2*P(1)^2/r^4 - 1/r^2));
    R(2) = calr2(-mu0*mu(2)*CC,mu0*mu(2)*CD,nr(1),np(1),xp,xr);
    R(3) = rho(2);
else
    R(1) = mu0*mu(3)*CB*(2*P(1)^2/r^4 - 1/r^2);
    R(2) = calr2(0,mu0*mu(3)*CB,nr(1),np(1),xp,xr);
    R(3) = rho(3);
end

function R2 = calr2(alpha1,alpha2,ax,bx,xp,xr)
numer=-2*alpha2*(2*ax^2-1)*xr^3-12*alpha2*ax*bx*xp*xr^2 ...
-2*alpha2*(4*bx^2-2*ax^2-1)*xp^2*xr+4*alpha2*ax*bx*xp^3;
denom=(xr^2+xp^2)^3;
R2 = numer/denom;

::::::::::::::::::
fndrc.m
::::::::::::::::::
function sol = fndrc(tau1,tau2,zeta,r1,r2,adim)
%
% Computes the roots of F.
% All quantities in this function are dimensionless.
%
% (c) S. Balac - MAPLY - INSA Lyon - mars 2001
%
% parameters of the experiment
global g; global mu; global mu0; global CA; global CB;
global CC; global CD; global nr; global np

dmax = 20; % maximal allowed distorsion = (dmax * adim) meters
dmin = 0.1; % minimal distance between 2 "distincts" solution = (dmin* adim) meters
% This is used to sort the "physical solutions"

```

```

% Domain 3
% =====
alpha = 0;
beta = mu(3)*mu0*CB;
rac = [];
so1 = [];
P = []; % Computation of the polynom coefficients
P = polnom(tau1,tau2,zeta,g(1),g(2),g(3),nr(1),np(1),alpha,beta,adim);
rac = roots(P); % Computation of its 5 roots
% Test for real roots
for i=1:length(rac)
    if isreal(rac(i)), so1=[so1 , rac(i)]; end
end
% Test if the point belongs to domain 3
rac3=[];
for i=1:length(so1)
    xs = so1(i);
    xr = tau1 + (xs-zeta);
    xp = tau2;
    daxe2 = xr^2+xp^2;
    if ((daxe2 > r2^2)&(abs(xs)<dmax)) rac3=[rac3 so1(i)];end;
end
% Domain 2
% =====
alpha = -mu(2)*mu0*CC;
beta = mu(2)*mu0*CD;
rac = [];
so2 = [];
P = []; % Computation of the polynom coefficients
P = polnom(tau1,tau2,zeta,g(1),g(2),g(3),nr(1),np(1),alpha,beta,adim);
rac = roots(P); % Computation of its 5 roots
% Test for real roots
for i=1:length(rac)
    if isreal(rac(i)), so2=[so2 , rac(i)]; end
end
% Test if the point belongs to domain 2
rac2=[];
for i=1:length(so2)
    xs = so2(i);
    xr = tau1 + (xs-zeta);
    xp = tau2;
    daxe2 = xr^2+xp^2;
    if ((daxe2 >= r1^2) & (daxe2 <= r2^2) & (abs(xs)<dmax)) ...
        rac2=[rac2 so2(i)];end;
end
% Domain 1
% =====
alpha = -mu(1)*mu0*CA;
beta = 0;
rac = [];
so3 = [];
P = []; % Computation of the polynom coefficients
P = polnom(tau1,tau2,zeta,g(1),g(2),g(3),nr(1),np(1),alpha,beta,adim);
rac = roots(P); % Computation of its 5 roots
% Test for real roots
for i=1:length(rac)

```

```

    if isreal(rac(i)), so3=[so3 , rac(i)]; end
end
% Test if the point belongs to domain 1
rac1=[];
for i=1:length(so3)
    xs = so3(i);
    xr = tau1 + (xs-zeta);
    xp = tau2;
    daxe2 = xr^2+xp^2;
    if ((daxe2 < r1^2) & (abs(xs)<dmax)) rac1=[rac1 so3(i)];end;
end

soo = [rac1,rac2,rac3];
% Test for multiple roots
if length(soo) < 2; sol=soo; return; end;
soo = sort(soo); % Sort sol in ascending order
sol = [soo(1)];
for i=2:length(soo)
    if abs(soo(i)-soo(i-1)) > dmin; sol = [sol , soo(i)]; end;
end

:::::::::::::
polnom.m
:::::::::::::
function P = polnom(tau1a,tau2a,zetaa,gl,gp,gc,elx,epx,alpha,beta,L)
%
% Return the coefficients of the polynom P
%
% (c) S. Balac - MAPLY - INSA Lyon - mars 2001
%
% INPUT:
% tau1a = dimensionless tau1 parameter
% tau2a = dimensionless tau2 parameter
% zetaa = dimensionless zeta parameter
% gl,gc,gp = gradients intensity (read-out, slice selection and phase)
% elx = dot product of nl and ex vectors
% epx = dot product of np and ex vectors
% alpha, beta = constants in the magnetic field expression*
%
% OUTPUT:
% the polynom P = P(1)*X^5 + ... + P(4)*X + P(5).

ind = 1;
P(0+ind) = -zetaa^5*gc^5*L^3-2*zetaa*gc*L^3*tau1a^2*gl^4*tau2a^2-zetaa*gc*L^3*tau1a^4*gl^4 ...
-zetaa*gc*L^3*tau2a^4*gl^4+4*zetaa^2*gc^2*L^3*tau1a^3*gl^3 ...
-6*zetaa^3*gc^3*L^3*tau1a^2*gl^2+4*zetaa^4*gc^4*L^3*tau1a*gl ...
-2*zetaa^3*gc^3*L^3*tau2a^2*gl^2+4*zetaa^2*gc^2*L^3*tau1a*gl^3*tau2a^2 ...
+alpha*L^2*gc^4*zetaa^4+alpha*L^2*tau2a^4*gl^4+2*beta*gl^4*elx^2*tau1a^2 ...
+2*beta*gl^4*epx^2*tau2a^2-beta*gl^2*gc^2*zetaa^2+2*beta*gl^3*tau1a*gc*zetaa ...
-4*beta*gl^3*elx^2*tau1a*gc*zetaa+4*beta*gl^4*elx*tau1a*epx*tau2a ...
+2*beta*gl^2*elx^2*gc^2*zetaa^2-4*beta*gl^3*elx*gc*zetaa*epx*tau2a ...
-beta*gl^4*tau1a^2 ...
-beta*gl^4*tau2a^2+alpha*L^2*tau1a^4*gl^4+2*alpha*L^2*tau1a^2*gl^4*tau2a^2 ...
-4*alpha*L^2*tau1a^3*gl^3*gc*zetaa+6*alpha*L^2*tau1a^2*gl^2*gc^2*zetaa^2 ...
-4*alpha*L^2*tau1a*gl*gc^3*zetaa^3+2*alpha*L^2*gc^2*zetaa^2*tau2a^2*gl^2 ...
-4*alpha*L^2*tau1a*gl^3*gc*zetaa*tau2a^2;

```

```

P(1+ind) = -2*beta*gl^3*tau1a*gc+2*gc*L^3*tau1a^2*gl^4*tau2a^2+gc*L^3*tau1a^4*gl^4 ...
+gc*L^3*tau2a^4*gl^4-8*gc^2*L^3*tau1a^3*gl^3*zetaa+18*gc^3*L^3*tau1a^2*gl^2*zetaa^2 ...
-16*gc^4*L^3*tau1a*gl*zetaa^3+6*gc^3*L^3*zetaa^2*tau2a^2*gl^2 ...
-8*gc^2*L^3*tau1a*gl^3*zetaa*tau2a^2+5*gc^5*L^3*zetaa^4+2*beta*gl^2*gc^2*zetaa ...
+4*beta*gl^3*elx^2*tau1a*gc-4*beta*gl^2*elx^2*gc^2*zetaa+4*beta*gl^3*elx*gc*epx*tau2a ...
-4*alpha*L^2*gc^4*zetaa^3+12*alpha*L^2*tau1a*gl*gc^3*zetaa^2+4*alpha*L^2*tau1a^3*gl^3*gc ...
-12*alpha*L^2*tau1a^2*gl^2*gc^2*zetaa+4*alpha*L^2*tau1a*gl^3*gc*tau2a^2 ...
-4*alpha*L^2*gc^2*zetaa*tau2a^2*gl^2;

P(2+ind) = 24*gc^4*L^3*tau1a*gl*zetaa^2+4*gc^2*L^3*tau1a^3*gl^3-18*gc^3*L^3*tau1a^2*gl^2*zetaa ...
+4*gc^2*L^3*tau1a*gl^3*tau2a^2-6*gc^3*L^3*zetaa*tau2a^2*gl^2-beta*gl^2*gc^2 ...
-10*gc^5*L^3*zetaa^3+2*beta*gl^2*elx^2*gc^2+6*alpha*L^2*gc^4*zetaa^2 ...
+6*alpha*L^2*tau1a^2*gl^2*gc^2+2*alpha*L^2*gc^2*tau2a^2*gl^2 ...
-12*alpha*L^2*tau1a*gl*gc^3*zetaa;

P(3+ind) = 4*alpha*L^2*tau1a*gl*gc^3+6*gc^3*L^3*tau1a^2*gl^2+2*gc^3*L^3*tau2a^2*gl^2 ...
-16*gc^4*L^3*tau1a*gl*zetaa+10*gc^5*L^3*zetaa^2-4*alpha*L^2*gc^4*zetaa;

P(4+ind) = -5*gc^5*L^3*zetaa+4*gc^4*L^3*tau1a*gl+alpha*L^2*gc^4;

P(5+ind) = L^3*gc^5;

P = fliplr(P); % the matlab convention for writting polynomial is
              % P(1)*X^N + ... + P(N)*X + P(N+1)

```