Automorphismes loxodromiques de surfaces abéliennes réelles

ZHAO ShengYuan *

Résumé

On étudie les automorphismes réels de degré dynamique >1 des surfaces complexes compactes munies d'une structure réelle. On montre qu'une surface possédant un tel automorphisme est projective. On classifie des surfaces abéliennes réelles en huit types, selon le nombre de composantes connexes de la partie réelle et la simplicité de la surface abélienne complexe sous-jacente. Pour chacun des huit types, on détermine l'ensemble des valeurs de degrés dynamiques qui peuvent être réalisées par des automorphismes réels. On montrera aussi que le degré dynamique minimum sur une surface K3 complexe ne peut pas être réalisée sur une surface K3 réelle.

Abstract

We study dynamical degree >1 real automorphisms of compact complex surfaces with a real structure. We show that a surface with such an automorphism is necessarily projective. We classify real abelian surfaces into eight types, according to the number of connected components of the real part and the simplicity of the underlying complex abelian surface. For each type, we determine the set of values of dynamical degrees which can be realized by real automorphisms. We also prove that the minimum dynamical degree on a complex K3 surface can not be realized on a real K3 surface.

1 Survol

Soit f un automorphisme (difféomorphisme holomorphe) d'une variété complexe compacte X. Notons $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{C})$ la somme des groupes de cohomologie de X. Le rayon spectral de f^* sur $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{C})$ est appelée le *degré dynamique (maximal)* de f, notée $\lambda(f)$. On dit que f est *loxodromique* si $\lambda(f)>1$. Par un théorème de Gromov[Gro03] et de Yomdin[Yom87], l'entropie toplogique de $f : X \to X$ est égale à $\log \lambda(f)$. Donc les automorphismes loxodromiques sont exactement les automorphismes à entropie positive.

Il se trouve que dans le cas des surfaces, le degré dynamique d'un automorphisme loxodromique est un nombre de Salem (voir [Can14]. D'habitude les

*École Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, 75005, Paris. szhao@clipper.ens.fr

nombres de Salem sont par définition les nombres algébriques de degré strictement supérieur à deux. Mais dans le contexte de dynamique des surfaces, on inclut souvent les entiers quadratiques). D'après un théorème de Cantat (voir [Can99] ou [Can14]), s'il existe un automorphisme loxodromique de X, alors il existe un morphisme birationnel de X vers un tore, une surface K3, une surface d'Enriques, ou le plan projectif. Si X n'est pas rationnelle, il existe un unique modèle minimal pour X, sur lequel f induit un automorphisme ; comme $\lambda(f)$ est un invariant de conjugaison birationnel, on peut supposer que X est un tore, une surface K3, ou une surface d'Enriques.

Que peut-on dire des valeurs de degrés dynamiques sur un type de surfaces et des relations entre ces valeurs et la géométrie des surfaces ? Pour des réponses concernant cette question, voir [McM02], [Res12], [Res17] dans le cas des tores, [McM02], [McM11], [McM16], [BGA16] dans le cas des surfaces K3, [McM07], [Ueh16] dans le cas des surfaces rationnelles et [Ogu10] dans le cas des surfaces d'Enriques. On étudie ici ce problème pour les surfaces munies d'une structure réelle et pour les automorphismes réels. On traite notamment le cas des tores et on donne une réponse complète dans ce cas.

Structures réelles. Soit X une surface complexe compacte. Une *structure réelle* sur X est par définition une involution anti-holomorphe $\mathcal{S}$ sur X. Quand X est projective, cela coïncide avec la notion usuelle pour les variétés algébriques. La partie réelle notée $X(\mathbb{R})$ définie par $\{x \in X, \mathcal{S}(x) = x\}$ est une sous-variété différentielle de X. Un *automorphisme réel* de X est par définition un automorphisme de X commutant avec $\mathcal{S}$. Voir [Sil89] pour les détails sur la structure réelle.

Si X est kählérienne, le *réseau transcendant* $T(X)$ de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ est par définition le plus petit sous $\mathbb{Z}-$module de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ dont le produit tensoriel avec $\mathbb{C}$ contient $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$. On a alors $T(X) \oplus NS(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ et $(T(X) \oplus NS(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C})$, où $NS(X)$ est le groupe de Néron-Severi de X.

Théorème 1.1 *Soit $(X, \mathcal{S})$ une surface kählérienne compacte à fibré canonique trivial (un tore ou une surface K3) munie d'une structure réelle. Soit f un automorphisme loxodromique réel de X. Alors X est projective et f^* agit comme* $\pm\mathrm{Id}$ *sur le réseau transcendant $T(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$.*

Puisque les surfaces rationnelles et les surfaces d'Enriques sont toutes projectives, par le théorème de Cantat mentionné précédemment on a :

Corollaire 1.2 *Si une surface compacte X munie d'une structure réelle admet un automorphisme loxodromique réel, alors X est projective.*

Surfaces abéliennes. Si un tore complexe est muni d'une structure réelle, un choix particulier de la matrice des périodes permet de le décrire explicitement.

Théorème 1.3 (Comessatti [Sil82]) *Soit X un tore complexe de dimension q. Il existe une structure réelle $(X, \mathcal{S})$ sur X si et seulement si X admet une matrice des périodes de la forme $\Omega = (I_q, \frac{1}{2}J + iT)$, où I_q est la matrice* *identité,* $T \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$*,* $i^2 = -1$ *et* J *est de la forme* $\begin{pmatrix} I_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $\mu = \dim(1+\mathcal{S})\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$*. On dit que* μ *est le nombre de Comessatti de* X*.*

Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$*, alors* $(X, \mathcal{S})$ *est réellement équivalent à* $(\mathbb{C}^q/[\Omega], \sigma)$ *où* σ *est la conjugaison complexe et* $[\Omega]$ *est le réseau dans* $\mathbb{C}^q$ *engendré par les colonnes de* Ω*. Dans ce cas* $X(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie réel compact dont la topologie est déterminée par son nombre de Comessatti :* $X(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q \times (\mathbb{Z}/2)^{q-\mu}$*.*

Si $X(\mathbb{R}) = \emptyset$*,* $(X, \mathcal{S})$ *est réellement équivalent à* $(\mathbb{C}^q/[\Omega], t_v\sigma)$ *où* t_v *est la translation par un élément* $v \neq 0$ *tel que* $\sigma(v) = -v$*.*

Ce théorème est traité dans [Sil82], [Sil89] pour des variétés abéliennes, mais la même démonstration s'applique à tous les tores complexes. La partie réelle d'une surface abélienne admet donc $0, 1, 2$ ou 4 composantes connexes.

Exemple 1.4 1) Posons $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 + ti & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 + ti \end{pmatrix}$ où t est un réel strictement positif. Alors $(\mathbb{C}^2/[\Omega], \sigma)$ est un produit de deux coubes elliptiques identiques. Le nombre de Comessatti est $\mu = 2$; sa partie réelle est connexe.
2) Posons $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ti & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ti \end{pmatrix}$ où t est un réel strictement positif. Le nombre de Comessatti de $(\mathbb{C}^2/[\Omega], \sigma)$ est 0 ; sa partie réelle a quatre composantes connexes.

La condition que le degré dynamique est > 1 pose une contrainte sur la structure complexe :

Proposition 1.5 *Une surface abélienne qui admet un automorphisme loxodromique est soit simple soit isogène à un produit de deux courbes elliptiques identiques.*

Définition 1.6 *On dit qu'un entier algébrique quadratique* $\lambda > 1$ *est admissible si* $\lambda + \lambda^{-1} + 2$ *ou* $\lambda + \lambda^{-1} - 2$ *est le carré d'un entier positif* η*. On dit que* λ *est pair si* η *est pair.*

Théorème 1.7 *Si* $\lambda > 0$ *est le degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne, alors* λ *est un entier quadratique admissible.*

Si on divise l'ensemble des surfaces abéliennes réelles en huit types, selon le nombre de composantes connexes de la partie réelle et selon la simplicité de la surface abélienne complexe adjacente, alors le tableau suivant détermine si un entier quadratique admissible peut être réalisé par une surface abélienne réelle d'un des huit types :

	simple	*isogène à un produit de courbes elliptiques*
$\emptyset$	*pair*	*pair*
1 composante	*tous*	*tous*
2 composantes	*pair*	*pair*
4 composantes	*tous*	*tous*

En particulier, tout entier quadratique admissible est le degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne réelle.

Remarque 1.8 Pour une surface donnée, il peut y avoir des entiers quadratiques admissibles qui ne sont pas réalisés, mais ils sont réalisés sur des surfaces du même type que celle qui est donnée.

Remarque 1.9 Moins de valeurs de degrés dynamiques sont réalisées dans le cas réel que dans le cas complexe (voir [Res12]). En particulier le minimum pour les tores munis d'une structure réelle qui est aussi le minimum pour les surfaces abéliennes réelles (racine de $x^2 - 3x + 1$) est strictement plus grand que le minimum pour les tores complexes (le nombre de Salem minimal de degré six, racine de $x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$) et que le minimum pour les surfaces abéliennes complexes (le nombre de Salem minimal de degré quatre, racine de $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$) (voir [Res12], [Res17]).

Remarque 1.10 Les valeurs de degré dynamique dépendent de la topologie de la partie réelle mais pas de la simplicité de la surface complexe sous-jacente. Pourtant dans le cas complexe il y a des nombres quadratiques qui ne sont réalisés que sur des surfaces isogènes à un produit de courbes elliptiques (voir [Res17]).

Surfaces K3. En chaque degré pair d, il existe un nombre de Salem minimum de degré d noté λ_d. Le nombre de Salem le plus petit qu'on connaît est λ_{10}, appelé le nombre de Lehmer. Puisque $\dim(\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}))$ est 22 pour une surface K3, le degré dynamique d'un automorphisme loxodromique d'une surface K3 est un nombre de Salem de degré inférieur à 22. McMullen a réalisé λ_{10} sur une surface K3 projective dans [McM16]. Il existe des surfaces K3 réelles possédant des automorphismes loxodromiques réels, voir [Can14] pour un exemple explicite. On remarque aussi qu'en passant aux surfaces de Kummer associées aux surfaces abéliennes réelles, on peut aussi réaliser certains entiers quadratiques. Le résultat suivant est un corollaire des travaux de McMullen :

Théorème 1.11 *Les nombres de Salem $\lambda_{10}, \lambda_{14}, \lambda_{16}, \lambda_{18}, \lambda_{20}$ et λ_{22} ne peuvent pas être réalisés sur des surfaces K3 réelles.*

Remarque 1.12 Parmi les nombres de Salem de degré inférieur à 22, $\lambda_{10} < \lambda_{18} < \lambda_{14}$ sont les trois plus petits. Le quatrième plus petit qui est aussi de degré 14 ne peut pas être réalisé sur une surface K3 complexe projective (voir [McM]), donc non plus sur une surface K3 réelle. Comme dans le cas des surfaces abéliennes, le minimum complexe n'est pas le minimum réel.

Question ouverte 1.13 Quel est le degré dynamique minimum d'un automorphisme réel d'une surface K3 réelle ? La méthode de McMullen rencontre des difficultés dans le cas réel. Premièrement quand on recolle les sous-réseaux, il faut recoller les actions de f^* et de $\mathcal{S}^*$ simultanément, ce qui n'est pas contrôlé par le théorème 4.1 de [McM16]. Deuxièmement f^* préserve le cône de Kähler tandis que $\mathcal{S}^*$ le renverse, il faut un test de positivité qui s'applique simultanément à deux actions.

Remerciement Je remercie Serge Cantat d'avoir encadré les travaux présentés dans ce texte et de nombreuses discussions joviales. Je remercie aussi le rapporteur anonyme pour ses remarques qui permettent à améliorer cet article.

2 Démonstration du théorème 1.1

Démonstration La forme d'intersection est de signature $(2,0)$ sur $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$. f^* et $\mathcal{S}^*$ préservent la forme d'interserction. $\mathcal{S}^*$ échange $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ et $\mathrm{H}^{0,2}(X)$; f^* les préserve. Soit α la valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)$, alors $\bar{\alpha}$ est la valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{0,2}(X)$. Soit u un vecteur qui engendre $\mathrm{H}^{2,0}(X)$; $\mathcal{S}^*(u)$ engendre alors $\mathrm{H}^{0,2}(X)$. Dans la base $(u, \mathcal{S}^*(u))$ de $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$, les matrices de f^* et $\mathcal{S}^*$ s'écrivent $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque f et $\mathcal{S}$ commutent, on en déduit que α est réel. Or α est sur le cercle unité, donc $\alpha = \pm 1$. Ceci prouve que X est projective par le lemme suivant.

Lemme 2.1 (voir [Res17]) *Soit f un automorphisme d'une surface kählérienne compacte X. Supposons que $\lambda(f) > 1$ et notons P le polynôme minimal de $\lambda(f)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Toute racine de P est une valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$;
2) X est projective.

De plus, 1 ou -1 est la seule racine du polynôme caractéristique de f^* sur $T(X)$ car sinon il existerait un sous $\mathbb{Z}-$module strict de $T(X)$ dont le produit tensoriel avec $\mathbb{C}$ contiendrait $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$, ce qui contredirait la minimalité de $T(X)$. Ceci termine la démonstration. □

3 Simplicité et méthode de Ruppert

3.1 Démonstration de la proposition 1.5

Démonstration Soit X une surface abélienne isogène à $X_1 \times X_2$ où X_1, X_2 sont deux courbes elliptiques non isogènes. Le degré dynamique d'un automorphisme est égale à celle de sa partie linéaire. La partie linéaire de tout automorphisme de X doit préserver les images de $X_1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times X_2$. Puisque tout automorphisme d'une courbe elliptique est d'ordre fini, les valeurs propres de l'action d'un automorphisme sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ sont des racines d'unité, ce qui empêche que le degré dynamique soit > 1. □

3.2 Méthode de Ruppert

On dispose d'une méthode due à Ruppert pour déterminer la simplicité d'une surface abélienne (voir [Rup90]). Soit $\mathbb{C}^2/\Lambda$ une surface abélienne. On lui associe une forme alternée $\alpha : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ définie par $\alpha(u,v) = \det(u,v)$. La forme α s'étend sur $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$. On dit qu'elle est *hyperbolique sur* $\mathbb{Q}$ si $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ est somme directe de deux sous-espaces isotropes, autrement dit, s'il existe une base $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ de $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ telle que $\alpha(\omega_1, \omega_2) = \alpha(\omega_3, \omega_4) = 0$.

Proposition 3.1 ([Rup90]) *La surface abélienne $\mathbb{C}^2/\Lambda$ est isogène à un produit de deux courbes elliptiques si et seulement si α est hyperbolique sur $\mathbb{Q}$.*

L'image $\alpha(\Lambda \times \Lambda)$ engendre un $\mathbb{Z}$-module libre inclu dans $\mathbb{C}$ de rang r ; on appelle r le rang de α. Si $z_1, z_2, \ldots, z_r$ est une base du $\mathbb{Z}$-module engendré par $\alpha(\Lambda \times \Lambda)$, on peut décomposer α en

$$\alpha(u,v) = \alpha_1(u,v)z_1 + \alpha_2(u,v)z_2 + \cdots + \alpha_r(u,v)z_r$$

avec les formes alternées $\alpha_i : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$.

Proposition 3.2 ([Rup90]) *Pour une surface abélienne $\mathbb{C}^2/\Lambda$, le rang de α ne peut être que $2, 3, 4$ ou 5. Si le rang est 2, alors α est hyperbolique sur $\mathbb{Q}$. Si le rang est 5, alors α n'est pas hyperbolique sur $\mathbb{Q}$.*

L'hyperbolicité de la forme α porte sur les sous-espaces de dimension deux, nous allons considérer la grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$; c'est la quadrique de Plücker Q dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2(\Lambda \otimes \mathbb{C}))$ définie par $X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0$ où $(X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$ est un système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(\wedge^2(\Lambda \otimes \mathbb{C}))$ associées à une base de Λ : prenons (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de Λ, chaque X_{ij} correspond à $u_i \wedge u_j$. Dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), chaque forme α_i est représentée par une matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$. On lui associe l'hyperplan H_i dans $\mathbb{P}^5$ défini par $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij}X_{ij} = 0$. Puisque les formes α_i sont linéairement indépendantes, l'intersection $E(\alpha) = \cap_{1 \leqslant i \leqslant r} H_i$ est un $(5-r)$-plan dans $\mathbb{P}^5$.

Proposition 3.3 ([Rup90]) *La forme α est hyperbolique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il existe deux points rationnels $q_1 \neq q_2$ dans $Q \cap E(\alpha)$ tels que la droite passant par q_1 et q_2 n'est pas incluse dans Q.*

4 Démonstration du théorème 1.7

4.1 Automorphismes réels

Soit X un tore complexe de dimension deux muni d'une structure réelle $\mathcal{S}$. Par le théorème 1.3, on peut supposer que X est donnée par un réseau explicite $[\Omega]$ dans $\mathbb{C}^2$; on garde les notations de ce théorème avec désormais $q = 2$.

Soit f un automorphisme réel ; il vérifie $f \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ f$. On écrit f sous la forme $f(x) = \phi_f(x) + w_f$ où $w_f \in X$ et ϕ_f est représenté par une matrice $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det F| = 1$. On peut considérer X comme un tore réel de dimension quatre, alors f et $\mathcal{S}$ peuvent être relevés en applications affines de $\mathbb{R}^4$. En identifiant $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^4$, les parties linéaires de ces deux applications affines de $\mathbb{R}^4$ sont données par F et la conjugaison complexe. Les parties linéaires de ces deux applications affines commutent parce que f et $\mathcal{S}$ commutent. On en déduit que F vérifie que $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\det F = \pm 1$.

Proposition 4.1 *Supposons que l'automorphisme réel f est loxodromique. Alors X est une surface abélienne. De plus le degré dynamique $\lambda(f)$ est un entier quadratique admissible.*

Démonstration X est une surface abélienne par le théorème 1.1. On note γ_1, γ_2 les deux valeurs propres complexes de la matrice F.

Le groupe d'homologie $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ s'identifie canoniquement au réseau $[\Omega]$. Par cette identification et par l'inclusion $[\Omega] \cong \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, puis par dualité de Poincaré, l'action de f sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ est donnée par $F^T \oplus \bar{F}^T$. Les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$ sont pareils. Les valeurs propres de $f^* : \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$ sont donc $\gamma_1, \gamma_2, \bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}$ et celles de $f^* : \mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}) \to \mathrm{H}^2(X,\mathbb{C})$ sont $|\gamma_1|^2, |\gamma_2|^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_1}\gamma_2, \overline{\gamma_1\gamma_2}$.

Puisque le degré dynamique de f est supposé plus grand 1, on a

$$\max(|\gamma_1|, |\gamma_2|) > 1. \tag{1}$$

On note η la trace de F. Le polynôme caractéristique de F est $x^2 - \eta x \pm 1$; celui de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ est $(x^2-\eta x \pm 1)^2 = x^4 + 2\eta x^3 + (\eta^2 \pm 2) \pm 2\eta x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Cela implique que $\eta \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$\gamma_1\gamma_2 = \det(F) = \pm 1 \quad \text{et} \quad (\gamma_1 + \gamma_2) = \eta \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

En tant que valeurs propres d'une matrice réelle, γ_1 et γ_2 sont soit tous réels soit complexes conjugués. S'ils étaient complexes conjugués, (2) et (1) ne pourraient pas être réalisées simultanément. Par conséquent γ_1 et γ_2 sont tous réels.

On récapitule les relations obtenues. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|\gamma_1| > |\gamma_2|$, alors $\lambda(f) = \gamma_1^2$.

Si $\det(F) = 1$, alors $\lambda(f) + 1/\lambda(f) + 2 = (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \eta^2$, et les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ et sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ sont respectivement $P(x) = (x^2 - \eta x + 1)^2$ et $Q(x) = (x-1)^4(x^2 - (\eta^2 - 2)x + 1)$.

Si $\det(F) = -1$, alors $\lambda(f) + 1/\lambda(f) - 2 = (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \eta^2$, et les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ et sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ sont $P(x) = (x^2 - \eta x - 1)^2$ et $Q(x) = (x+1)^4(x^2 - (\eta^2 + 2)x + 1)$. □

Remarque 4.2 On se trouve alors dans le cas 3a du théorème 1.1 de [Res17].

Remarque 4.3 $\det(F)$ et η déterminent $\lambda(f)$ et vice versa.

Dans la suite, on suppose donné un entier quadratique admissible λ (de manière équivalente $\eta \in \mathbb{Z}$ et $\det(F) = \pm 1$, ou encore de manière équivalente γ_1 et γ_2) et on cherche un automorphisme réel f tel que $\lambda(f) = \lambda$.

4.2 Produit de deux courbes elliptiques avec $\mu = 0$ ou 2

On garde toujours les notations des sections précédentes. Si $X = E \times E$ est un produit de courbes elliptiques réelles identiques, alors toute matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ donne un automorphisme réel de X via

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathrm{End}(E)).$$

Un entier quadratique admissible λ est déterminé par son polynôme minimal $X^2 - (\eta^2 \pm 2) + 1$. Il existe toujours une matrice $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ dont le polynôme caractéristique est le polynôme minimal de λ. Une telle F donne lieu à un automorphisme réel de degré dynamique λ. L'exemple 1.4 fournit de telles surfaces X dont le nombre de Comessatti est 0 ou 2. Tous les entiers quadratiques admissibles sont donc réalisés dans ces cas.

4.3 Surfaces abéliennes simples avec $\mu = 0$ ou 2

Posons $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & z_1 & \gamma_1 z_1 \\ 1 & \gamma_2 & z_2 & \gamma_2 z_2 \end{pmatrix}$ où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Supposons que les vecteurs colonnes de Γ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$ (nous les préciserons plus tard) ; la matrice Γ définit un réseau $[\Gamma]$. La matrice $F = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ agit sur le réseau $[\Gamma]$ par

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(F) & & \\ 1 & \eta & \multicolumn{2}{c}{\smash{\raisebox{.5\normalbaselineskip}{0}}} \\ \multicolumn{2}{c}{\raisebox{-.5\normalbaselineskip}{0}} & 0 & -\det(F) \\ & & 1 & \eta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}).$$

Ainsi F donne un automorphisme de $X = \mathbb{C}^2/[\Gamma]$ de degré dynamique λ. Cet exemple est aussi considéré par [Res17]. Nous montrons maintenant qu'avec un choix convenable du couple (z_1, z_2), cette construction permet de réaliser λ sur une surface abélienne simple réelle dont le nombre de Comessatti est 0 ou 2. On note u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs colonnes de Γ.

4.3.1 $\mu = 0$

On pose $z_1 = i,\ z_2 = ti$ où t est un réel transcendant sur $\mathbb{Q}$. $[\Gamma]$ est invariant sous la conjugaison complexe σ et l'automorphisme associé à F est réel. On a donc réalisé λ sur (X, σ).

Le nombre de Comessatti est défini par $\mu = \dim(1+\sigma)\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$. Le groupe $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $[\Gamma]/2[\Gamma]$ comme G-module avec $G = \{1, \sigma\}$. Les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont envoyés par $(1+\sigma)$ à $(2,2), (2\gamma_1, 2\gamma_2), (0,0), (0,0)$, qui sont tous nuls modulo $2[\Gamma]$. Donc $\mu = 0$.

On applique maintenant la méthode de Ruppert. La forme alternée α associée à X est déterminée par

$$\alpha(u_1, u_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \gamma_2 - \gamma_1 \qquad \alpha(u_1, u_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & ti \end{pmatrix} = (t-1)i$$

$$\alpha(u_1, u_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 i \\ 1 & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = (\gamma_2 t - \gamma_1)i \qquad \alpha(u_2, u_3) = \det\begin{pmatrix} \gamma_1 & i \\ \gamma_2 & ti \end{pmatrix} = (\gamma_1 t - \gamma_2)i$$

$$\alpha(u_2, u_4) = \det\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 i \\ \gamma_2 & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2(t-1)i \quad \alpha(u_3, u_4) = \det\begin{pmatrix} i & \gamma_1 i \\ ti & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = (\gamma_1 - \gamma_2)t.$$

D'où

$$\alpha(u,v) = \alpha_1(u,v)(\gamma_2-\gamma_1) + \alpha_2(u,v)(\gamma_1-\gamma_2)t + \alpha_3(u,v)\frac{(\gamma_2 t - \gamma_1)i}{\eta} + \alpha_4(u,v)\frac{(\gamma_1 t - \gamma_2)i}{\eta}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont données dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) par

$$\alpha_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & -\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \gamma_1\gamma_2 \\ -1 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles définissent les hyperplans H_i dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2([\Gamma] \otimes \mathbb{C}))$:

$$H_1 : \ X_{12} = 0 \qquad H_3 : \ X_{13} + \eta X_{14} + (\gamma_1\gamma_2)X_{24} = 0$$
$$H_2 : \ X_{34} = 0 \qquad H_4 : \ X_{13} + \eta X_{23} + (\gamma_1\gamma_2)X_{24} = 0.$$

La grassmannienne est définie par $X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0$. On calcule l'intersection de ces hyperplans et la grassmannienne ; en éliminant les variables $X_{12}, X_{13}, X_{23}, X_{34}$, c'est une quadrique dans $\mathbb{P}^1$ définie par

$$X_{14}^2 + \eta X_{14}X_{24} + \gamma_1\gamma_2 X_{24}^2 = 0. \tag{3}$$

avec $\gamma_1\gamma_2$ égal à 1 ou -1. Le discriminant est $\eta^2 - 4\gamma_1\gamma_2$; ce n'est jamais le carré d'un entier positif. La quadrique (12) n'a pas deux points rationnels distincts. La surface abélienne X est donc simple par la proposition 3.3.

4.3.2 $\mu = 2$

On pose $z_1 = \frac{1}{2} + ri, \ z_2 = \frac{1}{2} + si$ où r, s sont deux réels qui engendrent une extension transcendante de $\mathbb{Q}$ de degré deux. Comme précédemment λ peut être réalisé. Les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont envoyés par $(1+\sigma)$ à $2u_1, 2u_2, u_1, u_2$, qui engendrent un sous espace de dimension deux modulo $2[\Gamma]$. On en déduit que $\mu = 2$. On montre que X est simple comme précédemment en utilisant la méthode de Ruppert ; les calculs sont similaires.

4.4 Le cas où $\mu = 1$

Considérons une surface abélienne réelle $(X, \mathcal{S})$ dont le nombre de Comessatti est $\mu = 1$, on l'écrit sous la forme standard $\mathbb{C}^2/[\Omega]$ où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} + t_{11}i & t_{12}i \\ 0 & 1 & t_{21}i & t_{22}i \end{pmatrix}$$

avec $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On note u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs colonnes de la matrice Ω.

Supposons maintenant que l'on a un automorphisme loxodromique réel qui correspond à une matrice $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(F) = \eta$. Nous allons examiner les conditions sur F imposées par le fait que F préserve le réseau $[\Omega]$. Les vecteurs $F(u_1), F(u_2)$ sont des combinaisons linéaires des u_1, u_2, u_3, u_4 à coefficients entiers. On remarque que $F(u_1)$ et $F(u_2)$ sont à coordonnées réelles tandis que les parties imaginaires de u_3 et u_4 sont linéairement indépendantes car la matrice T est inversible, on en déduit que $F(u_1), F(u_2)$ sont en fait des combinaisons linéaires à coefficients entiers de u_1, u_2. C'est-à-dire que F préserve le sous-réseau engendré par u_1, u_2, ce qui implique que $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. On regarde ensuite

$$(F(u_3), F(u_4)) = \begin{pmatrix} a/2 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix} + FTi. \tag{4}$$

Parmi u_1, u_2, u_3, u_4, seul u_2 contribue à la partie réelle de la seconde coordonnée. Ainsi pour que $F(u_3)$ soit une combinaison à coefficients entiers des u_1, u_2, u_3, u_4, on a forcément

$$c \equiv 0 \bmod 2 \tag{5}$$

On écrit $F(u_3), F(u_4)$ comme combinaison à coefficients entiers des u_1, u_2, u_3, u_4

$$F(u_3) = m_1 u_1 + n_1 u_2 + p u_3 + q u_4 \tag{6}$$
$$F(u_4) = m_2 u_1 + n_2 u_2 + r u_3 + s u_4, \tag{7}$$

on prend ensuite leurs parties imaginaires

$$\Im(F(u_3)) = p\Im(u_3) + q\Im(u_4)$$
$$\Im(F(u_4)) = r\Im(u_3) + s\Im(u_4),$$

puis on obtient par l'équation (4) : $FT = T \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ car $\Im(u_3, u_4) = Ti$. D'où

$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}). \tag{8}$$

En regardant respectivement la partie réelle de la première coordonné de $F(u_4)$ et de $F(u_3)$ dans les équations (6), (7), il faut que

$$r \equiv 0 \bmod 2 \tag{9}$$
$$p - a \equiv 0 \bmod 2. \tag{10}$$

$\det(F) = \pm 1$ et la condition (5) impliquent que a est impair. La condition (8) implique que $\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \det(F) = \pm 1$. Puisque r est pair par (9), on en déduit que p est impair. Ainsi la condition (10) est redondante. Réciproquement il est facile de voir qu'une matrice F satisfaisant toutes les conditions précédentes préserve le réseau. En résumé,

Proposition 4.4 *Soit F une matrice qui représente un automorphisme réel de X. Alors $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ représente un automorphisme réel de X est :*

1. *c est un entier pair ;*
2. *$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ est à coefficients entiers et r est pair.*

$\det(F) = ad - bc = \pm 1$ implique que a, d sont impairs puisque c est pair. Ainsi $\eta = \mathrm{Tr}(F) = a + d$ est pair. On a donc montré :

Proposition 4.5 *Le degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne réelle dont $\mu = 1$ est un entier quadratique admissible pair (dans le sens de la définition 1.6).*

4.4.1 Produits de deux courbes elliptiques

Considérons $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ce sont les T les plus simples pour qui $T^{-1}FT$ est à coefficients entiers. Dans ce cas, on calcule : $r = t_{22}(at_{12} + bt_{22} - dt_{12}) - ct_{12}^2$. En particulier, si t_{22} et c sont tous pairs, alors les conditions de la proposition 4.4 sont vérifiées. Pour η un nombre pair et $\det(F) = \pm 1$ prescrits (qui déterminent un entier quadratique admissible pair λ), on pose :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix} \text{ si } \det(F) = 1, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix} \text{ si } \det(F) = -1.$$

Les conditions de la proposition 4.4 étant satisfaites, tous les entiers quadratiques pairs sont réalisés. Puisque les coefficients de T sont entiers, on vérifie facilement que le rang de la forme alternée associée à X égale à deux. Cela implique que X est isogène (en fait isomorphe, voir [Rup90] pour un renforcement de la proposition) à un produit de courbes elliptiques par la proposition 3.2.

4.4.2 Surfaces abéliennes simples

Pour trouver des surfaces abéliennes simples, il faut exploiter plus la condition (8). La proposition suivante nous décrit tous les candidats de T.

Proposition 4.6 *On fixe $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ une matrice associée à un automorphisme loxodromique d'une surface abélienne. Soit $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $T^{-1}FT$ est à coefficients entiers. Alors T s'écrit sous la forme*

$$T = (\theta F + \xi)P, \ \theta, \xi \in \mathbb{R}, \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

Démonstration Si $T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ est semblable à F sur $\mathbb{R}$, donc semblable à F sur $\mathbb{Q}$: il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$

telle que $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = P^{-1}FP$. On en déduit que $F = PT^{-1}FTP^{-1}$. C'est-à-dire que F commute avec TP^{-1}. La proposition découle ensuite du fait classique suivant : si le polynôme minimal d'une matrice réelle A est égal à son polynôme caractéristique, alors toute matrice réelle qui commute avec A est un polynôme en A. Dans notre cas, l'hypothèse est vérifiée parce que F admet deux valeurs propres distinctes. $\square$

On prescrit comme toujours un entier pair η et $\det(F) = \pm 1$ qui déterminent un entier quadratique admissible pair λ. Nous allons d'abord construire des surfaces abéliennes réelles qui réalisent λ ; puis nous montrons qu'elles sont simples.
étape I. On prend d'abord deux réels $\theta, \xi \in \mathbb{R}$ transcendants, par exemple $\theta = \pi, \xi = \pi^\pi$.

1. Dans le cas où $\det(F) = 1$, on pose $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix}$ et

   $T = (\theta F + \xi)P$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Alors $T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{\eta-2}{2} & \eta - 1 \end{pmatrix}$.
2. Dans le cas où $\det(F) = -1$, on pose $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix}$,

   $T = (\theta F + \xi)P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Alors $T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{\eta}{2} & \eta - 1 \end{pmatrix}$.

Les conditions de la proposition 4.4 sont satisfaites ; on obtient une surface abélienne réelle avec un automorphisme réel dont le degré dynamique est λ.
étape II. Il reste à montrer que la surface abélienne réelle $(X, \mathcal{S})$ ainsi construite est simple. On traite le cas où $\det(F) = 1$ en utilisant la méthode de Ruppert. Dans ce cas on a $T = \begin{pmatrix} \theta b & \theta(a + 2b) + \xi \\ \theta d + \xi & \theta(c + 2d) + 2\xi \end{pmatrix}$.

Les valeurs de la forme alternée α pour la base u_1, u_2, u_3, u_4 sont :

$$\begin{aligned}
\alpha(u_1, u_2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\alpha(u_1, u_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \theta bi \\ 0 & (\theta d + \xi)i \end{pmatrix} = (\theta d + \xi)i \\
\alpha(u_1, u_4) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (\theta(a+2b) + \xi)i \\ 0 & (\theta(c+2d) + 2\xi)i \end{pmatrix} = (\theta(c+2d) + 2\xi)i \\
\alpha(u_2, u_3) &= \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \theta bi \\ 1 & (\theta d + \xi)i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \theta bi \\
\alpha(u_2, u_4) &= \det \begin{pmatrix} 0 & (\theta(a+2b) + \xi)i \\ 1 & (\theta(c+2d) + 2\xi)i \end{pmatrix} = -(\theta(a+2b) + \xi)i \\
\alpha(u_3, u_4) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \theta bi & (\theta(a+2b) + \xi)i \\ (\theta d + \xi)i & (\theta(c+2d) + 2\xi)i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2}\alpha_1(u, v) + \alpha_2(u, v)\theta i + \alpha_3(u, v)\xi i + \alpha_4(u, v)\alpha(u_3, u_4)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont données dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) par

$$\alpha_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & c+2d \\ 0 & 0 & -b & -(a+2b) \\ -d & b & 0 & 0 \\ -(c+2d) & a+2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles définissent les hyperplans H_i dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2([\Omega] \otimes \mathbb{C}))$:

$H_1 :\ 2X_{12} - X_{23} = 0$

$H_2 :\ dX_{13} + (c+2d)X_{14} - bX_{23} - (a+2b)X_{24} = 0$

$H_3 :\ X_{13} + 2X_{14} - X_{24} = 0$

$H_4 :\ X_{34} = 0.$

La grassmannienne est définie par $Q :\ X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0.$

On calcule l'intersection de ces hyperplans avec la grassmannienne ; en éliminant les variables $X_{12}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$, c'est une quadrique dans $\mathbb{P}^1$ définie par

$$bX_{13}^2 + (a + 4b - d)X_{13}X_{14} + (2a + 4b - c - 2d)X_{14}^2 = 0. \tag{11}$$

On avait posé $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix}$. Donc (11) s'écrit

$$\frac{\eta - 2}{2}X_{13}^2 + (\eta - 2)X_{13}X_{14} - 2X_{14}^2 = 0. \tag{12}$$

Si $\eta = 2$, il n'y a qu'un point double dans l'intersection, de coordonnées homogènes $2X_{12} = X_{23} = 1, X_{13} = X_{14} = X_{24} = X_{34} = 0$; si $\eta \neq 2$, le discriminant $\Delta = \eta^2 - 4$ n'est jamais le carré d'un entier positif et la quadrique (12) ne contient pas deux points rationnels distincts. Notre surface abélienne est simple par la proposition 3.3.

On peut traiter le cas où $\det(F) = -1$ de la même manière ; on tombe à la fin sur la quadrique $2X_{14}^2 - (\eta-2)X_{14}X_{13} - \frac{\eta}{2}X_{13}^2$. On a donc prouvé que tous les entiers quadratiques admissibles pairs sont réalisés sur des surfaces abéliennes simples réelles dont $\mu = 1$.

4.5 Partie réelle vide

Dans cette section on traite le cas où $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Par le théorème de Comessatti 1.3, on peut identifier $(X, \mathcal{S})$ à $(\mathbb{C}^2/[\Omega], t_v\sigma)$ avec $\Omega = (I_2, \frac{1}{2}J + iT)$, où I_2 est la matrice identité, $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, J est de la forme $\begin{pmatrix} I_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma(v) = -v$. On note u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs colonnes de la matrice Ω.

On écrit $v = (v_1 + v_1'i, v_2 + v_2'i)$; la condition $\sigma(v) = -v$ s'écrit $(2v_1, 2v_2) \in [\Omega]$, ce qui implique qu'il y a quatre choix pour le couple (v_1, v_2) : $(0,0)$,$(0,1/2)$,$(1/2,0)$ ou $(1/2,1/2)$. Un point $x = (x_1 + x_1'i, x_2 + x_2'i) \in X$ est réel si et seulement si $\sigma(x) + v = x$, ce qui implique

$$v - (2x_1'i, 2x_2'i) \in [\Omega]. \tag{13}$$

Si $\mu = 2$, on peut soustraire v par une combinaison linéaire convenable de u_3, u_4 pour annuler la partie réelle et l'équation (13) admet toujours des solutions. Donc *la partie réelle n'est jamais vide si* $\mu = 2$. Le même raisonnement montre que *quand* $\mu = 1$*, la partie réelle est vide si et seulement si* $v_2 = 1/2$ *; et quand* $\mu = 0$*, la partie réelle est vide si et seulement si* v_1 *ou* v_2 *est* $1/2$.

On écrit un automorphisme f sous la forme $f(x) = \phi_f(x) + w_f$ avec $w_f = (w_1 + w_1'i, w_2 + w_2'i)$. Si f est réel, alors ϕ_f correspond à une matrice réelle $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de plus on a :

$$f(\mathcal{S}(x)) = \mathcal{S}(f(x)) \Leftrightarrow \; v - \phi_f(v) = w_f - \sigma(w_f) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \; (Id - F)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + i(Id - F)\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 2w_1' \\ 2w_2' \end{pmatrix} \mod [\Omega] \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \; \begin{pmatrix} (1-a)v_1 - bv_2 \\ -cv_1 + (1-d)v_2 \end{pmatrix} + i(Id - F)\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 2w_1' \\ 2w_2' \end{pmatrix} \mod [\Omega]. \tag{16}$$

Un raisonnement comme dans la section 4.4 donne $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. La partie réelle du côté gauche de l'équation (16) est donc à coefficients dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Il existe w_f vérifiant (16) si et seulement si on peut ajouter une combinaison linéaire des $u_1, \cdots, u_4$ au côté gauche pour annuler sa partie réelle. On en déduit que si $\mu = 0$ (resp. $\mu = 1$) alors (14) admet une solution w_f si et seulement si

$$((1-a)v_1 - bv_2, (1-d)v_2 - cv_1) \in \mathbb{Z}^2 \text{ (resp. } (1-d)v_2 - cv_1 \in \mathbb{Z}). \tag{17}$$

Le cas où $\mu = 1$**.** La partie linéaire de f donne un automorphisme réel de $(\mathbb{C}^2/[\Omega], \sigma)$. Cette situation est déjà traitée dans la section 4.4 : si f est loxodromique alors son degré dynamique est un entier quadratique admissible pair. Réciproquement, prenons les automorphismes qu'on a construits dans les section 4.4.1 et 4.4.2 : les matrices F vérifient la condition (17). Par conséquent ils sont parties linéaires des automorphismes réels de $(\mathbb{C}^2/[\Omega], t_v\sigma)$. Tous les entiers quadratiques admissibles pairs sont donc réalisés.

Le cas où $\mu = 0$**.** On assure que dans ce cas seuls les entiers quadratiques admissibles pairs peuvent être réalisés. En effet il y a trois possibilités pour le couple (v_1, v_2) : $(0, 1/2)$,$(1/2, 0)$ ou $(1/2, 1/2)$.

1. Si $(v_1, v_2) = (0, 1/2)$, alors la condition (17) implique que b est pair. Puisque $ad - bc = \pm 1$, cela implique que $\eta = a + d$ est pair.
2. Si $(v_1, v_2) = (1/2, 0)$, alors (17) exige que c est pair. De même on obtient que η est pair.
3. Si $(v_1, v_2) = (1/2, 1/2)$, alors (17) exige que $a + b$ et $c + d$ sont impairs, ce qui implique encore que η est pair.

En conclusion, seuls les entiers quadratiques admissibles pairs peuvent être réalisés sur une surface abélienne de partie réelle vide et on peut les réaliser tous.

5 Annexe : surfaces K3 réelles

Dans la série d'articles [McM02], [McM11], [McM16], McMullen a inventé une méthode de construction d'automorphismes des surfaces K3. En particulier il a réalisé λ_{10} (le minimum possible d'après [McM07]) sur une surface K3 projective. La stratégie générale de McMullen décrite dans la section 8 de [McM16] est essentielle pour la discussion suivante. On utilise sans rappel ses terminologies. On utilise aussi des données que McMullen a réalisées par l'ordinateur, disponibles sur sa page web [McM].

Remarque 5.1 On remarque que si un nombre de Salem λ (ou plutôt son polynôme minimal) satisfait les hypothèses du théorème 4.3 de [McM11] et celles du théorème 5.2 de [McM16], alors les étapes 1–5 de la procédure générale de la méthode de McMullen (voir la section 8 de [McM16]) sont générales dans le sens que tout automorphisme de surface K3 projective dont le degré dynamique est λ peut être construit de cette manière. Cela découle directement des deux théorèmes mentionnés de McMullen.

Cette remarque et le théorème 1.1 permettent d'exclure certaines situations :

Démonstration (du théorème 1.11) Les nombres $\lambda_{14}, \lambda_{16}, \lambda_{20}$ et λ_{22} ne peuvent pas être réalisés sur des surfaces K3 complexes projectives (voir [McM16]), donc non plus sur des surfaces K3 réelles par le théorème 1.1.
Les nombres de Salem λ_{10} et λ_{18} vérifient les conditions de la remarque 5.1. Après le test de positivité de l'étape 6, il existe trois twists possibles pour λ_{10}

et un seul twist possible pour λ_{18}. Dans [McM16], deux twists pour λ_{10} et le twist pour λ_{18} sont réalisés ; ces twists ne passent pas au cas réel : dans ces cas la valeur propre sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ n'est pas ± 1, ce qui est exigé par le théorème 1.1. Il reste un seul twist pour λ_{10} : l'élément de twist a est un produit d'un facteur premier de 3 et un facteur premier de 29. L'isométrie sur le 29-sous-groupe du groupe de collage est de période 15 et celle sur le 3-sous-groupe est de période 4 (voir [McM]) tandis que l'action sur le groupe de collage du réseau transcendant doit être de période au plus 2 par le théorème 1.1. Il faut donc recoller d'abord le sous-réseau correspondant à λ_{10} à un sous-réseau correspondant au produit de polynômes cyclotomiques $C_{15}C_4$. Les polynômes C_{15}, C_4 définissant des extensions de corps dont le nombre de classes est 1, il s'agit des twists des réseaux principaux de C_{15} et de C_4 par le théorème 5.2 de [McM16]. Le groupe de collage du réseau principal de C_4 est d'ordre 4 qui est premier avec 3 et 29. Ainsi ce groupe de collage doit être recollé à celui du réseau transcendant, ce qui est impossible car les périodes sont respectivement 4 et $\leqslant 2$. $\square$

Références

[BGA16] Simon Brandhorst and Victor Gonzalez-Alonso. Automorphisms of minimal entropy on supersingular k3 surfaces. *arxiv.org/abs/1609.02716*, 2016.

[Can99] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10), 1999.

[Can14] Serge Cantat. Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces. In *Frontiers in complex dynamics*, volume 51 of *Princeton Math. Ser.* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.

[Gro03] Mikhaïl Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4), 2003.

[McM] Curtis T. McMullen. Salem number/coxeter group/k3 surface package. *dx.doi.org/doi :10.7910/DVN/29211*.

[McM02] Curtis T. McMullen. Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545, 2002.

[McM07] Curtis T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105), 2007.

[McM11] Curtis T. McMullen. K3 surfaces, entropy and glue. *J. Reine Angew. Math.*, 658, 2011.

[McM16] Curtis T. McMullen. Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy. *Invent. Math.*, 203(1), 2016.

[Ogu10] Keiji Oguiso. The third smallest Salem number in automorphisms of $K3$ surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, volume 60 of *Adv. Stud. Pure Math.* Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Res12] Paul Reschke. Salem numbers and automorphisms of complex surfaces. *Math. Res. Lett.*, 19(2), 2012.

[Res17] Paul Reschke. Salem numbers and abelian surface automorphisms. *Osaka Journal of mathematics*, 54, 2017.

[Rup90] Wolfgang M. Ruppert. When is an abelian surface isomorphic or isogeneous to a product of elliptic curves ? *Math. Z.*, 203(2), 1990.

[Sil82] Robert Silhol. Real abelian varieties and the theory of Comessatti. *Math. Z.*, 181(3), 1982.

[Sil89] Robert Silhol. *Real algebraic surfaces*, volume 1392 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Ueh16] Takato Uehara. Rational surface automorphisms with positive entropy. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(1), 2016.

[Yom87] Yosef Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3), 1987.