BORNES SUR LES DEGRÉS DYNAMIQUES D'AUTOMORPHISMES DE VARIÉTÉS KÄHLERIENNES DE DIMENSION 3

FEDERICO LO BIANCO

RÉSUMÉ. On étudie les degrés dynamiques des automorphismes des variétés compactes kählériennes de dimension 3 et, plus généralement, le type de croissance de la norme de $(f^n)^*$, où f^* désigne l'action de l'automorphisme f sur la cohomologie de X. Les automorphismes des tores montrent que les résultats obtenus sont optimaux.

ABSTRACT. I study the dynamical degrees of automorphisms of a compact Kähler varieties X of dimension 3 and, more generally, the type of growth of the norm of $(f^n)^*$, where f^* denotes the action of the automorphism f on the cohomology of X. The automorphisms of complex tori show that the results are optimal.

1. ENGLISH SUMMARIZED VERSION

Let (X,ω) be a compact Kähler variety of dimension d and f an automorphism of X. The action of f on the cohomology groups $H^k(X,\mathbb{Z})$ is denoted by f^* (resp. by f^*_k if we want to specify k) ; it preserves the Hodge decomposition

$$H^n(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \qquad H^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \overline{H^{q,p}(X,\mathbb{C})},$$

commutes with complex conjugation, and preserves the Serre duality.
The p-th **dynamical degree** $\lambda_p(f)$ of f is defined as the spectral radius of the induced linear application $f^*_{p,p}\colon H^{p,p}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,p}(X,\mathbb{C})$, i.e. as the maximum module of the eigenvalues of $f^*_{p,p}$. We can show that $\lambda_p(f)$ is a real eigenvalue of $f^*_{p,p}$ and that it is an eigenvalue of maximum module for f^*_{2p} (see [7]).

A result of Yomdin and Gromov links the dynamical degrees of f to its topological entropy $h(f)$:

$$h(f) = \max\{\log\lambda_p(f), \quad p = 0,\dots,d\}.$$

Giving contraints on the dynamical degrees can thus restrict the possible topological entropies.

If $d = 2$ (see [3]) one can exploit the invariance of the intersection product to prove that either $\lambda_1(f) = 1$ or $\lambda_1(f)$ and $\lambda_1(f)^{-1}$ are the only eigenvalues of f^*_2 whose module is different from 1 ; furthermore if $\lambda_1(f) = 1$ then either f^*_2 is periodic or the norm of $(f^*_2)^n$ grows quadratically for $n \to \infty$; finally, if $\lambda_1(f) > 1$, then f^*_2 is semi-simple. Examples on complex tori show the optimality of these results.
The aim of these notes is to find analogous results for $d = 3$.

The main tools for my study are Hodge's index theorem (in the version extended to all the cohomology spaces, see [5]) and Serre's duality.Here is a list of the main results

Theorem. *Let f be an automorphism of compact kähler manifold X of dimension 3. Let λ_i, $1 \le i \le 3$, denote the dynamical degrees of f.*

— *λ_1 is an algebraic integer and every Galois conjugate $\beta \in \mathbb{C}$ of λ_1 has a modulus $|\beta|$ in the set*

$$\left\{\lambda_1, \quad \frac{1}{\lambda_2}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \sqrt{\lambda_2}, \quad \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right\}.$$

Date: 27 février 2014.

— *If* α *is an eigenvalue of* $f_2^*\colon H^2(X,\mathbb{R}) \to H^2(X,\mathbb{R})$*, then there exist* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $|\alpha|^{(-2)^n} \in \{1, \lambda_1, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1}\lambda_2\}$

— *If* $\lambda_1 = 1$ *the norm* $||(f_2^*)^n||$ *grows like* n^k *for some integer* $k \leq 4$.

More precise results are stated below, and examples on complex tori show the optimality of these results.

2. Introduction

2.1. **Degrés dynamiques.** Soit X une variété complexe compacte kählérienne, d sa dimension, et f un automorphisme de X. L'action de f sur les groupes de cohomologie $H^k(X,\mathbb{Z})$ est notée f^* (resp. f_k^* si on veut préciser k) ; elle préserve la décomposition de Hodge

$$H^k(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,\mathbb{C}),$$

où $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ est le groupe de cohomologie de Dolbeault des formes de type (p,q), commute à la conjugaison complexe, et préserve la dualité donnée par

$$(\alpha,\beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

entre $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ et $H^{p',q'}(X,\mathbb{C})$, $p+p' = q+q' = d$. On note $H^{p,p}(X,\mathbb{R}) := H^{p,p}(X,\mathbb{C}) \cap H^{2p}(X,\mathbb{R})$, et $f_{p,p}^*\colon H^{p,p}(X,\mathbb{R}) \to H^{p,p}(X,\mathbb{R})$ l'action de f sur cet espace vectoriel. Pour $p \in \{0,\ldots,d\}$, le p-ième **degré dynamique** de f est le rayon spectral $\lambda_p(f)$ de l'application linéaire $f_{p,p}^*$; autrement dit, $\lambda_p(f)$ est le maximum des modules des valeurs propres de f^* sur $H^{p,p}(X,\mathbb{C})$. On peut montrer que (i) $\lambda_p(f)$ est une valeur propre réelle positive de $f_{p,p}^*$ et que (ii) $\lambda_p(f)$ coïncide avec le rayon spectral de f^* sur $H^{2p}(X,\mathbb{C})$. C'est donc un entier algébrique puisque f^* préserve la structure entière $H^{2p}(X,\mathbb{Z})$. (voir [7, 4] pour des démonstrations de ces résultats connus).

D'un point de vue dynamique, Gromov et Yomdin ont montré que l'entropie topologique $h_{top}(f)$ de $f\colon X \to X$ est égale au maximum des logarithmes des desgrés dynamiques. Notre but est d'établir certaines contraintes arithmétiques sur les degrés dynamiques lorsque $\dim(X) \leq 3$. Nos résultats fournissent donc des contraintes sur les entropies topologiques possibles (voir [9, 2] pour d'autres résultats du même type). Notre outil essentiel est le théorème de l'indice de Hodge.

2.2. **Surfaces.** En dimension 2, le théorème de l'indice de Hodge stipule que la forme d'intersection $(\alpha,\beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$ est une forme non dégénérée et de signature $(1, h^{1,1}(X)-1)$ sur $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$. Les automorphismes de X agissent par isométries vis-à-vis de cette forme. On en déduit aisément (voir [3]) que :

— l'application linéaire $f_2^*\colon H^2(X,\mathbb{R}) \to H^2(X,\mathbb{R})$ possède au plus deux valeurs propres de module différent de 1 : $\lambda_1(f) = \exp(h_{top}(f))$ et $\lambda_1(f)^{-1}$. Par conséquent, $\lambda_1(f)$ est soit égal à 1, soit un entier quadratique soit un nombre de Salem.

— si $\lambda_1(f) > 1$ alors f^* est semi-simple.

— si $\lambda_1(f) = 1$ alors f_2^* est virtuellement unipotente. De plus, soit f^* est périodique, soit la norme de $(f^*)^n$ croît comme $c^{te} n^2$ (il existe un unique bloc de Jordan non trivial, et il est de taille 3×3).

Nous allons étendre ce type de résultats en dimension 3, et utiliser l'exemples des automorphismes des tores pour montrer que nos énoncés sont optimaux.

2.3. **Dimension** 3**.** On suppose maintenant que $d = 3$. Commençons par la situation la plus simple, celle où $\lambda_1(f) = 1$; on a alors $\lambda_2(f) = 1$ et, quitte à considérer un itéré de f, f^* est unipotent. On note $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \ldots \geq k_l$ la taille des blocs de Jordan de f_2^*. La norme de $(f^n)_2^*$ croît comme n^{k_1-1} avec n ; par dualité de Serre la norme de $(f_4^*)^n$ a le même type de croissance.

Théorème 2.1. *Soit X une variété compacte kählerienne de dimension* 3*,* $f \in Aut(X)$ *un automorphisme de X. Si* $\lambda_1(f) = 1$*, alors la taille* k_1 *du bloc de Jordan maximal de* f_2^* *est égale à* 1, 3, *ou* 5 *et* $k_2 \leq (k_1+1)/2$*. En particulier, il n'y a qu'un bloc de taille* k_1 *et aucun bloc de taille* 4*.*

Supposons maintenant $\lambda_1(f) > 1$ et, pour simplifier, que f^* est semi-simple (mais les résultats restent vrais dans le cas général aussi). Soit $A \subset GL(H^2(X,\mathbb{R}))$ le groupe algébrique engendré par f_2^*. À indice fini près on a un isomorphisme de groupes de Lie réels

$$A \cong (\mathbb{R}^+)^r \times (\mathbb{S}^1)^s,$$

où r et s correspondent aux nombres de paramètres nécessaires pour décrire respectivement les modules et les arguments des valeurs propres de f_2^*. L'entier r est appelé **rang de** f et est noté $r(f)$. En dimension 2 on a $r(f) \leq 1$ pour tout automorphisme, alors que s peut être arbitrairement grand. Lorsque f^* n'est pas semi-simple, le rang est défini à partir de la partie semi-simple de f^*.

Théorème 2.2. *Soit X une variété compacte kählerienne de dimension 3, $f \in Aut(X)$ un automorphisme de X dont le premier degré dynamique $\lambda_1(f)$ est > 1. Notons λ_i pour $\lambda_i(f)$, $i = 1,2$. Alors*

- *le rang $r(f)$ de f est majoré par 2 ;*
- *$\lambda_1(f)$ et $\lambda_2(f)$ sont deux entiers algébriques > 1 ;*
- *les modules des conjugués de $\lambda_1(f)$ appartiennent à l'ensemble*

$$\left\{\lambda_1,\quad \lambda_2^{-1},\quad \lambda_1^{-1}\lambda_2,\quad \sqrt{\lambda_1^{-1}},\quad \sqrt{\lambda_2},\quad \sqrt{\lambda_1\lambda_2^{-1}}\right\};$$

- *Si λ est une valeur propre de f_2^*, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $|\lambda|^{(-2)^n} \in \left\{\lambda_1, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1}\lambda_2, 1\right\}$.*

Compléments au théorème 2.2.– Notons Λ la liste des valeurs propres de f_2^*, répétées suivant leurs multiplicités. En séparant les deux cas $r(f) = 2$ et $r(f) = 1$, nous pouvons donner des énoncés plus précis. Posons

$$\alpha_1 = \lambda_1(f), \quad \alpha_2 = \lambda_2(f)^{-1} = \lambda_1(f^{-1})^{-1}, \quad \alpha_3 = \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}.$$

• Si $r(f) = 2$ on montre alors qu'un des cas suivants est satisfait :

(1) α_1, α_2 et α_3 sont tous les trois cubiques et sans conjugués réels ;

(2) Quitte à renommer les α_i, α_1 est cubique sans conjugués réels ; α_2 et α_3 sont conjugués de degré $6k$ ($k \geq 1$), et leurs autres conjugués sont $2k-2$ nombres de module $1/\sqrt{\alpha_1}$, $2k$ de module $1/\sqrt{\alpha_2}$ et $2k$ de module $1/\sqrt{\alpha_3}$;

(3) α_1, α_2 et α_3 sont conjugués de degré $6k+3$ ($k \geq 0$), et leurs autres conjugués sont $2k$ nombres de module $1/\sqrt{\alpha_1}$, $2k$ de module $1/\sqrt{\alpha_2}$ et $2k$ de module $1/\sqrt{\alpha_3}$.

• Si $r(f) = 1$ on a les cas suivants :

(1) α_1 et α_2 sont tous les deux cubiques sans conjugués réels ;

(2) $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$, α_1 est conjugué à α_2 et leurs autres conjugués sont de module $\sqrt{\alpha_1}, 1$ ou $\sqrt{\alpha_2} = 1/\sqrt{\alpha_1}$.

• Si f_2^* n'est pas semi-simple mais $\lambda_1 > 1$, on montre que $\lambda_1(f) \in \{\lambda_2(f)^2, \lambda_2(f)^{1/2}\}$; en particulier $r(f) = 1$ et $\lambda_1(f)$ et $\lambda_2(f)$ sont tous les deux cubiques sans conjugués réels. De plus

(1) si $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$, alors la valeur propre $\lambda_2(f)^{-1}$ possède un bloc de Jordan non trivial de dimension $h \leq 3$; les autres valeurs propres dans Λ ayant des blocs non triviaux sont de module $\lambda_2(f)^{1/2} = \lambda_1(f)^{1/4}$, et leurs blocs sont de dimension au plus $h-1$ (en particulier au plus 2) ;

(2) de même, si $\lambda_1(f) = \sqrt{\lambda_2(f)}$, alors la valeur propre $\lambda_1(f)$ possède un bloc de Jordan non trivial de dimension $h \leq 3$; les autres valeurs propres dans Λ ayant des blocs non triviaux sont de module $\lambda_1(f)^{-1/2}$, et leurs blocs sont de dimension au plus $h-1$ (en particulier au plus 2).

3. Esquisses de preuves

Je montre ici le Théorème 2.1 et le premier point du Théorème 2.2. Les preuves complètes paraitront dans un article détaillé ; elles sont disponibles dans la prépublication [8].

3.1. **Théorème de l'indice de Hodge et dualité.** Les outils fondamentaux pour cette étude sont le théorème de l'indice de Hodge (dans la version étendue aux espaces $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$, voir [5]) et la dualité de Serre. Citons directement le corollaire du théorème de l'indice de Hodge qui nous servira :

Proposition 3.1. *Soit X une variété compacte kählerienne. Si $u,v \in S := H^{1,1}(X,\mathbb{C}) \cup (H^{0,2}(X,\mathbb{C}) \oplus H^{2,0}(X,\mathbb{C}))$ sont linéairement indépendants et $u \wedge \bar{u} = u \wedge \bar{v} = 0$, alors $v \wedge \bar{v} \neq 0$.*

Les propriétés de dualité utilisées peuvent être résumées ainsi. Si X est une variété compacte kählerienne de dimension 3 et $f \colon X \to X$ est un automorphisme de X, alors $f_2^* \colon H^2(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{C})$ est la duale (via dualité de Serre) de $(f_4^*)^{-1} \colon H^4(X,\mathbb{C}) \to H^4(X,\mathbb{C})$. En particulier, si Λ est la liste des valeurs propres de f_2^* (répétées avec multiplicités), alors l'ensemble des valeurs propres de f_4^* est $\Lambda^{-1} := \{\lambda^{-1}, \lambda \in \Lambda\}$. De même, si f_2^* est unipotent avec bloc de Jordan maximal de dimension k, alors f_4^* est aussi unipotent avec bloc de Jordan maximal de dimension k.

3.2. **Cas unipotent.** Supposons f^* unipotent. D'après § 3.1, la taille maximale pour les blocs de f_4^* est aussi égale à k_1 ; en particulier, $\| (f_4^*)^n(w) \| \leq c^{ste} n^{k_1-1}$. Notons $k = k_1$.

Soit $v_1, \dots v_k \in S \cap H^2(X,\mathbb{R}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$ une base pour un bloc de Jordan maximal de f_2^* telle que $f^* v_1 = v_1$ et $f^* v_{i+1} = v_{i+1} + v_i$ pour $i = 1, \dots k-1$. Supposons par l'absurde que $k \geq 6$. On remarque que

$$(f^*)^n(v_k \wedge v_k) = h_0 n^{2k-2}(v_1 \wedge v_1) + h_1 n^{2k-3}(v_1 \wedge v_2) + n^{2k-4}(a v_1 \wedge v_3 + b v_2 \wedge v_2) + o(n^{2k-4})$$

pour des constantes $h_0, h_1, a, b \in \mathbb{R}$. Comme $2k-4 > k$, on doit avoir

$$v_1 \wedge v_1 = v_1 \wedge v_2 = a v_1 \wedge v_3 + b v_2 \wedge v_2 = 0,$$

car sinon la taille de f_4^* serait $> k$. Le même calcul pour $(f^*)^n(v_{k-1} \wedge v_{k-1})$ montre que $c v_1 \wedge v_3 + d v_2 \wedge v_2 = 0$ pour d'autres constantes $c, d \in \mathbb{R}$ explicites. On montre que les équations obtenues sont indépendantes, ce qui implique $v_2 \wedge v_2 = 0$, en contradiction avec le théorème de l'indice de Hodge (cf. § 3.1). Ceci montre $k_1 \leq 5$.

Pour démontrer que k_1 est impair, on remarque que f_2^* (et son inverse) préservent le cône convexe saillant formé des classes de formes de Kähler. Les propriétés restantes du théorème 2.1 sont montrées par des arguments similaires.

Exemple 3.2. En prenant pour X le quotient de $\mathbb{C}^3$ par le réseau $(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])^3$, et pour f l'automorphisme induit par les transformations linéaires de $\mathbb{C}^3$ formée d'un unique bloc de Jordan, de taille 3, (resp. de deux blocs, l'un de taille 2 l'autre de taille 1), on trouve $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ sur $H^{1,1}(X,\mathbb{C})$ (resp. $k_1 = 3$, puis $k_2, k_3, k_4 = 2$).

3.3. **Cas semi-simple.** Dans le cas semi-simple, le théorème de l'indice de Hodge et la dualité de Serre donnent :

Proposition 3.3. *Si λ, λ' sont deux éléments de Λ, alors $\left\{ \frac{1}{|\lambda|^2}, \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}'}, \frac{1}{|\lambda'|^2} \right\} \cap \Lambda \neq \emptyset$.*

C'est le point de départ de la preuve du premier point du Théorème 2.2 : le module de chaque valeur propre λ de f_2^* donne un morphisme de groupes de Lie $A \to \mathbb{R}^+$ et donc, en appliquant l'isomorphisme exponentiel $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, une application linéaire $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, qu'on appelle le **poids** de λ. En notant L l'ensemble des poids des éléments de Λ, la Proposition 3.3 devient : si l et l' sont dans L, alors $\{-2l, -l-l', -2l'\} \cap L \neq \emptyset$. On construit ensuite par récurrence une base $l_1, \dots, l_r$ de $(\mathbb{R}^r)^\vee$ contenue dans L et une base $v_1 \dots, v_r$ de $\mathbb{R}^r$ telles que

(1) $|l_i(v_i)| = \max_{l \in L} |l(v_i)|$;

(2) si $i > j$ alors $l_i(v_j) = 0$.

Maintenant supposons par l'absurde que $r \geq 3$, et prenons deux bases comme ci-dessus. Par le point (1) on a $-2l_i \notin L$ pour tout $i = 1, \dots, r$, donc par la Proposition 3.3 $-l_1 - l_2, -l_1 - l_3 \in L$. En appliquant à nouveau la Proposition 3.3 on obtient $\{2l_1 + 2l_2, 2l_1 + l_2 + l_3, 2l_1 + 2l_2\} \cap L \neq \emptyset$, ce qui contredit le point (1) pour $i = 1$. On a donc montré que le rang de f est au plus 2.

La preuve des deux autres points du Théorème 2.2 passe par une analyse séparée des deux cas non triviaux $r(f)=1$ et $r(f)=2$.
À nouveau, le cas des tores montrent que le théorème 2.2 est essentiellement optimal.

Exemple 3.4. Si $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$est un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $p(0)=1$ et dont toutes les racines sont non-réelles, alors il existe un tore complexe X de dimension 3 et $f\in Aut(X)$ tel que f_1^* est semi-simple et que ses valeurs propres sont les racines de p. Comme pour un tore $H^2(X,\mathbb{Z})=\bigwedge^2 H^1(X,\mathbb{Z})$, l'arithmétique des valeurs propres de f_2^* se déduit du groupe de Galois de p.
Si on choisit $p(x)=x^6-x^5+x^3-x^2+1$ (resp. $p(x)=x^6+x^5+2x^4-x^3+2x^2-3x+1$, $p(x)=x^6+x^5+4x^4+x^3+2x^2-2x+1$) on a respectivement

— $r=2$; $\alpha_1=\lambda_1$ est conjugué à $\alpha_2=\lambda_2^{-1}$, à $\alpha_3=\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$, à deux couples de conjugués complexes de module $1/\sqrt{\alpha_1}$, deux de module $1/\sqrt{\alpha_2}$ et deux de module $1/\sqrt{\alpha_3}$;

— $r=2$; α_1 est cubique sans conjugués réels ; α_2 et α_3 sont conjugués, et leurs autres conjugués sont un couple de conjugués complexes de module $1/\sqrt{\alpha_1}$, deux couples de module $1/\sqrt{\alpha_2}$ et deux couples de module $1/\sqrt{\alpha_3}$;

— α_1, α_2 et α_3 sont tous les trois cubiques sans conjugués réels ; il n'est pas facile de déterminer si $r=1$ ou $r=2$.

3.4. **Dimension supérieure.** En dimension d, les résultats obtenus suggèrent que le rang $r(f)$ est majoré par $d-1$ et que le taux de croissance polynomial de $(f_2^*)^n$ est majoré par $2d-1$ lorsque f^* est virtuellement unipotente. Les arguments utilisés pour la dimension 3 ne s'appliquent pas directement en dimension supérieure, et il semble probable qu'il faille utiliser des propriétés plus profondes concernant l'invariance des cônes des formes positives dans $H^{k,k}(X,\mathbb{R})$.

Remerciements. Je remercie S. Cantat, qui m'a proposé de travailler sur ce sujet et m'a suggéré les techniques que j'ai utilisées pour les preuves ; je remercie aussi le Département de Mathématiques et Applications de l'ENS de Paris pour son hospitalité.

RÉFÉRENCES

[1] E. ARTIN, *Galois theory*, University of Notre Dame press, London, 1971

[2] J. BLANC & S. CANTAT, *Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces*, voir : arXiv :1307.0361, ou http ://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html

[3] S. CANTAT, *Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces*, dans *Frontiers in Complex Dynamics : a volume in honor of John Milnor's 80th birthday*, Princeton University Press, encore à publier, voir http ://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Articles/dyn-aut.pdf

[4] T.-C. DINH *Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires*, J. Geom. Anal. 15 (2005), no. 2, 207–227.

[5] T.-C. DINH & V.-A. NGUYÊN, *The mixed Hodge-Riemann bilinear relations for compact Kähler manifolds*, Geom. func. anal. Vol. 16 (2006), Birkhäuser Verlag, Basel, p. 838-849

[6] M. GROMOV, *Convex sets and Kähler manifolds*, Advances in differential geometry and topology, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990, p. 1-38

[7] V. GUEDJ, *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*, dans "Quelques aspects des systèmes dynamiques polynômiaux", Société Mathématique de France, 2010, p. 119-130

[8] F. LO BIANCO, *Bornes sur les degrés dynamiques d'automorphismes de variétés kählériennes : généralités et analyse du cas de la dimension 3* , Stage de M2 sous la direction de S. Cantat, E.N.S. Ulm, Sept. 2013, voir http ://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Documents/LoBianco-M2.pdf

[9] W. P. THURSTON, *Entropies in dimension one*, preprint, pages 1–37, 2012.