

Artefacts Radio-Fréquence en IRM : une méthode ultra-rapide de résolution numérique de l'équation de Bloch

Stéphane Balac (& Laurent Chupin)
stephane.balac@univ-rennes1.fr

Laboratoire Foton, CNRS UMR 6082
ENSSAT - 6 rue de Kérampont, F-22300 Lannion

19/12/2013



Plan de l'exposé

Introduction : Artefacts RF en IRM

Principe de l'IRM

Effets d'un objet métallique électriquement conducteur

L'équation de Bloch

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équation de Bloch

Illustrations numériques

Précision et efficacité de la méthode

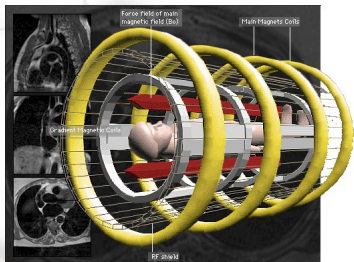
Exemple de simulation numérique

Conclusion et perspectives

Introduction

Principe de l'IRM

Technique d'imagerie mesurant l'aimantation magnétique des tissus biologiques



Artwork courtesy of Rebecca Cagle, National Library of Medicine-Lister Hill Center for Biocommunication

Utilise trois types de champs magnétiques

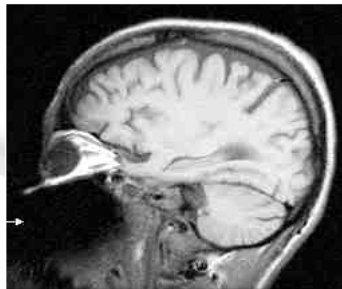
- 1 Champ statique B_0 : pour créer l'aimantation magnétique
- 2 Champ RF B_1 : pour mesurer l'aimantation par résonance
- 3 Gradients : pour créer la dépendance spatiale du signal

Introduction

Artefacts RF

En présence d'un implant métallique composé d'un métal électriquement conducteur, le champ RF est à l'origine de **courants de Foucault** entraînant :

- 1 une perturbation du champ RF B_1 se traduisant par un **artefact** sur l'image

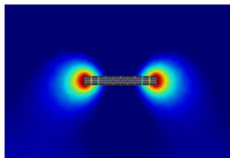


K. Yassi et col., *Evaluation of the risk of overheating and displacement of orthodontic devices in magnetic resonance imaging*, Journal de Radiologie, 88(2), p.263-268, (2007)

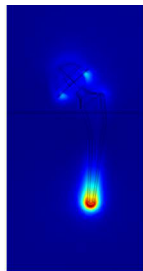
Introduction

Échauffement et nécrose des tissus

- 2 un phénomène d'échauffement de l'implant pouvant entraîner la nécrose des tissus environnants



Stent vasculaire



Prothèse de hanche



Introduction

Calcul du champ RF induit

- **Étape préliminaire** : calculer le champ RF induit par un implant médical dans les conditions d'une IRM
 - Le champ RF induit a la même fréquence que le champ RF source
- C'est la **thèse de Patrice Boissoles**
 - ✍ **Problèmes mathématiques et numériques issus de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire**
IRMAR, UR1, 2005

Introduction

Simulation des effets du champ RF induit

- Simulation des effets thermiques liés aux courants de Foucault dans un implant :
 - travail en cours avec Fabrice Mahé
 - Simulation des artefacts RF :
 - travail réalisé avec Laurent Chupin
 - 📖 S. Balac & L. Chupin, Fast approximate solution of Bloch equation for simulation of RF artifacts in Magnetic Resonance Imaging, Math. Comput. Model., 48 : 1901-1913 (2008)
- Objet de l'exposé

Introduction : Artefacts RF en IRM

Principe de l'IRM

Effets d'un objet métallique électriquement conducteur

L'équation de Bloch

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équation de Bloch

Illustrations numériques

Précision et efficacité de la méthode

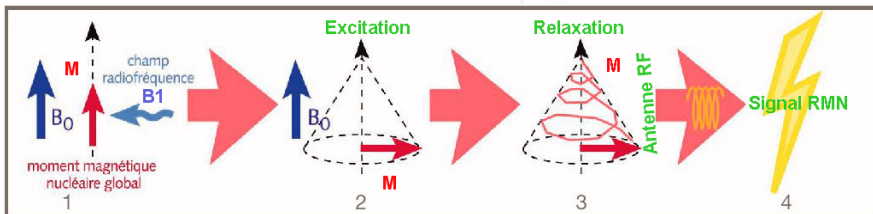
Exemple de simulation numérique

Conclusion et perspectives

L'équation de Bloch

Moment magnétique macroscopique

Principe de la RMN :



- L'évolution du moment magnétique macroscopique M soumis à un champ magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ est régi par l'équation de Bloch :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \gamma (\mathbf{M} \wedge \mathbf{B}) - \frac{M_x \mathbf{x} + M_y \mathbf{y}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \mathbf{z}$$

où T_1 , T_2 temps de relaxation des tissus, γ rapport gyromagnétique de spin

L'équation de Bloch

Écriture Matricielle

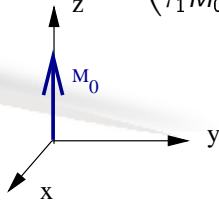
- L'équation de Bloch peut être écrite sous forme du système différentiel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{M}(t) + \mathbf{b} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

où $\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} -\tau_2 & \gamma B_0 & -\gamma B_y(t) \\ -\gamma B_0 & -\tau_2 & \gamma B_x(t) \\ \gamma B_y(t) & -\gamma B_x(t) & -\tau_1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 M_0 \end{pmatrix}$

avec $\tau_1 = 1/T_1$ et $\tau_2 = 1/T_2$.

- On a la condition initiale $\mathbf{M}(t=0) = M_0 \mathbf{z}$



L'équation de Bloch

Écriture Matricielle

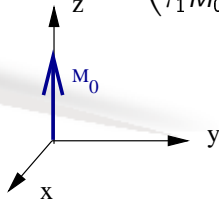
- L'équation de Bloch peut être écrite sous forme du système différentiel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{M}(t) + \mathbf{b} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

où $\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} -\tau_2 & \gamma B_0 & -\gamma B_y(t) \\ -\gamma B_0 & -\tau_2 & \gamma B_x(t) \\ \gamma B_y(t) & -\gamma B_x(t) & -\tau_1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 M_0 \end{pmatrix}$

avec $\tau_1 = 1/T_1$ et $\tau_2 = 1/T_2$.

- On a la condition initiale $\mathbf{M}(t=0) = M_0 \mathbf{z}$



- La matrice \mathbf{C} n'est pas bien « équilibrée » pour un traitement numérique... ($\gamma B_0 \sim 10^6 \times$ autres termes)

L'équation de Bloch

Introduction du repère tournant

On pose $\mathbf{M}(t) = R(t) \mathbf{m}(t)$ où $R(t)$ est la **matrice de rotation**

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \omega_0 = \gamma B_0$$

Le vecteur \mathbf{m} est solution du système différentiel

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}(t) = A(t) \mathbf{m}(t) + \mathbf{b} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{m}(t=0) = M_0 \mathbf{z}$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\tau_2 & 0 & -\omega_a(t) \\ 0 & -\tau_2 & \omega_b(t) \\ \omega_a(t) & -\omega_b(t) & -\tau_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\omega_a(t) = \gamma B_y(t) \cos(\omega_0 t) + \gamma B_x(t) \sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_b(t) = \gamma B_x(t) \cos(\omega_0 t) - \gamma B_y(t) \sin(\omega_0 t)$$

Résolution de l'équation de Bloch

En l'absence de perturbation

- La matrice du système différentiel est :

$$A = \begin{pmatrix} -\tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_2 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & -\tau_1 \end{pmatrix}$$

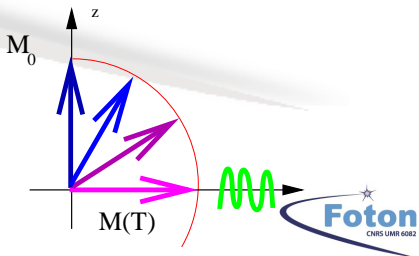
où $\omega_1 = \gamma B_1$

- La matrice A est constante : on peut résoudre le système différentiel explicitement :

La solution est

$$\mathbf{m}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \sin(\omega_1 t) \\ M_0 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}$$

On prend T_{RF} temps final tel que $\omega_1 T_{RF} = \pi/2$ ou π



Résolution de l'équation de Bloch

En présence d'un champ RF perturbateur

La matrice A n'est plus constante mais elle est **périodique**

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\tau_2 & 0 & -\omega_a(t) \\ 0 & -\tau_2 & \omega_b(t) \\ \omega_a(t) & -\omega_b(t) & -\tau_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\omega_a(t) = \gamma B_y(t) \cos(\omega_0 t) + \gamma B_x(t) \sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_b(t) = \gamma B_x(t) \cos(\omega_0 t) - \gamma B_y(t) \sin(\omega_0 t)$$

où B_x , B_y sont les composantes du champ RF total (**champ IRM B_1** et **champ perturbateur**) qui sont périodiques de **période $T_0 = 2\pi/\omega_0$**

$$B_x(t) = (B_1 + u_1) \cos(\omega_0 t) + v_1 \sin(\omega_0 t)$$

$$B_y(t) = (-B_1 + v_2) \sin(\omega_0 t) + u_2 \cos(\omega_0 t)$$

Résolution de l'équation de Bloch

Objectifs

On souhaite :

- Déterminer la solution de l'équation de Bloch avec terme de perturbation RF au **temps final** $T_{RF} = \frac{\pi}{2\omega_1}$ ou $T_{RF} = \frac{\pi}{\omega_1}$
 - en chaque voxel du volume imagé (par ex. **256³ voxels**)
- Trop couteux en temps de calcul si ce système est résolu par une approche standard type schéma RK (ce n'est qu'une des étapes du processus de simulation des artefacts!)
- Proposer une méthode permettant d'obtenir rapidement la solution au temps T_{RF} en exploitant la périodicité de la matrice A

Introduction : Artefacts RF en IRM

Principe de l'IRM

Effets d'un objet métallique électriquement conducteur

L'équation de Bloch

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équation de Bloch

Illustrations numériques

Précision et efficacité de la méthode

Exemple de simulation numérique

Conclusion et perspectives

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

La théorie de Floquet pour les systèmes différentiels périodiques

La matrice A étant continue et **périodique de période** $T_0 = 2\pi/\omega_0$,
la résolvante du système différentiel a pour forme

$$X(t) = Q(t) e^{tF}$$

où

- Q est une matrice continue et périodique de période T_0
- F est une matrice constante

→ Mais pas de méthode pour déterminer Q et F

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Comment exploiter en pratique la théorie de Floquet ?

Deux approches possibles en pratique :

- 1 Approche perturbative : on considère un développement en série des 2 matrices Q et F : $Q(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n(t)$ and $F = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n$ où chaque terme F_n est choisi de sorte que $Q_n(t)$ soit périodique et $Q_n(t)$ est choisie afin de satisfaire la forme imposée par le thm de Floquet à tout ordre de troncature.

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Comment exploiter en pratique la théorie de Floquet ?

Deux approches possibles en pratique :

- 1 Approche perturbative : on considère un développement en série des 2 matrices Q et F : $Q(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n(t)$ and $F = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n$ où chaque terme F_n est choisi de sorte que $Q_n(t)$ soit périodique et $Q_n(t)$ est choisie afin de satisfaire la forme imposée par le thm de Floquet à tout ordre de troncature.
- 2 On part d'un « pseudo » développement en série de Fourier de la solution. On obtient un système infini d'équations différentielles à coefficients constants que l'on tronque.
→ C'est l'approche retenue ici.

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Principe de notre méthode

- La matrice périodique A admet la décomposition en S.F. :

$$A(t) = \sum_{k=-1}^1 A_{2k} e^{2ik\omega_0 t} = A_{-2} e^{-2i\omega_0 t} + A_0 + A_2 e^{2i\omega_0 t}$$

où

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\tau_2 & 0 & -w_a^{(0)} \\ 0 & -\tau_2 & w_b^{(0)} \\ w_a^{(0)} & -w_b^{(0)} & -\tau_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_a^{(2)} \\ 0 & 0 & \omega_b^{(2)} \\ \omega_a^{(2)} & -\omega_b^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_a^{(0)} &= \frac{1}{2} \gamma (u_2 + v_1) & \omega_a^{(2)} &= -\frac{1}{4} \gamma (v_1 - u_2 + i(u_1 + v_2)) \\ \omega_b^{(0)} &= \frac{1}{2} \gamma (2B_1 + u_1 - v_2) & \omega_b^{(2)} &= \frac{1}{4} \gamma (u_1 + v_2 + i(u_2 - v_1)) \end{aligned}$$

et $A_{-2} = \overline{A_2}$.

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Principe de notre méthode

- La solution $\mathbf{m}(t)$ n'est pas périodique. Néanmoins on cherche à l'exprimer sous la forme d'une S.F. à coefficients non cst :

$$\mathbf{m}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{m}_k(t) e^{2ik\omega_0 t}$$

- La décomposition n'est pas unique !

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Principe de notre méthode

- La solution $\mathbf{m}(t)$ n'est pas périodique. Néanmoins on cherche à l'exprimer sous la forme d'une S.F. à coefficients non cst :

$$\mathbf{m}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{m}_k(t) e^{2ik\omega_0 t}$$

→ La décomposition n'est pas unique !

- En substituant dans l'équation de Bloch, on trouve que $(\mathbf{m}_k(t))_{k \in \mathbb{Z}}$ doit satisfaire le système différentiel infini à coef. constants

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{m}_k(t) = \sum_{j=-1}^1 A_{2j} \mathbf{m}_{k-j}(t) - 2ik\omega_0 \mathbf{m}_k(t) + \delta_k \mathbf{b} \\ \mathbf{m}_k(0) = \delta_k \mathbf{M}_0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Principe de notre méthode

Le résultat essentiel est le suivant :

Théorème

Il existe une unique solution $(\mathbf{m}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \ell_\infty^2(\mathbb{Z}))$ au système différentiel infini telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (k^{2p} + 1) |\mathbf{m}_k(t)|^2 < +\infty$$

i.e. $\mathbf{m}_k(t)$ tend vers 0 quand k tend vers $\pm\infty$ plus vite que n 'importe quelle puissance de $1/k$.

→ On va pouvoir calculer une solution approchée en tronquant très rapidement le système différentiel infini

 S. Balac & L. Chupin, Fast approximate solution of Bloch equation for simulation of RF artifacts in Magnetic Resonance Imaging, Math. Comput. Model., 48 : 1901-1913 (2008)

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Mise en œuvre de la méthode

On considère la forme matricielle du système différentiel infini

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t) = \mathcal{A} \mathcal{M}(t) + \mathcal{B}$$

où $\mathcal{M}(t) = (\mathbf{m}_k(t))_{k \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et \mathcal{A} est la matrice infinie constante tridiagonale par bloc

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & A_2 & A_0(1) & A_{-2} & & & & & \\ & & A_2 & A_0 & A_{-2} & & & & \\ & & & A_2 & A_0(-1) & A_{-2} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

avec la notation $A_0(k) = A_0 + 2ik\omega_0 \text{Id}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Mise en œuvre de la méthode

- D'après la **formule de Duhamel**, la solution du S.D. tronqué sous la cond. initiale $\mathcal{M}^{[M]}(0) = (0, \dots, 0, \mathbf{M}_0, 0, \dots, 0)$ est

$$\mathcal{M}^{[M]}(t) = e^{t\mathcal{A}^{[M]}} \mathcal{M}^{[M]}(0) + \left(\int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}^{[M]}} ds \right) \mathcal{B}^{[M]}.$$

- Considérant la décomposition $\mathcal{A}^{[M]} = P D P^{-1}$ où $D = \text{diag}(d_i, i = -3N, \dots, 3N)$ on obtient

$$\mathcal{M}^{[M]}(t) = P e^{tD} P^{-1} \mathcal{M}^{[M]}(0) + P \mathcal{S}(t) P^{-1} \mathcal{B}^{[M]}$$

où $\mathcal{S}(t) = \text{diag}(s_i(t), i = 1, \dots, N)$ et

$$s_i(t) = \begin{cases} (e^{td_i} - 1) / d_i & \text{si } d_i \neq 0 \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

Algorithme

Algorithme de résolution de l'équ. de Bloch (pour un voxel)

- 1 Choisir l'ordre de troncature N et la durée T_{RF} du pulse
- 2 Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice tridiagonale par blocs $\mathcal{A}^{[M]}$ et former les matrices P , D et P^{-1}

- 3 Calculer $\mathcal{S}(t) = \text{diag}(s_i(t), i = 1, \dots, N)$

- 4 Calculer $\mathcal{M}^{[M]}(T_{RF}) = (\mathbf{m}_k(T_{RF}))_{k \in \{-N, \dots, N\}} = P e^{T_{RF} D} P^{-1} \mathcal{M}^{[M]}(0) + P \mathcal{S}(T_{RF}) P^{-1} \mathcal{B}^{[M]}$

- 5 Vecteur magnétisation dans le repère tournant

$$\mathbf{m}(T_{RF}) \approx \sum_{k=-N}^N \mathbf{m}_k(T_{RF}) e^{2ik\omega_0 T_{RF}}$$

- 6 Vecteur magnétisation dans le repère du laboratoire

$$\mathbf{M}^{[M]}(T_{RF}) = R(T_{RF}) \mathbf{m}^{[M]}(T_{RF})$$

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équ. de Bloch

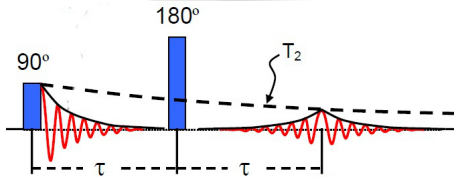
Coût de l'algorithme

Le coût principal de l'algorithme réside dans

- le calcul des éléments propres de la matrice $\mathcal{A}^{[M]}$ qui est tridiagonale par blocs

→ Peut se faire à moindre coût compte-tenu de la structure tridiagonale.

- En IRM sont utilisés des séquences d'impulsions RF



→ Cette factorisation n'a à être effectuée qu'une seule fois

Introduction : Artefacts RF en IRM

Principe de l'IRM

Effets d'un objet métallique électriquement conducteur

L'équation de Bloch

Une méthode ultra-rapide de résolution de l'équation de Bloch

Illustrations numériques

Précision et efficacité de la méthode

Exemple de simulation numérique

Conclusion et perspectives

Précision et efficacité de la méthode

Comparaison des temps de calcul au solver ode45 de Matlab

① Comparaison à la solution exacte en l'absence de perturbation RF

pour $B_0 = 1$ T, $B_1 = 10^{-3}$ T, $\mathbf{M}_0 = (0, 0, 1)^T$, $T_1 = 750$ ms,
 $T_2 = 50$ ms et $\theta = \frac{\pi}{2}$

Temps CPU correspondant à $16^3 = 4096$ exécutions

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	ode45($tol = 10^{-3}$)
CPU times	3.82	9.17	17.56	29.53	69.21
Error in%	0.0089	0.0089	0.0089	0.0089	0.01

Précision et efficacité de la méthode

Comparaison des temps de calcul au solver ode45 de Matlab

② Comparaison des solutions avec perturbation RF

pour $B_0 = 1$ T, $B_1 = 10^{-3}$ T, $\mathbf{M}_0 = (0, 0, 1)^\top$, $T_1 = 750$ ms,
 $T_2 = 50$ ms et $\theta = \frac{\pi}{2}$

Perturbation du champ RF aléatoire de même intensité que B_1

Temps CPU correspondant à $8^3 = 512$ exécutions

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	ode45($tol = 10^{-6}$)
CPU	0.21	2.77	5.85	441.31
$\mathbf{M}(T_{RF})$	-0.451267567224223 0.880403831415840 -0.143038128273614	-0.451267577650069 0.880403864102639 -0.143037935010000	-0.451267577650185 0.880403864102598 -0.143037935010011	-0.451275033186301 0.880418286093983 -0.143046376653028

Précision et efficacité de la méthode

Comparaison des temps de calcul au solver ode45 de Matlab

② Comparaison des solutions avec perturbation RF

pour $B_0 = 1$ T, $B_1 = 10^{-3}$ T, $\mathbf{M}_0 = (0, 0, 1)^T$, $T_1 = 750$ ms,
 $T_2 = 50$ ms et $\theta = \frac{\pi}{2}$

Perturbation du champ RF aléatoire de même intensité que B_1

Temps CPU correspondant à $8^3 = 512$ exécutions

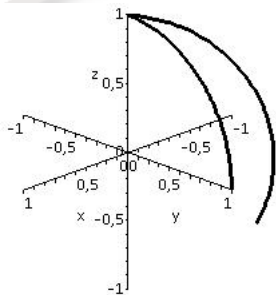
	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	ode45($tol = 10^{-6}$)
CPU	0.21	2.77	5.85	441.31
$\mathbf{M}(T_{RF})$	-0.451267567224223 0.880403831415840 -0.143038128273614	-0.451267577650069 0.880403864102639 -0.143037935010000	-0.451267577650185 0.880403864102598 -0.143037935010011	-0.451275033186301 0.880418286093983 -0.143046376653028

➔ On montre que $\|\mathbf{M}(T_{RF}) - \mathbf{M}^{[0]}(T_{RF})\| \leq C_{ste} B_1/B_0$

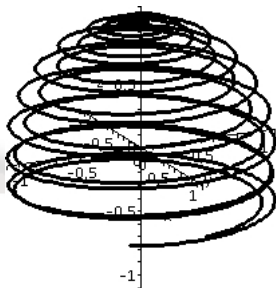
Exemple de simulation numérique

Évolution du vecteur aimantation au cours de la résonance

Comparaison de l'évolution du vecteur aimantation au cours de la résonance pour un pulse RF de $\pi/2$ **avec et sans** champ RF perturbateur



Repère tournant ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, z$)

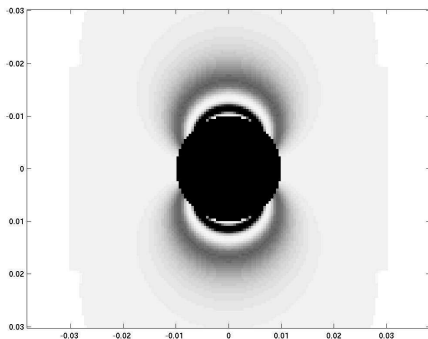
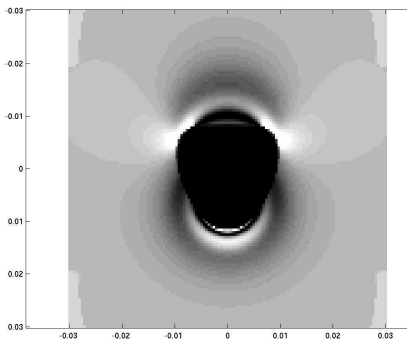


Repère du laboratoire (x, y, z)

Exemple de simulation numérique

Artefact engendré sur une image IRM

Simulation de l'artefact engendré par une bille de cuivre ($\sigma = 5.9 \cdot 10^7$, $\chi_m = -2 \cdot 10^{-5}$) de 1 cm de rayon soumise à un champ $B_0 = 1.5$ T et un champ RF d'intensité 10^{-3} T.



Conclusion et perspectives

- On dispose d'une méthode de résolution de l'équation de Bloch rapide et originale permettant d'obtenir la solution en un temps T donné sans passer par une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.
- On s'intéresse à présent à l'équation de Bloch-Torrey qui permet de prendre en compte des phénomènes de diffusion

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - \frac{M_x \mathbf{x} + M_y \mathbf{y}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \mathbf{z} \\ + \operatorname{div}(D(\mathbf{x}, t) \nabla \mathbf{M}(\mathbf{x}, t))$$