Nombres de Salem et automorphismes à entropie positive de surfaces abéliennes et de surfaces K3

ZHAO ShengYuan

2016

Résumé

Le degré dynamique d'un automorphisme à entropie positive d'une surface kählérienne compacte est un nombre de Salem. Les nombres de Salem ainsi apparaissant sont liés à la géométrie de la surface. Dans cet article nous étudions le cas où la surface est un tore ou une surface K3. Nous regardons aussi le cas où des automorphismes sont réels par rapport à une structure réelle sur la surface. La première partie fournit des généralités sur des automorphismes à entropie positive de surfaces kählériennes compactes. La deuxième partie traite le cas du tore ; le but est de démontrer le théorème 3.26 qui est un résultat original. La troisième partie présente essentiellement les travaux de C.T.McMullen sur la construction d'automorphismes à entropie positive de surfaces K3 ; la méthode de McMullen permet en particulier de trouver le minimum des nombres de Salem parmi les degrés dynamiques d'automorphismes de surfaces K3.

Table des matières

1 Survol

Soit f un automorphisme d'une variété complexe compacte X. La plus grande valeur propre de l'action de f sur $\mathrm{H}^*(X, \mathbb{C})$ est appelée le degré dynamique maximal de f, notée $\lambda(f)$. Par un théorème de Gromov-Yomdin, l'entropie topologique de f est $\log(\lambda(f))$. On s'intéresse aux automorphismes à entropie positive, c'est-à-dire de degré dynamique maximal strictement supérieur à 1 ; ils sont intéressants d'un point de vue dynamique. Il se trouve que dans le cas des surfaces, le degré dynamique d'un automorphisme à entropie positive est un nombre de Salem qui est par définition un nombre algébrique plus grand que 1 dont tous les conjugués sauf un sont de module 1. Toutes les surfaces ne possèdent pas d'automorphismes à entropie positive. Si une surface X en possède un, alors il existe un morphisme birationnel de X vers un tore, une surface K3, une surface d'Enriques, ou le plan projectif. Deux questions se posent naturellement : 1) Quels nombres de Salem peuvent apparaître sur chaque type de surfaces ? En particulier quel est le minimum ? 2) Dans quelle mesure les nombres de Salem apparaissant sur une surface déterminent la géométrie de cette surface ? Nous examinerons ces questions dans le cas des tores et des surfaces K3.

Les tores sont les plus faciles à étudier ; Reschke a obtenu des critères qui répondent à la première question, et aussi quelques relations concernant la deuxième question. On présente d'abord ces résultats et puis examine les mêmes questions pour des tores munis de structures réelles. Il se trouve qu'il suffit de considérer des surfaces abéliennes réelles. On classifie des surfaces abéliennes réelles en huit types, selon le nombre de composantes connexes de la partie réelle et la simplicité da la surface abélienne complexe sous-jacente. Pour chacun des huit types, on détermine l'ensemble des nombres de Salem qui peuvent être réalisés par des automorphismes réels.

On ne sait pas répondre complètement aux deux questions précédentes pour les surfaces K3. Pourtant McMullen a prouvé que le nombre de Salem minimum qui peut apparaître sur une surface K3 est le nombre de Lehmer λ_{10} qui est de degré 10. Il a inventé une méthode de construction d'automorphismes de surfaces K3 qui permet en particulier de construire un automorphisme d'une surface K3 qui réalise le minimum. Par le théorème de Torelli, la construction d'automorphismes de surfaces K3 est transformée en un problème algébrique concernant des réseaux. On fera une synthèse de la démarche générale de McMullen qui a l'avantage de pouvoir être effectuée par un ordinateur ; on donne aussi la réalisation de λ_{10}. Bien que la méthode de McMullen ne soit pas encore assez puissante pour pouvoir toujours vérifier la réalisabilité d'un nombre de Salem donné, elle peut déjà servir à en exclure beaucoup. Comme illustration, on tirera quelques corollaires des travaux de McMullen. Par exemple on montrera que λ_{10} ne peut pas être réalisé sur une surface K3 réelle.

2 Introduction

2.1 Structure de Hodge d'une surface kählérienne compacte

La structure de Hodge joue un rôle essentiel dans cet article. Les références pour les deux premières sections sont [Can14] et [Voi07]. Soit X une surface kählérienne compacte. La décomposition de Hodge dit que ses groupes de cohomologie de de Rham s'écrivent

$$\mathrm{H}^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(X)$$

avec $\overline{\mathrm{H}^{p,q}(X)} = \mathrm{H}^{q,p}(X)$. En particulier en degré deux on a

$$\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}) = \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X)$$

où $\mathrm{H}^{1,1}(X)$ est le complexifié de l'espace vectoriel réel $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$.

On note toujours $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{Z})$ la partie sans torsion du groupe de cohomologie de X. La forme d'intersection définit une forme bilinéaire symétrique entière sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$. Elle induit une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ qui s'étend en une forme sesquilinéaire sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C})$ et qui s'écrit explicitement :

$$\forall u, v \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}), \quad \langle u, v \rangle = \int_X u \wedge \bar{v}.$$

Si ω est une 2-forme holomorphe non nulle, alors $\int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0$. Ainsi sur la partie réelle de $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$ la forme d'intersection est définie positive.

Théorème 2.1 (de l'indice de Hodge) *Soit X une surface kählérienne compacte. La forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est de signature $(1, h^{1,1}(X)-1)$ sur $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$.*

L'ensemble $\{u \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) | \langle u, u \rangle > 0\}$ a donc deux composantes connexes dont l'une contient le cône de Kähler $\mathcal{K}(X)$.

Le groupe de Néron-Severi est défini par

$$NS(X) = \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}).$$

Par le théorème de Lefschetz sur les (1,1)-classes, c'est le groupe des classes de Chern des fibrés en droites holomorphes ainsi que le groupe des classes associées aux diviseurs. On note $NS(X,K)$ l'espace vectoriel $NS(X) \otimes K$ pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La dimension $\rho(X)$ de $NS(X,K)$ est appellée le nombre de Picard de X. En utlisant le théorème de Kodaira, on a

Théorème 2.2 *La forme d'intersection* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *est de signature* $(1, \rho(X)-1)$ *sur* $NS(X,\mathbb{R})$ *si la surface est projective, et est négative sinon.*

On introduit aussi la notion de "réseau transcendant de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$" : on définit $T(X)$ comme le plus petit sous $\mathbb{Z}-$module de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ dont le produit tensoriel avec $\mathbb{C}$ contient $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$. On a alors :

$$T(X) \oplus NS(X) \subset \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \text{ et } (T(X) \oplus NS(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}).$$

2.2 Automorphisme, degré dynamique et entropie topologique

Nombres de Salem. Un polynôme de Salem est un polynôme irréductible de degré supérieur à deux à coefficients entiers dont les racines se trouvent toutes sur le cercle unité sauf une paire de racines réelles $(\lambda, 1/\lambda)$ avec $\lambda > 1$. Si $\lambda > 1$ est la racine d'un polynôme de Salem, alors on l'appelle un nombre de Salem. Un polynôme de Salem est un polynôme réciproque de degré paire $(S(x) = x^d S(x^{-1}))$. Pour ne pas compliquer la terminologie, dans cet article on appelle aussi un nombre de Salem un entier algébrique quadratique λ tel que $1/\lambda$ est son conjugué. En chaque degré paire d, il existe un nombre de Salem minimum de degré d. Le nombre de Salem le plus petit qu'on connaît est λ_{10} ; on l'appelle le nombre de Lehmer. Voici une liste des nombres de Salem λ_d pour $d \leqslant 20$:

λ_{10}	1.176	$x^{10}+x^9-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3+x+1$
λ_{18}	1.188	$x^{18}-x^{17}+x^{16}-x^{15}-x^{12}+x^{11}-x^{10}+x^9$ $-x^8+x^7-x^6-x^3+x^2-x+1$
λ_{14}	1.200	$x^{14}-x^{11}-x^{10}+x^7-x^4-x^3+1$
λ_{20}	1.233	$x^{20}-x^{19}-x^{15}+x^{14}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^6-x^5-x+1$
λ_{16}	1.236	$x^{16}-x^{15}-x^8-x+1$
λ_{12}	1.241	$x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9-x^6-x^3+x^2-x+1$
λ_8	1.281	$x^8-x^5-x^4-x^3+1$
λ_6	1.401	$x^6-x^4-x^3-x^2+1$
λ_4	1.722	$x^4-x^3-x^2-x+1$
λ_2	2.618	x^2-3x+1

Automorphismes. Un automorphisme f de X est par définition un difféomorphisme holomorphe de X. L'automorphisme f induit par image réciproque une application linéaire inversible f^* sur $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{A})$ où $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui préserve

1. la décomposition de Hodge ;
2. la forme d'intersection ;
3. le cône de Kähler.

On note χ_f le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$. C'est un polynôme à coefficients entiers ; c'est aussi le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ ou sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C})$. Puisque la forme d'intersection est définie positive sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)\oplus\mathrm{H}^{0,2}(X)$ et est de signature $(1,h^{1,1}-1)$ sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$, f^* est à conjugaison près contenue dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(2h^{2,0},0)\times\mathrm{O}(1,h^{1,1}-1)$. Ainsi parmi ses valeurs propres, il y en a au plus une paire réelle $\lambda, 1/\lambda$ en dehors du cercle unité. En tenant compte du résultat classique suivant

Proposition 2.3 (Kronecker) *Si un polynôme irréductible à coefficients entiers a toutes ses racines sur le cercle unité, alors le polynôme est cyclotomique.*

on en déduit que

Théorème 2.4 *Les facteurs irréductibles de χ_f comprennent au plus un polynôme de Salem, tous les autres facteurs sont cyclotomiques.*

Définition 2.5 *Si f est un automorphisme d'une variété kählérienne compacte X, alors le rayon spectral de f^* sur $\mathrm{H}^{k,k}(X)$ est appelé le $k-$ième degré dynamique de l'automorphisme f, noté $\lambda_k(f)$; le rayon spectral de f^* sur $\bigoplus_k \mathrm{H}^{k,k}(X)$ est appelé le degré dynamique maximal, noté $\lambda(f)$. Pour les surfaces, $\lambda(f)=\lambda_1(f)$.*

Le degré dynamique maximal $\lambda(f)$ majore en fait toutes les valeurs propres de f^* sur $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{C})$. Par exemple dans le cas des surfaces, si u est un élément non nul de $\mathrm{H}^{1,0}(X)$ alors $u\wedge\overline{u}$ est un élément non nul de $\mathrm{H}^{1,1}(X)$; lorsque u est un vecteur propre de f^* de valeur propre s, alors $|s|^2$ est valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$. Toujours dans le cas des surfaces, si $\lambda(f)>1$, alors c'est un nombre de Salem. Nous disposons aussi d'un critère pour la projectivité d'une surface :

Proposition 2.6 *Soit f automorphisme d'une surface kählérienne compacte X. Supposons que $\lambda(f)>1$ et notons S le polynôme minimal de $\lambda(f)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Toute racine de S est une valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$;
2) X est projective.

Démonstration Il existe un sous-espace $W\subset\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Q})$ invariant sous l'action de f^* tel que le polynôme caractéristique de f^* sur W est S ; la signature de f^* sur W est $(1,deg(S)-1)$. Supposons que X est projective, alors $NS(X)$ est de signature $(1,\rho-1)$ et $W\subset NS(X,\mathbb{Q})$. Donc toute racine de S est une valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$.
Réciproquement supposons que toute racine de S est une valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$. Alors W est un sous-espace de $NS(X,\mathbb{Q})$. Ainsi $NS(X)$ contient un élément u tel que $\langle u,u\rangle>0$. Donc X est projective par le théorème de plongement de Kodaira. □

Entropie topologique. Il y a plusieurs notions d'entropie, dans notre article l'entropie désigne toujours l'entropie topologique. L'entropie topologique d'une transformation d'un espace topologique est une quantité qui mesure le désordre créé par la transformation (pour la définition voir [KH95]). Plus l'entropie est grande, plus la dynamique est riche. En dynamique holomorphe, le résultat suivant est très utile pour calculer l'entropie :

Théorème 2.7 (Gromov[Gro03],Yomdin[Yom87]) *Si f est un difféomorphisme holomorphe d'une variété kählérienne compacte, alors son entropie toplogique $\mathrm{h}_{top}(f)$ égale à $\log \lambda(f)$ où $\lambda(f)$ est le degré dynamique maximal de f.*

Ainsi, dire qu'un automorphisme est à entropie positive, équivaut à dire que son degré dynamique est plus grand que 1. Dans la suite, nous utiliserons librement ces deux terminologies et nous nous restreignons toujours aux cas des surfaces.

2.3 Classification

Voir [BHPVdV04] pour la classification des surfaces complexes compactes. Pourtant si on ne s'intéresse qu'aux automorphismes à entropie positive, il n'est pas nécessaire de connaitre tous les types de surfaces :

Théorème 2.8 (Cantat[Can99]) *Soit X une surface complexe compacte. S'il existe un automorphisme de X à entropie positive (ou dont le degré dynamique est plus grand que* 1*), alors il existe un morphisme birationnel de X vers un tore, une surface K3, une surface d'Enriques, ou le plan projectif.*

Remarque 2.9 Si X n'est pas rationnelle, il existe un unique modèle minimal pour X, sur lequel f induit un automorphisme ; dans ce cas on peut donc supposer que X est un tore, une surface K3, ou une surface d'Enriques.

On rappelle que λ_{10} est le plus petit nombre de Salem connu. McMullen a montré dans [McM07] que c'est le plus petit nombre de Salem qui peut apparaître comme degré dynamique d'un automorphisme d'une surface complexe compacte. Il l'a réalisé sur une surface rationnelle dans [McM07], sur une surface K3 non projective dans [McM11] et sur une surface K3 projective dans [McM16]. Par contre il ne peut pas être réalisé sur une surface d'Enriques d'après [Ogu10]. Le tore est le cas le plus simple, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre de Salem soit réalisé sur un tore est donnée dans [Res12].

Les nombres de Salem pouvant être réalisés comme degré dynamique d'automorphismes sur une surface complexe compacte sont très liés à la géométrie de la surface. Dans notre article nous traiterons ce problème pour les tores et les surfaces K3 ; nous allons aussi étudier ce problème en ajoutant une structure réelle dans la considération (voir la section suivante pour les structures réelles).

2.4 Structures réelles sur une variété kählérienne compacte

Nous présentons quelques propriétés fondamentales concernant les structures réelles sur une variété complexe. La référence pour cette section (sauf la proposition 2.16) est [Sil89].

Définition 2.10 *Soit X une variété kählérienne compacte. Une structure réelle sur X est la donnée d'une involution anti-holomorphe S. On dit que (X, S) est une surface munie d'une structure réelle. On dit aussi que $X(\mathbb{R}) = \{x \in X | S(x) = x\}$ est la partie réelle de (X, S).*

Remarque 2.11 Dans le cas algébrique, on dit qu'une involution S définit une structure réelle sur un $\mathbb{C}-$schéma X si on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S} & X \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{j} & \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \end{array}$$

où j est induit par la conjugaison complexe.

Définition 2.12 *Soient $(X, S), (Y, T)$ deux variétés kählériennes compactes munies de structure réelle. On dit qu'une application holomorphe $f : X \to Y$ est réelle (ou définie sur $\mathbb{R}$) si $f \circ S = T \circ f$.*

En examinant les coordonnées locales, on peut montrer

Proposition 2.13 *Soit (X, S) une variété kählérienne compacte de dimension n munie d'une structure réelle. Si $X(\mathbb{R})$ n'est pas vide, alors elle est lisse et de dimension réelle n.*

Proposition 2.14 *Soit (X, S) une variété kählérienne compacte munie d'une structure réelle. L'action de S^* sur $\mathrm{H}^*(X, \mathbb{C})$ vérifie*

$$S^*(\mathrm{H}^{p,q}(X)) = \mathrm{H}^{q,p}(X).$$

Maintenant soit (X, S) une surface kählérienne compacte munie d'une structure réelle. On introduit quelques notations : on note $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})^S$ (resp. $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})(1)^S$) le sous-espace de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})$ fixé par S (resp. $-S$) pour $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$; on note $B_i = \dim(\mathrm{H}^i(X, \mathbb{C}))$, $b_i = \mathrm{H}^i(X, \mathbb{C})^S$ et $\mu_i = \dim_{\mathbb{Z}/2}(1 + S)\mathrm{H}_i(X, \mathbb{Z}/2)$.

Proposition 2.15 *S^* préserve la forme d'intersection $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})$, pour $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. La signature de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})^S$ est*

$$(h^{2,0}, b_2 - h^{2,0});$$

celle sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{A})(1)^S$ est

$$(h^{2,0} + 1, B_2 - b_2 - h^{2,0} - 1).$$

Démonstration Sur $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$, S échange $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ et $\mathrm{H}^{0,2}(X)$; en tant qu'application linéaire réele, S est donc une réflexion parallèle à un sous-espace réel de dimension $h^{2,0}$. Sur $\mathrm{H}^{1,1}(X)$, il y a toujours une classe de Kähler qui est inversée par S ; une forme de Kähler est d'auto-intersection positive.
La proposition découle de ce qui précède par le théorème de l'indice de Hodge.$\square$

Théorème 2.16 *Soit (X, S) une surface kählérienne compacte à fibré canonique trivial (un tore ou une surface K3) munie d'une structure réelle. Soit f un automorphisme réel de X à entropie positive. Alors X est projective et f^* agit comme* $\pm\mathrm{Id}$ *sur le réseau transcendant $T(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$.*

Démonstration La forme d'intersection est de signature $(2, 0)$ sur $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$. f^* et S^* préservent la forme d'interserction. S^* échange $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ et $\mathrm{H}^{0,2}(X)$; f^* les préserve. Soit α la valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)$, alors $\bar{\alpha}$ est la valeur propre de f^* sur $\mathrm{H}^{0,2}(X)$. Soit u un vecteur qui engendre $\mathrm{H}^{2,0}(X)$; $S(u)$ engendre alors $\mathrm{H}^{0,2}(X)$. Dans la base $(u, S(u))$ de $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$, les matrices de f^* et S^* s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque f et S commutent, on en déduit que α est réel. Or α est sur le cercle unité, donc $\alpha = \pm 1$. Ceci prouve que X est projective par la proposition 2.6. De plus, ± 1 est en fait la seule racine du polynôme caractéristique de f^* sur $T(X)$ car sinon il existerait un sous $\mathbb{Z}-$module strict de $T(X)$ dont le produit tensoriel avec $\mathbb{C}$ contiendrait $\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$, ce qui contredirait la minimalité de $T(X)$. Ceci termine la démonstration. □

3 Surfaces abéliennes

3.1 Introduction

Les tores complexes de dimension deux fournissent de premiers exemples de surfaces complexes compactes munies d'automorphismes à entropie (topologique) positive (i.e. de degré dynamique > 1). Un automorphisme du tore se relève en une application linéaire et le degré dynamique se calcule directement en fonction de ses valeurs propres. Cela permet de faire des manipulations explicites.

Dans [Res12] et [Res14], Reschke a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre de Salem soit réalisé comme degré dynamique d'un automorphisme d'un tore complexe de dimension deux, et a examiné des relations entre les valeurs de degrés dynamqiues et la géométrie d'un tore. Nous allons présenter ses résultats dans la section 3.2

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions ce problème pour les tores munis d'une structure réelle et pour les automorphismes réels. Le théorème 3.26 détermine les nombres de Salem qui peuvent être réalisés sur des tores réels, selon la simplicité d'un tore et selon la topologie de la partie réelle.

3.2 Automorphismes des tores complexes.

Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe de dimension deux où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^2$ agissant sur $\mathbb{C}^2$ par translations. $\mathbb{C}^2$ étant le revêtement universel de X, le groupe fondamental ainsi que le premier groupe d'homologie $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ de X s'identifient canoniquement à Λ. Par dualité de Poincaré

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z})$$

et

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}).$$

Soit f un automorphisme holomorphe de X. f est le composé d'une partie linéaire et une partie de translation. Le degré dynamique de f égale à celui de sa partie linéaire (f et sa partie linéaire sont même conjugués dans le cas où f est à entropie positive, voir la proposition 3.1) ; on n'a qu'à considérer la partie linéaire de f qui est obtenue par passage au quotient d'une application linéaire $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $F(\Lambda) = \Lambda$. f induit aussi un automorphisme f^* de $\mathrm{H}^*(X,\mathbb{C})$ par image réciproque. L'action de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$ s'écrit $F^T \oplus \bar{F}^T$. Si les deux valeurs propres de F sont γ_1,γ_2, alors les valeurs propres de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$ sont $\gamma_1,\gamma_2,\bar{\gamma_1},\bar{\gamma_2}$ et celles de f^* sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C})$ sont $|\gamma_1|^2, |\gamma_2|^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_1}\gamma_2, \bar{\gamma_1}\bar{\gamma_2}$. Le degré dynamique de f égale

$$\lambda(f) = \max(|\gamma_1|^2, |\gamma_2|^2).$$

Puisque F préserve un réseau, le module de son déterminant est 1 et donc $|\gamma_1\gamma_2| = 1$.

Supposons maintenant que f est à entropie postive. On remarque d'abord le fait suivant (non utilisé dans la suite ; le seul point utilisé est que f et sa partie linéaire ont le même degré dynamique, ce qui n'exige pas la proposition suivante) :

Proposition 3.1 *Un automorphisme à entropie positive f sur X est conjugué à sa partie linéaire.*

Démonstration On applique le théorème du point fixe de Lefschetz à f :

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j \mathrm{Tr}(f^* : \mathrm{H}^j(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^j(X,\mathbb{Z})) = (1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-\bar{\gamma_1})(1-\bar{\gamma_2}) \neq 0$$

implique que f admet un point fixe x_0. Alors la translation par x_0 conjugue f et sa partie linéaire. □

Le degré dynamique $\lambda(f) > 1$ est un nombre de Salem de degré inférieur à six. Le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}) = \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ est un polynôme réciproque de degré six à coefficients entiers dont le polynôme minimal de $\lambda(f)$ est un facteur.

Notons $P(t)$ (resp. $Q(t)$) le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$). Alors

$$\begin{aligned}
P(t) &= (t-\gamma_1)(t-\gamma_2)(t-\bar{\gamma_1})(t-\bar{\gamma_2}) \\
&= t^4 + jt^3 - at^2 + kt + 1 \\
Q(t) &= (t-|\gamma_1|^2)(t-|\gamma_2|^2)(t-\gamma_1\gamma_2)(t-\gamma_1\bar{\gamma_2})(t-\bar{\gamma_1}\gamma_2)(t-\bar{\gamma_1}\bar{\gamma_2}) \\
&= t^6 + at^5 + bt^4 + ct^3 + bt^2 + at + 1
\end{aligned}$$

avec les entiers a, b, c, j et k tels que $jk = b + 1$ et $j^2 + k^2 = -c - 2a$. Donc $Q(1) = -(j - k)^2 = -m^2$ pour un certain entier m et $Q(-1) = (j + k)^2 = n^2$ pour un entier n ; on dit selon Reschke que Q a la propriété carré.
Réciproquement si $Q(t) = t^6 + at^5 + bt^4 + ct^3 + bt^2 + at + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ satisfait la propriété de carré, alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$Q(1) = 2 + 2a + 2b + c = -m^2;$$
$$Q(-1) = 2 - 2a + 2b - c = n^2.$$

m et n sont alors de la même parité. Par conséquent $j = \frac{1}{2}(m+n)$ et $k = \frac{1}{2}(n-m)$ sont des entiers et les racines de $Q(t)$ sont produits des racines distinctes de

$$P(t) = t^4 + jt^3 - at^2 + kt + 1.$$

Supposons en plus que $Q(t)$ est un produit de polynômes cyclotomiques et au plus un polynôme de Salem (voir la section 2.2). Un tel polynôme donne lieu à un automorphisme de tore par le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ un polynôme unitaire de degré quatre avec les racines $\gamma_1, \gamma_2, \bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}$ telles que $|\gamma_2| = |\gamma_1|^{-1}$. Alors il existe un tore complexe de dimension deux X et un automorphisme f de X tels que P est le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$.*

Démonstration Puisque $P(0) = 1$, nous pouvons prendre $T \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ tel que le polynôme caractéristique de T est P. Nous pouvons ensuite trouver une base $(u_i, \bar{u_i})_{i=1,2}$ de $\mathbb{C}^4$ telle que $Tu_i = \gamma_i u_i$. Les paires $(u_i, \bar{u_i})$ déterminent une décomposition $\mathbb{R}^4 = \bigoplus_i E_i$ où $E_i \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}u_i \oplus \mathbb{C}\bar{u_i}$. Nous pouvons alors choisir un $\mathbb{R}-$ isomorphisme $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ envoyant chaque E_i en un axe de coordonnée. Puis l'application linéaire F de $\mathbb{C}^2$ définie par $F(z_1, z_2) = (\gamma_1 z_1, \gamma_2 z_2)$ vérifie $\phi \circ T = F \circ \phi$. En posant $\Gamma = \phi(\mathbb{Z}^4)$ et $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$, F descend en un automorphisme de X qui satisfait la propriété désirée. $\square$

D'après ce qui précède, on obtient :

Proposition 3.3 ([Res12]) *Soit $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ un polynôme unitaire réciproque de degré six avec exactement deux racines positives en dehors du cercle unité. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un tore complexe de dimension deux X et un automorphisme f de X tels que Q est le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C})$;*
2. *Q a la propriété carré.*

Théorème 3.4 ([Res12]) *Soit λ un nombre de Salem de polynôme minimal S.*

1) Si S est de degré six, alors λ est le degré dynamique d'un automorphisme d'un tore complexe de dimension deux si et seulement si $S(1) = -m^2$ et $S(-1) = n^2$ pour deux entiers m et n.

2) Si S est de degré quatre, alors λ est le degré dynamique d'un automorphisme d'un tore complexe de dimension deux si et seulement si une des trois conditions suivantes est réalisé :

(a) $S(1) = -m^2$ pour un entier m.

(b) $S(-1) = n^2$ pour un entier n.

(c) $S(1) = -\frac{1}{2}m^2$ et $S(-1) = \frac{1}{2}n^2$ pour deux entiers m et n.

3) Si S est de degré deux, alors λ est le degré dynamique d'un automorphisme d'un tore complexe.

Démonstration D'après la proposition 3.3, un nombre de Salem est réalisé si et seulement si le produit de son polynôme minimal avec certains polynômes cyclotomiques est un polynôme de degré six satisfaisant la propriété carré. Le cas de degré six est direct. Si λ est de degré deux de polynôme minimal $S(t)$, alors $S(t)(t+1)^2(t-1)^2$ marche. Dans le cas de degré quatre, les candidats pour le facteur cyclotomique sont $t^2+2t+1, t^2-t+1, t^2+1, t^2+t+1, t^2-2t+1$; on peut vérifier que le produit du polynôme minimal de λ avec un de ces polynômes est un polynôme de degré six satisfaisant la propriété carré si et seulement si λ satisfait l'une des trois conditions dans le théorème. □

Une analyse utilisant la proposition 2.6 et le théorème 3.4 peut montrer le théorème suivant :

Théorème 3.5 ([Res14]) *Soit λ un nombre de Salem tel que λ est le degré dynamique d'un automorphisme d'un tore complexe de dimension deux, soit S son polynôme minimal.*

1) Si S est de degré six, alors tout tore complexe de dimension deux admettant λ comme degré dynamique est non projectif.

2) Si S est de degré quatre, alors il existe une surface abélienne et un tore complexe de dimension deux non projectif qui admettent λ comme degré dynamique.

3) Si S est de degré deux, alors tout tore complexe de dimension deux admettant λ comme degré dynamique est projectif.

(a) Si $\lambda + \lambda^{-1} + 2$ ou $\lambda + \lambda^{-1} - 2$ est le carré d'un entier, alors λ est le degré dynamique d'un automorphisme d'une surface abélienne simple et le degré dynamique d'un automorphisme d'un produit de courbes elliptiques isogènes.

(b) Sinon, toute surface abélienne admettant λ comme degré dynamique est un produit de courbes elliptiques isogènes munies de multiplication complexe.

3.3 Surfaces abéliennes simples et méthode de Ruppert.

Simplicité. Une variété abélienne est dite simple si elle ne contient aucune sous-variété abélienne de dimension > 0. Le théorème classique suivant dit que toute variété abélienne peut être décomposée en un produit de variétés abéliennes simples. Voir [BL04] pour une démonstration.

Théorème 3.6 (Poincaré) *Soit X une variété abélienne. Alors X est isogène à $X_1^{n_1} \times \cdots X_r^{n_r}$ où les X_i sont des variétés abéliennes simples non isogènes l'une à l'autre. De plus les X_i et les n_i sont uniquement déterminés à isogénie et à permutation près.*

Dans le cas de dimension deux, on a donc :

Corollaire 3.7 *Une surface abélienne est soit simple soit isogène à un produit de courbes elliptiques.*

et

Corollaire 3.8 *Une surface abélienne qui admet un automorphisme à entropie positive est soit simple soit isogène à un produit de courbes elliptiques identiques.*

Démonstration Soit X une surface abélienne isogène à $X_1 \times X_2$ où X_1, X_2 sont deux courbes elliptiques non isogènes. La partie linéaire de tout automorphisme de X doit donc préserver les images de $X_1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times X_2$. Puisque tout automorphisme d'une courbe elliptique est d'ordre fini, les valeurs propres de l'action d'un automorphisme sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ sont des racines d'unité. L'entropie d'un automorphisme de X est donc nécessairement nulle. $\square$

Méthode de Ruppert. On dispose d'une méthode due à Ruppert pour vérifier si une surface abélienne est isomorphe ou isogène à un produit de deux courbes elliptiques. La référence pour cette sous-section est [Rup90].

Soit $\mathbb{C}^2/\Lambda$ une surface abélienne. On lui associe une forme alternée $\alpha : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ définie par

$$\alpha(u, v) = \det(u, v).$$

La forme α est dite *hyperbolique* s'il existe une décomposition $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ en sous-modules isotropes, autrement dit, s'il existe une base $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ de Λ telle que $\alpha(\omega_1, \omega_2) = \alpha(\omega_3, \omega_4) = 0$. La forme α s'étend sur $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$, on dit qu'elle est *hyperbolique sur* $\mathbb{Q}$ si $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ est somme directe de deux sous-espaces isotropes.

Proposition 3.9 *La surface abélienne $\mathbb{C}^2/\Lambda$ est isomorphe (resp. isogène) à un produit de deux courbes elliptiques si et seulement si la forme α est hyperbolique (resp. hyperbolique sur $\mathbb{Q}$).*

A l'aide de cette proposition, il revient à étudier l'hyperbolicité d'une forme alternée pour vérifier si une surface abélienne est simple ou non.

L'image $\alpha(\Lambda \times \Lambda)$ engendre un $\mathbb{Z}$-module libre inclu dans $\mathbb{C}$ de rang r ; on appelle r le rang de α.

Si $z_1, z_2, \ldots, z_r$ est une base du $\mathbb{Z}$-module engendré par $\alpha(\Lambda \times \Lambda)$, on peut décomposer α en

$$\alpha(u, v) = \alpha_1(u, v) z_1 + \alpha_2(u, v) z_2 + \cdots + \alpha_r(u, v) z_r$$

avec les formes alternées $\alpha_i : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$. On remarque que les α_i sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ et que α est hyperbolique (sur $\mathbb{Q}$) si et seulement si tous les α_i sont hyperboliques (sur $\mathbb{Q}$) avec la même décomposition de Λ (resp. $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$).

Un premier critère est :

Proposition 3.10 *Pour une surface abélienne $\mathbb{C}^2/\Lambda$, le rang de α ne peut être que $2, 3, 4$ ou 5. Si le rang est 2, alors α est hyperbolique. Si le rang est 5, alors α n'est pas hyperbolique sur $\mathbb{Q}$.*

Il reste à étudier le cas où le rang de α est trois ou quatre.

L'hyperbolicité de la forme α porte sur les sous-espaces de dimension deux, nous allons donc considérer la grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$ qui n'est autre que la quadrique de Plücker Q dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2(\Lambda \otimes \mathbb{C}))$ définie par

$$X_{12}X_{23} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0$$

où $(X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$ est un système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(\wedge^2(\Lambda \otimes \mathbb{C}))$ associées à une base de Λ : prenons (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de Λ, chaque X_{ij} correspond à $u_i \wedge u_j$. Dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), chaque forme α_i est représentée par une matrice alternée $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$. On lui associe l'hyperplan H_i dans $\mathbb{P}^5$ défini par

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij} X_{ij} = 0.$$

Puisque les formes α_i sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$, l'intersection $E(\alpha) = \cap_{1 \leqslant i \leqslant r} H_i$ est un $(5 - r)$-plan dans $\mathbb{P}^5$.

Proposition 3.11 *La forme α est hyperbolique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il existe deux points rationnels q_1, q_2 dans $Q \cap E(\alpha)$ tels que la droite passant par q_1 et q_2 n'est pas inclue dans Q.*
α est hyperbolique si et seulement si en plus la condition est vraie modulo p pour tout nombre premier p.

Si le rang de α est trois, $Q \cap E(\alpha)$ est une quadrique dans $\mathbb{P}^2$ qui est peut-être dégénérée.
Si le rang de α est quatre, $Q \cap E(\alpha)$ est une quadrique dans $\mathbb{P}^1$ qui est donc deux points complexes éventuellement confondus.

3.4 Structure réelle.

Si un tore complexe est muni d'une structure réelle, un choix particulier de la matrice de période nous permet de le décrire explicitement.

Théorème 3.12 (Comessatti) *Soit X un tore complexe. Il existe une structure réelle (X, S) sur X si et seulement si X admet une matrice de période sous la forme :*

$$\Omega = (I_q, \frac{1}{2}J + iT),$$

où I_q *est la matrice identité,* $T \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$*,* $i^2 = -1$ *et* J *est de la forme* $\begin{pmatrix} I_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $\mu = \dim(1+S)\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$*. On dit que* μ *est le nombre de Comessatti de* X*.*

Si (X,S) *a des points réels, alors* (X,S) *est réellement équivalent à* $(\mathbb{C}^q/[\Omega], \sigma)$ *où* σ *est la conjugaison complexe et* $[\Omega]$ *est le réseau dans* $\mathbb{C}^q$ *engendré par les colonnes de* Ω*. Dans ce cas* $X(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie réel compact dont la topologie est déterminée par son nombre de Comessatti :*

$$X(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q \times (\mathbb{Z}/2)^{q-\mu}.$$

Si (X,S) *n'a pas de point réel, il est réellement équivalent à* $(\mathbb{C}^q/[\Omega], t_a\sigma)$ *où* t_a *est la translation par un élément* a *tel que* $\sigma(a) = -a$*.*

Démonstration Ce théorème est traité dans [Sil82], [Sil89] pour des variétés abéliennes, mais la même démonstration s'applique à tous les tores complexes. Nous donnons ici une esquisse de démonstration.
étape 1. Soit (Y,T) une variété kählérienne compacte munissant d'une structure réelle. L'involution T engendre un groupe G à deux éléments. La suite exacte définissant la variété d'Albanese de Y

$$0 \to \mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f \to \mathrm{H}^0(Y,\Omega^1_Y)^* \to \mathrm{Alb}(Y) \to 0 \qquad (1)$$

($\mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f$ est la partie sans torsion de $\mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})$) induit une structure de $G-$module sur $\mathrm{Alb}(Y)$ de sorte que (1) soit une suite exacte de $G-$modules.
Notons q la dimension complexe de $\mathrm{H}^0(Y,\Omega^1_Y)$. Alors on peut prouver que

$$\mathrm{H}^0(Y,\Omega^1_Y)^{*G} = \mathbb{R}^q \qquad (2)$$

et

$$\mathrm{H}^i(G, \mathrm{H}^0(Y,\Omega^1_Y)^*) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0.$$

Ainsi la suite longue de cohomologie de groupes associée à (1) est

$$0 \to \mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f^G \to \mathrm{H}^0(Y,\Omega^1_Y)^{*G} \to \mathrm{Alb}(Y)^G \to \mathrm{H}^1(G, \mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f) \to 0. \qquad (3)$$

On peut aussi montrer que :

$$\mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f^G = \mathbb{Z}^q \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^1(G, \mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})_f) = (\mathbb{Z}/2)^{q-\mu}$$

où $\mu = \dim(1+S)\mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z}/2)$. Cela montre que :

Proposition 3.13 *Soit* (Y,T) *une variété kählérienne compacte munissant d'une structure réelle. Alors* $\mathrm{Alb}(Y)$ *est munie d'une structure réelle naturelle telle que* $\mathrm{Alb}(Y)(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q \times (\mathbb{Z}/2)^{q-\mu}$ *est un groupe de Lie réel compact.*

Remarque 3.14 La même chose est vraie pour la variété de Picard.

étape 2. Soit (X, S) un tore complexe muni d'une structure réelle. On garde les notations pour μ et q. Il se trouve qu'on peut choisir une base

$$(a_1, \cdots, a_q, b_1, \cdots, b_\mu, c_{\mu+1}, \cdots, c_q) \tag{4}$$

de $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})_f$ telle que l'action de G s'écrit

$$S(a_i) = a_i, S(b_j) = a_j - b_j \text{ et } S(c_k) = -c_k.$$

D'après (2), on peut choisir une $\mathbb{R}-$base de $\mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X)^G$ qui est aussi une $\mathbb{C}-$base de $\mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X)$. Quitte à faire une normalisation, cette base et (4) donnent une matrice de période de la forme comme dans l'énoncé du théorème. Réciproquement si la matrice de période est de cette forme, alors le réseau associé est invariant sous la conjugaison complexe qui donne donc une structure réelle.
étape 3. On prouve d'abord l'assertion suivante :

Proposition 3.15 *Soit (Y, T) une variété kählérienne compacte munie d'une structure réelle. Soit $(\mathrm{Alb}(Y), T')$ la structure réelle naturelle sur sa variété d'Albanese. A tout point $y \in Y$, on peut associer l'application d'Albanese f_y : $Y \to \mathrm{Alb}(Y)$. Alros pour $y, y' \in Y$, $a = f_y(T(y))$ vérifie $T'(a) = -a$ et $f_y(S(y')) = T'(f_y(y')) + a$. Si $Y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, alors pour tout $y \in Y(\mathbb{R})$, f_y est réelle.*

et on utilise ensuite le fait que l'application d'Albanese $X \to \mathrm{Alb}X$ est un isomorphisme pour un tore complexe X. □

Nous donnons maintenant quelques exemples simples ; plus d'exemples de surfaces abéliennes réelles seront construits dans la suite.

Exemple 3.16 Dans le cas des courbes elliptiques, la partie réelle contient une ou deux composantes connexes.
1) La conjugaison complexe définit une structure réelle sur la courbe elliptique définie par le réseau $(1, 1/2 + i)$. La partie réelle est connexe, étant l'image de l'axe réel modulo le réseau.
2) La conjugaison complexe définit une structure réelle sur la courbe elliptique définie par le réseau $(1, i)$. La partie réelle a deux composantes : les images modulo le réseau de l'axe réel et de la droite $(\cdot, i/2)$.

Exemple 3.17 En dimension deux, les exemples les plus simples sont produits des courbes elliptiques :
1) Posons $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 + ti & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 + ti \end{pmatrix}$ où t est un réel strictement positif. Alors $(\mathbb{C}^2/[\Omega], \sigma)$ est un produit de deux coubes elliptiques identiques (en plus la structure réelle est aussi le produit de structures des deux courbes elliptiques). Le nombre de Comessatti est $\mu = 2$; sa partie réelle est connexe.
2) Posons $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ti & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ti \end{pmatrix}$ où t est un réel strictement positif. Alors $(\mathbb{C}^2/[\Omega], \sigma)$ est aussi un produit de deux coubes elliptiques. Le nombre de Comessatti est $\mu = 0$; sa partie réelle a quatre composantes connexes.

3.5 Automorphismes réels.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, X désigne un tore complexe de dimension deux muni d'une structure réelle S. Par le théorème 3.12, on peut supposer que X est donnée par un réseau explicite $[\Omega]$ dans $\mathbb{C}^2$ comme dans l'énoncé du théorème ; on garde les notations de la section précédente avec désormais $q = 2$.

Par définition f est un automorphisme réel de (X, S) si f est un automorphisme de X vérifiant $f \circ S = S \circ f$. On écrit f sous la forme

$$f(x) = \phi_f(x) + a_f$$

où $a_f \in X$ et ϕ_f est représenté par une matrice $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Le déterminant de F vérifie $|\det F| = 1$. On peut considérer X comme un tore réel de dimension quatre, alors f et S peuvent être relevés en applications affines de $\mathbb{R}^4$. En identifiant $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^4$, les parties linéaires de ces deux applications affines de $\mathbb{R}^4$ sont données par F et la conjugaison complexe. Les parties linéaires de ces deux applications affines commutent parce que f et S commutent. On en déduit que pour un automorphisme réel f, sa matrice associée F vérifie

$$F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \det F = \pm 1.$$

Théorème 3.18 *Soit (X, S) un tore complexe de dimension deux muni d'une structure réelle qui admet un automorphisme réel f à entropie positive. Alors X est nécessairement une surface abélienne. De plus le degré dynamique λ de f vérifie que $\lambda + \lambda^{-1} + 2$ ou $\lambda + \lambda^{-1} - 2$ est le carré d'un entier η.*

Démonstration X est une surface abélienne par la proposition 2.16. On note γ_1, γ_2 les deux valeurs propres complexes de la matrice F associée à la partie linéaire de f.

Le premier groupe d'homologie d'un tore complexe s'identifie canoniquement au réseau définissant le tore. Par cette identification et par l'inclusion $[\Omega] \cong \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, puis par dualité de Poincaré, l'action de f sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ est donnée par $F^T \oplus \bar{F}^T$. Les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ sont pareils. Les valeurs propres de $f^* : \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ sont donc $\gamma_1, \gamma_2, \bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}$ et celles de $f^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C})$ sont $|\gamma_1|^2, |\gamma_2|^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_1}\gamma_2, \gamma_1\bar{\gamma_2}$.

Le degré dynamique de f égale à la plus grande valeur propre λ de $f^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C})$. On en déduit que

$$\max(|\gamma_1|, |\gamma_2|) > 1. \tag{5}$$

On note η la trace de F. Le polynôme caractéristique de F est $x^2 - \eta x \pm 1$; celui de f^* sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ est

$$(x^2 - \eta \pm 1)^2 = x^4 + 2\eta x^3 + (\eta^2 \pm 2) \pm 2\eta x + 1 \in \mathbb{Z}[x].$$

Cela implique que $\eta \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$\gamma_1\gamma_2 = \det(F) = \pm 1 \quad \text{et} \quad (\gamma_1 + \gamma_2) = \eta \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

En tant que valeurs propres d'une matrice réelle, γ_1 et γ_2 sont soit tous réels soit complexes conjugués. S'ils sont complexes conjugués, (6) et (5) ne peuvent être réalisées simultanément. Par conséquent γ_1 et γ_2 sont tous réels et F est conjuguée sur $\mathbb{R}$ à

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

On récapitule les relations entre des quantités associées à f. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|\gamma_1| > |\gamma_2|$, alors le degré dynamique de f est λ où $\lambda = \gamma_1^2$.
Si $\det(F) = 1$, alors $\lambda + 1/\lambda + 2 = (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \eta^2$, et les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ et sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ sont respectivement $P(x) = (x^2 - \eta x + 1)^2$ et $Q(x) = (x-1)^4(x^2 - (\eta^2 - 2)x + 1)$.
Si $\det(F) = -1$, alors $\lambda + 1/\lambda - 2 = (\gamma_1 + \gamma_2)^2 = \eta^2$, et les polynômes caractéristiques de f^* sur $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ et sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ sont $P(x) = (x^2 - \eta x - 1)^2$ et $Q(x) = (x+1)^4(x^2 - (\eta^2 + 2)x + 1)$. □

Remarque 3.19 On se trouve alors dans le cas 3a du théorème 3.5.

Remarque 3.20 $\det(F)$ et η déterminent λ ; réciproquement λ détermine $\det(F)$ et la valeur absolue de η.

Définition 3.21 *On dit qu'un nombre de Salem λ de degré deux est admissible si $\lambda + \lambda^{-1} + 2$ ou $\lambda + \lambda^{-1} - 2$ est le carré d'un entier.*

Par le corollaire 3.8, on sait que X est soit une surface abélienne simple, soit isogène à un produit de deux courbes elliptiques identiques. Par le théorème 3.12, on sait que soit $X(\mathbb{R})$ est vide, soit la topologie de $X(\mathbb{R})$ est déterminée par le nombre de Comessatti μ qui est $0, 1$ ou 2. Ainsi on a huit types possibles pour X, selon la simplicité de X et le nombe de composantes connexes de sa partie réelle.
Dans la suite, on déterminera, pour un nombre admissible λ et pour chacun des huit types, si λ peut être réalisé comme degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne réelle (X, S) du type donné.

3.6 Produit de deux courbes elliptiques identiques et $\mu = 0, 2$.

On garde toujours des notations des sections précédentes.

Si $X = E \times E$ est un produit de courbes elliptiques réelles identiques, alors toute matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ donne un automorphisme réel de X via

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathrm{End}(E)).$$

Un nombre de Salem λ admissible est déterminé par son polynôme minimal $X^2 - (\eta^2 \pm 2) + 1$. Il existe toujours une matrice $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ dont le polynôme caractéristique est le polynôme minimal de λ. Une telle F donne lieu à un automorphisme réel de degré dynamique λ et tous les nombres de Salem admissibles sont donc réalisés. L'exemple 3.17 fournit de telles surfaces X dont le nombre de Comessatti est 0 ou 2.

3.7 Surfaces abéliennes simples et $\mu = 0, 2$.

Posons $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & z_1 & \gamma_1 z_1 \\ 1 & \gamma_2 & z_2 & \gamma_2 z_2 \end{pmatrix}$ où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Supposons que les vecteurs colonnes de Γ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire que Γ définit un réseau $[\Gamma]$. La matrice $F = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ agit sur le réseau $[\Gamma]$ par

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(F) & & \\ 1 & \eta & & \\ & & 0 & -\det(F) \\ & & 1 & \eta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}).$$

Ainsi $X = \mathbb{C}^2/[\Gamma]$ est une surface abélienne qui admet un automorphisme dont le degré dynamique est λ. On note u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs colonnes de Γ. Nous montrons maintenant qu'avec un choix convenable du couple (z_1, z_2), cette construction nous permet de réaliser tous les nombres de Salem admissibles sur une surface abélienne simple réelle dont le nombre de Comessatti égale à 0 ou 2.

1. On pose $z_1 = i,\ z_2 = ti$ où t est un réel strictement positif. $[\Gamma]$ est invariant sous la conjugaison complexe σ et l'automorphisme associé à F est réel. (X, σ) est donc une surface abélienne réelle admettant un automorphisme réel à l'entropie λ.

Le nombre de Comessatti est défini par $\mu = \dim (1+\sigma)\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$. $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}/2)$ est canoniquement isomorphe à $[\Gamma]/2[\Gamma]$ comme G-module avec $G = \{1, \sigma\}$. Les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont envoyés par $(1+\sigma)$ à $(2,2), (2\gamma_1, 2\gamma_2), (0,0), (0,0)$, qui sont tous nuls modulo $2[\Gamma]$. On en déduit que $\mu = 0$.

Maintenant on utilise la méthode de Ruppert pour vérifier si X est simple. La forme alternée α associée à X est déterminée par

$$\alpha(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha(u_1, u_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & ti \end{pmatrix} = (t-1)i$$

$$\alpha(u_1, u_4) = \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 i \\ 1 & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = (\gamma_2 t - \gamma_1)i$$

$$\alpha(u_2, u_3) = \det \begin{pmatrix} \gamma_1 & i \\ \gamma_2 & ti \end{pmatrix} = (\gamma_1 t - \gamma_2)i$$

$$\alpha(u_2, u_4) = \det \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 i \\ \gamma_2 & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2(t-1)i$$

$$\alpha(u_3, u_4) = \det \begin{pmatrix} i & \gamma_1 i \\ ti & \gamma_2 ti \end{pmatrix} = (\gamma_1 - \gamma_2)t.$$

Si $t \notin \mathbb{Q}(\gamma_1)$, ces nombres engendrent un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 5, et X est simple par proposition 3.10.

2. On pose $z_1 = \frac{1}{2} + ri,\ z_2 = \frac{1}{2} + si$ où $r, s \in \mathbb{R}$. $[\Gamma]$ est invariant sous la conjugaison complexe σ et l'automorphisme associé à F est réel. (X, σ) est donc une surface abélienne réelle admettant un automorphisme réel à l'entropie λ.
Les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont envoyés par $(1+\sigma)$ à $2u_1, 2u_2, u_1, u_2$, qui engendrent un sous espace de dimension deux modulo $2[\Gamma]$. On en déduit que $\mu = 2$.
On a

$$\begin{aligned}
\alpha(u_1, u_2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ 1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \gamma_2 - \gamma_1 \\
\alpha(u_1, u_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + ri \\ 1 & \frac{1}{2} + si \end{pmatrix} = (s - r)i \\
\alpha(u_1, u_4) &= \det \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1(\frac{1}{2} + ri) \\ 1 & \gamma_2(\frac{1}{2} + si) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) + (s\gamma_2 - r\gamma_1)i \\
\alpha(u_2, u_3) &= \det \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{1}{2} + ri \\ \gamma_2 & \frac{1}{2} + si \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) + (s\gamma_1 - r\gamma_2)i \\
\alpha(u_2, u_4) &= \det \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1(\frac{1}{2} + ri) \\ \gamma_2 & \gamma_2(\frac{1}{2} + si) \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2(s - r)i \\
\alpha(u_3, u_4) &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + ri & \gamma_1(\frac{1}{2} + ri) \\ \frac{1}{2} + si & \gamma_2(\frac{1}{2} + si) \end{pmatrix} = (\gamma_2 - \gamma_1)(\frac{1}{4} - rs + \frac{1}{2}(r + s)i).
\end{aligned}$$

Pour un choix convenable du couple (r, s) (par exemple si r, s engendrent une extension transcendante de $\mathbb{Q}$ de degré deux), ces nombres engendrent un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 5, et X est simple par proposition 3.10.

3.8 Partie réelle vide.

Dans cette section on suppose que $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. (X, S) s'identifie donc à $(\mathbb{C}^2/[\Omega], t_a\sigma)$ avec $\sigma(a) = -a$. Supposons que f est un automorphisme. On l'écrit sous la forme $f(x) = \phi_f(x) + a_f$. Si f est réel, alors ϕ_f correspond à une matrice réelle, de plus on a :

$$\begin{aligned}
& f(S(x)) = S(f(x)) && (7)\\
\Leftrightarrow\quad & \phi_f(a) + a_f = \sigma(a_f) + a && (8)\\
\Leftrightarrow\quad & a - \phi_f(a) = a_f - \sigma(a_f). && (9)
\end{aligned}$$

1. Considérons la surface abélienne X définie par le réseau donné par

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 + i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 + i \end{pmatrix}.$$

Alors $X = E \times E$ où $E = \mathbb{C}/(1, \frac{1}{2} + i)$. Si on pose $a = (\frac{1}{2}, 0) \in E \times E$, $(X, t_a\sigma)$ définit une surface abélienne réelle dont la partie réelle est vide.
Posons

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & \eta - 2 \\ 1 & \eta - 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 1 & \eta - 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Tr}(F_1) = \mathrm{Tr}(F_2) = \eta$ et $\det(F_1) = -\det(F_2) = 1$. Ces deux matrices correspondent à deux automorphismes ϕ_1, ϕ_2 de X qui vérifient

$$a - \phi_1(a) = a - \phi_2(a) = (0, \frac{1}{2}) \bmod [\Omega].$$

En posant $a_f = (0, \frac{1}{4} + \frac{i}{2}) \bmod [\Omega]$, on a

$$(0, \frac{1}{2}) = a_f - \sigma(a_f) \bmod [\Omega].$$

La relation (9) étant vérifiée et les matrices F_1, F_2 étant réelles, $f_j = \phi_j + a_f, j = 1, 2$ sont donc des automorphismes réels de X. En faisant varier la valeur de η, ceci réalise tous les nombres de Salem admissibles.

2. On reprend le type de réseau considéré dans la section 3.7 :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & z_1 & \gamma_1 z_1 \\ 1 & \gamma_2 & z_2 & \gamma_2 z_2 \end{pmatrix}$$

où $z_1 = \frac{1}{2} + ri,\ z_2 = \frac{1}{2} + si$. On pose

$$a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \bmod [\Gamma].$$

$(\mathbb{C}^2/[\Gamma], t_a\sigma)$ est de partie réelle vide et est simple pour un choix convenable de (r, s). Posons

$$f = \phi_f + a_f$$

où ϕ_f est représenté par la matrice $F = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ et

$$a_f = (\frac{1-\gamma_1}{2} + \frac{r(1-\gamma_1)i}{2}, \frac{1-\gamma_2}{2} + \frac{r(1-\gamma_2)i}{2}) \bmod [\Gamma].$$

On vérifie que

$$a - \phi_f(a) = (\frac{1-\gamma_1}{2}, \frac{1-\gamma_2}{2}) = a_f - \sigma(a_f) \bmod [\Gamma].$$

La relation (9) étant satisfaite, f est un automorphisme réel de $(\mathbb{C}^2/[\Gamma], t_a\sigma)$ à l'entropie prescrite. Tous les nombres de Salem admissibles peuvent donc être réalisés par cette construction.

3.9 $\mu = 1$.

Considérons une surface abélienne réelle (X, S) dont le nombre de Comessatti est $\mu = 1$, on l'écrit sous la forme standard $\mathbb{C}^2/[\Omega]$ où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} + t_{11}i & t_{12}i \\ 0 & 1 & t_{21}i & t_{22}i \end{pmatrix}$$

avec $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On note u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs colonnes de la matrice Ω.
Supposons maintenant que l'on a un automorphisme réel à entropie positive qui correspond à une matrice $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(F) = \eta$.

Nous allons examiner les conditions sur F imposées par le fait que F préserve le réseau $[\Omega]$. $F(u_1)$ et $F(u_2)$ sont des combinaisons linéaires des u_1, u_2, u_3, u_4 à coefficients entiers. On remarque que $F(u_1)$ et $F(u_2)$ sont à coordonnées réelles tandis que les parties imaginaires de u_3 et u_4 sont linéairement indépendantes car la matrice T est inversible, on en déduit que $F(u_1), F(u_2)$ sont en fait des combinaisons linéaires à coefficients entiers de u_1, u_2. C'est-à-dire que F préserve le sous-réseau engendré par u_1, u_2, ce qui implique que

$$F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}). \tag{10}$$

On regarde ensuite

$$(F(u_3), F(u_4)) = \begin{pmatrix} a/2 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix} + FTi. \tag{11}$$

Parmi u_1, u_2, u_3, u_4, seul u_2 contribue à la partie réelle de la seconde coordonnée. Ainsi pour que $F(u_3)$ soit une combinaison à coefficients entiers des u_1, u_2, u_3, u_4, on a forcément

$$c \equiv 0 \bmod 2 \tag{12}$$

Si on écrit maintenant $F(u_3), F(u_4)$ comme combinaison à coefficients entiers des u_1, u_2, u_3, u_4

$$\begin{aligned} F(u_3) &= m_1 u_1 + n_1 u_2 + p u_3 + q u_4 \\ F(u_4) &= m_2 u_1 + n_2 u_2 + r u_3 + s u_4, \end{aligned}$$

alors en prenant ensuite leurs parties imaginaires

$$\begin{aligned} \Im(F(u_3)) &= p\Im(u_3) + q\Im(u_4) \\ \Im(F(u_4)) &= r\Im(u_3) + s\Im(u_4), \end{aligned}$$

on obtient par (11)

$$FT = T \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

car $\Im(u_3, u_4) = Ti$. Puis

$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}). \tag{13}$$

En regardant la partie réelle de la première coordonné de $F(u_4)$, il faut que

$$r \equiv 0 \bmod 2. \tag{14}$$

Puis en regardant la partie réelle de la première coordonnée de $F(u_3)$, il faut que

$$p - a \equiv 0 \bmod 2. \tag{15}$$

$\det(F) = \pm 1$ et la condition (12) impliquent que a est impair. La condition (13) implique que

$$\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \det(F) = \pm 1.$$

Puisque r est pair par (14), on en déduit que p est impair. Ainsi la condition (15) est redondante. Réciproquement il est facile de voir qu'une matrice F satisfaisant toutes ces conditions préserve le réseau. En résumé,

Proposition 3.22 *Soit $X = \mathbb{C}^2/[\Omega]$ une surface abélienne réelle (dont la structure réelle est donnée par la conjugaison complexe) où*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} + t_{11}i & t_{12}i \\ 0 & 1 & t_{21}i & t_{22}i \end{pmatrix}$$

avec $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Soit F une matrice qui représente un automorphisme réel de X. Alors $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $F = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ représente un automorphisme réel de X est :

1. *c est un entier pair ;*
2. *$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ est une matrice à coefficients entiers telle que r est pair.*

$\det(F) = ad - bc = \pm 1$ implique que a, d sont impairs puisque c est pair. Ainsi $\eta = \mathrm{Tr}(F) = a + d$ est pair. On a donc montré :

Proposition 3.23 *Si λ est un nombre de Salem de degré deux qui est le degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne réelle dont $\mu = 1$, alors le η qui correspond à λ est un entier pair (η déterminé à signe près : $\lambda + 1/\lambda = \eta^2 \pm 2$ selon si $\det(F) = \mp 1$).*

On garde toujours les notations comme dans la proposition 3.22.

Produits de deux courbes elliptiques. Considérons $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ce sont les T les plus simples pour qui la condition (13) est vérifiée. Dans ce cas, on calcule :

$$r = t_{22}(at_{12} + bt_{22} - dt_{21} - ct_{11}) + c.$$

En particulier, si t_{22} et c sont tous pairs, alors les conditions de la proposition 3.22 sont vérifiées. Pour η un nombre pair et $\det(F) = \pm 1$ prescrits, on pose alors :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

et

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix} \text{ si } \det(F) = 1, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix} \text{ si } \det(F) = -1.$$

On vérifie que les conditions de la proposition 3.22 sont satisfaites. T donne donc une surface abélienne réelle sur laquelle F induit un automorphisme réel à entropie prescrite. Tous les λ dans la proposition 3.23 sont donc réalisés. Puisque les coefficients de T sont tous entiers, on vérifie facilement que le rang de la forme alternée associée à X égale à deux. Cela implique que X est un produit de courbes elliptiques par proposition 3.10.

Surfaces abéliennes simples. Pour trouver des surfaces abéliennes simples, il faut exploiter plus la condition (13). Une première idée consiste à prendre d'abord $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ et puis la multiplier par un nombre réel non nul. Malheureusement ceci donne encore des surfaces qui sont isogènes à un produit de courbes elliptiques (en utilisant la méthode de Ruppert, on tombe à la fin sur une quadrique non dégénérée dans $\mathbb{P}^2$). La proposition suivante nous décrit tous les candidats de T.

Proposition 3.24 *On fixe $F \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ une matrice qui correspond à un automorphisme d'une surface abélienne à entropie positive. Soit $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui vérifie la condition* (13)*. Alors T s'écrit sous la forme*

$$T = (\theta F + \xi)P, \ \theta, \xi \in \mathbb{R}, \ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

Démonstration Si

$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),$$

alors $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ est semblable à F sur $\mathbb{R}$, donc semblable à F sur $\mathbb{Q}$. Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ tel que

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = P^{-1}FP.$$

On en déduit que

$$F = PT^{-1}FTP^{-1}.$$

C'est-à-dire que F commute avec TP^{-1}. La proposition découle ensuite du lemme classique suivant :

Lemme 3.25 *Si $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice dont le polynôme minimal égale au polynôme caractéristique, alors toute matrice réelle qui commute avec F est un polynôme en F.*

Dans notre cas, l'hypothèse du lemme est vérifiée parce que F admet deux valeurs propres distinctes. $\square$

Ayant cette proposition en tête, nous allons construire des surfaces abéliennes simples. On fixe comme toujours un entier pair η et $\det(F) = \pm 1$; ils déterminent un nombre de Salem λ. Nous allons d'abord construire des surfaces abéliennes réelles qui réalisent λ ; puis nous montrons que ces surface sont simples.

étape I. On choisit d'abord deux réels θ et ξ loins d'être rationnels, par exemple $\theta = \pi, \xi = \pi^\pi$

1. Dans le cas où $\det(F) = 1$, on pose
$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix}$$
et
$$T = (\theta F + \xi)P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{\eta-2}{2} & \eta - 1 \end{pmatrix}.$$
2. Dans le cas où $\det(F) = -1$, on pose
$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta}{2} \\ 2 & \eta - 1 \end{pmatrix}$$
et
$$T = (\theta F + \xi)P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$T^{-1}FT = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{\eta}{2} & \eta - 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que T et F satisfont les conditions dans la proposition 3.22 ; elles fournissent une surface abélienne réelle avec un automorphisme réel dont le degré dynamique est λ.

étape II. Il reste à montrer qu'une surface abélienne réelle (X, S) ainsi construite est simple. On traite le cas où $\det(F) = 1$ en utilisant la méthode de Ruppert. Dans ce cas on a
$$T = \begin{pmatrix} \theta(a+b) & \theta(a+2b) + \xi \\ \theta(c+d) + \xi & \theta(c+2d) + 2\xi \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord les valeurs de la forme alternée α pour les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4

qui forment une base du réseau :

$$\begin{aligned}
\alpha(u_1,u_2) &= \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\\
\alpha(u_1,u_3) &= \det\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}+\theta(a+b)i\\ 0 & (\theta(c+d)+\xi)i\end{pmatrix} = (\theta(c+d)+\xi)i\\
\alpha(u_1,u_4) &= \det\begin{pmatrix}1 & (\theta(a+2b)+\xi)i\\ 0 & (\theta(c+2d)+2\xi)i\end{pmatrix} = (\theta(c+2d)+2\xi)i\\
\alpha(u_2,u_3) &= \det\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}+\theta(a+b)i\\ 1 & (\theta(c+d)+\xi)i\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}-(\theta(a+b))i\\
\alpha(u_2,u_4) &= \det\begin{pmatrix}0 & (\theta(a+2b)+\xi)i\\ 1 & (\theta(c+2d)+2\xi)i\end{pmatrix} = -(\theta(a+2b)+\xi)i\\
\alpha(u_3,u_4) &= \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\theta(a+b)i & (\theta(a+2b)+\xi)i\\ (\theta(c+d)+\xi)i & (\theta(c+2d)+2\xi)i\end{pmatrix}\\
&= \theta^2+\xi^2+(a-c-d)\theta\xi+(\frac{\theta(c+2d)}{2}+\xi)i.
\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha(u,v) = \frac{1}{2}\alpha_1(u,v)+\alpha_2(u,v)\theta i+\alpha_3(u,v)\xi i+\alpha_4(u,v)(\theta^2+\xi^2+(a-c-d)\theta\xi)$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ sont données dans la base (u_1,u_2,u_3,u_4) par

$$\alpha_1 : \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \alpha_2 : \begin{pmatrix}0 & 0 & 2(c+d) & 2(c+2d)\\ 0 & 0 & -2(a+b) & -2(a+2b)\\ -2(c+d) & 2(a+b) & 0 & c+2d\\ -2(c+2d) & 2(a+2b) & c+2d & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 : \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad \alpha_4 : \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Elles définissent les hyperplans H_i dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2([\Omega]\otimes\mathbb{C}))$:

$H_1 :\ 2X_{12} - X_{23} = 0$

$H_2 :\ (c+d)X_{13} + (c+2d)X_{14} - (a+b)X_{23} - (a+2b)X_{24} + \dfrac{1}{2}(c+2d)X_{34} = 0$

$H_3 :\ X_{13} + 2X_{14} - X_{24} + X_{34} = 0$

$H_4 :\ X_{34} = 0.$

La grassmannienne est définie par

$Q :\ X_{12}X_{23} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23} = 0.$

On calcule l'intersection de ces hyperplans et la grassmannienne ; en éliminant les variables $X_{12}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$, c'est une quadrique dans $\mathbb{P}^1$ définie par

$$(a+b)X_{13}^2 + (a-c-d)X_{13}X_{14} + (2a+4b-c-2d)X_{14}^2 = 0. \qquad (16)$$

On avait posé $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta-2}{2} \\ 2 & \eta-1 \end{pmatrix}$. On calcule le discriminant de (16) :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a-c-d)^2 - 4(a+b)(2a+4b-c-2d) \\ &= (2-\eta)^2 - 4(\eta/2)(-2) \\ &= \eta^2 + 4 > 0.\end{aligned}$$

Puisque le module d'une valeur propre de F est strictement supérieur à 1, η ne peut pas être nul, étant la trace de F. Par conséquent Δ n'est jamais le carré d'un entier. Ceci implique que les deux points de la quadrique (16) ne sont pas rationnels. La simplicité de notre surface abélienne découle donc de la proposition 3.11.

On peut traiter le cas où $\det(F) = -1$ de la même manière ; les calculs sont similaires. On a donc prouvé que tous les nombres de Salem dans la proposition 3.23 sont réalisés sur des surfaces abéliennes simples réelles.

3.10 Conclusion

On rappelle qu'un nombre de Salem λ admissible est uniquement déterminé par le couple $(\eta, \det(F))$.

Théorème 3.26 *Si $\lambda > 0$ est le degré dynamique d'un automorphisme réel d'un tore complexe de dimension deux muni d'une structure réelle, alors le tore est une surface abélienne et λ est un nombre de Salem admissible (de degré deux et tel que $\lambda + \lambda^{-1} + 2$ ou $\lambda + \lambda^{-1} - 2$ est le carré d'un entier).*
Si on divise l'ensemble des surfaces abéliennes réelles en huit types, selon le nombre de composantes connexes de la partie réelle et selon si la surface abélienne est simple, alors le tableau suivant résume si un nombre de Salem admissible peut être réalisé par une surface abélienne réelle d'un des huit types :

	simple	*isogène à un produit de courbes elliptiques*
$\emptyset$	*tous*	*tous*
1 composante	*tous*	*tous*
2 composantes	*ceux qui vérifient* $\eta \equiv 0 \mod 2$	*ceux qui vérifient* $\eta \equiv 0 \mod 2$
4 composantes	*tous*	*tous*

En particulier, tout nombre de Salem admissible est le degré dynamique d'un automorphisme réel d'une surface abélienne réelle.

Remarque 3.27 Pourtant pour chaque type, les nombres de Salem ne sont pas toujours réalisés sur une même surface fixée.

Démonstration Le cas où la partie réelle est vide est démontré dans la section 3.8. Le cas où la surface est un produit de courbes elliptiques et où la partie réelle contient une ou quatre composantes est démontré dans la section 3.6. Le cas où la surface est simple et où la partie réelle contient une ou quatre composantes est démontré dans la secton 3.7. Le cas où la partie réelle contient exactement deux composantes est démontré dans la section 3.9. □

4 Surfaces K3

4.1 Automorphismes de surfaces K3

Nous résumons quelques propriétés de base de surfaces K3 ; la référence est [Ast85] ou [BHPVdV04].

Réseaux. Nous avons d'abord besoin de quelques terminologies sur les réseaux.

Définition 4.1 *Un réseau est un groupe abélien libre de type fini $L \cong \mathbb{Z}^n$ muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle , \rangle$ non dégénérée à valeurs entières. Le réseau L est dit pair si pour tout $x \in L$, $\langle x, x\rangle \in 2\mathbb{Z}$. Si la forme $\langle , \rangle$ donne un isomorphisme entre L et son dual $L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$, alors L est dit unimodulaire. La signature de L est la signature de la forme $\langle , \rangle$ étendue en $L \otimes \mathbb{R}$.*

Deux réseaux pairs unimodulaires avec la même signature sont isomorphes ; il existe un réseau pair unimodulaire de signature (p, q) si et seulement si $p \equiv q \mod 8$.

Surfaces K3.

Définition 4.2 *Une surface K3 est une surface complexe compacte simplement connexe dont le fibré canonique est trivial.*

Il se trouve que toutes les surfaces K3 sont kählériennes. Soit X une surface K3. Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ muni de la forme d'intersection est un réseau pair unimodulaire de signature $(3, 19)$. Tout réseau unimodulaire pair est isomorphe à une somme directe de plans hyperboliques U et de $E_8(\pm 1)$ où E_8 est le réseau unimodulaire pair défini positif de rangs 8 ; $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $3U \oplus 2E_8(-1)$.

Si C est une courbe d'auto-intersection -2 sur X, alors d'après la formule de genre $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 - C\dot{K}) = 0$, ce qui implique que C est une courbe rationnelle lisse. Si D est un fibré en droites d'auto-intersection -2, alors la formule de Riemann-Roch implique que $h^0(D) + h^0(-D) > 0$, c'est-à-dire que soit D soit $-D$ est effective. Avec ces deux remarques, nous allons introduire certaines notions. Un élément $x \in NS(X)$ est dit une *racine* si $x^2 = \langle x, x\rangle = -2$. Nous notons $\Pi(X) = \{x \in NS(X) | x^2 = -2\}$ l'ensemble des racines. L'espace vectoriel réel $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est de signature $(1, 19)$; le cône $\mathcal{C}(X) = \{x \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) | x^2 > 0\}$ admet deux composantes connexes dont l'une contient le cône de Kähler $\mathcal{K}(X)$. Il existe un système de racines positives $\Pi^+ \subset \Pi$ tel que $\Pi = \Pi^+ \cup (-\Pi^+)$ et $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{C} | \langle x, y\rangle > 0, \forall y \in \Pi^+\}$. Autrement dit, $\mathcal{K}$ est une chambre de $\mathcal{C}$ découpée par les hyperplans définis par des racines positives.

Théorème de Torelli. Soit L un réseau pair unimodulaire de signature $(3, 19)$. Une structure de K3 sur L est la donnée suivante :

1. Une décomposition $L \otimes \mathbb{C} = L^{2,0} \oplus L^{1,1} \oplus L^{0,2}$ telle que $L^{i,j} = \overline{L^{j,i}}$, et les espaces hermitiens $L^{1,1}$ et $L^{2,0} \oplus L^{0,2}$ sont respectivement de signature $(1, 19)$ et $(2, 0)$.

2. Un système de racines positives $\Pi^+ \subset \Pi = \{x \in L \cap L^{1,1} | x^2 = -2\}$ tel que $\Pi = \Pi^+ \cup -\Pi^+$ qui définit un cône de Kähler $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{C} | \langle x, y \rangle > 0, \forall y \in \Pi^+\}$ où $\mathcal{C} = \{x \in L | x^2 > 0\}$. On exige que $\mathcal{K}$ soit non vide.

Théorème 4.3 (Torelli) *Soit L un réseau muni d'une structure K3. Il existe une unique surface K3 X telle qu'il existe un isomorphisme $\iota : L \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ envoyant $L^{i,j}$ à $\mathrm{H}^{i,j}(X)$ et $\mathcal{K}$ au cône de Kähler de X. De plus toute isométrie $f \in \mathrm{O}(L)$ préservant la structure K3 est réalisée par un unique automorphisme F de X tel que $F^* \circ \iota = \iota \circ f$.*

Le théorème de Torelli ramène donc le problème de construction d'automorphismes à un problème algébrique. La reformulation suivante sera utile dans la suite :

Théorème 4.4 ([McM16] 6.1) *Soit L un réseau paire unimodulaire de signature $(3, 19)$. Une isométrie $f \in \mathrm{L}$ est réalisée par un automorphisme d'une surface K3 X si et seulement s'il existe un plan $T \subset L \otimes \mathbb{R}$ f-invariant tel que*

1. *T est de signature $(2, 0)$;*
2. *$f|_T \in \mathrm{SO}(T)$;*
3. *$f|_P$ préserve un système de racines positives, où $P = T^\perp \cap L$.*

La réalisation est telle que $P \cong NS(X)$ et $T \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$.

Stratégie. Soit f un automorphisme à entropie positive avec le degré dynamique λ. Soit S le polynôme de Salem associé à λ. On a vu dans le théorème 2.4 que le polynôme caractéristique de f^* sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ est un produit de S avec des polynômes cyclotomiques. Chaque facteur irréductible du polynôme caractéristique détermine un sous-réseau de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$.
Réciproquement, pour construire un automorphisme f dont le degré dynamique est λ, il s'agira de construire des sous-réseaux correspondant à S et aux certains polynômes cyclotomiques, puis de coller ces sous-réseaux ensemble en respectant les conditions du théorème 4.4.

4.2 Collage

Nous expliquons comment coller deux réseaux en utilisant la notion de groupe de collage.
Groupe de collage. Soit L un réseau. Le groupe de collage de L est $G(L) = L^*/L$; c'est un groupe abélien fini. Il est muni d'une forme bilinéaire $\ll, \gg$ à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par

$$\ll x, y \gg = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \bmod 1$$

où $\bar{x}, \bar{y} \in L^*$ représentent $x, y \in G(L)$. Soit $(B_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle)_{ij}$ la matrice de Gram associée à une base $(e_i)_i$ de L. Alors l'ordre du groupe de collage est

$$|G(L)| = |\det(B_{ij})|.$$

En tant que groupe abélien fini, $G(L)$ se décompose en $G(L) = \bigoplus G(L)_p$. La forme $\ll, \gg$ restreinte à $G(L)_p$ est à valeurs dans $\frac{1}{p^e}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ pour un certain e. Dans le cas particulier où $G(L)_p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$, $\ll, \gg$ qui est à valeurs dans $\frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$ peut être considérée comme un produit scalaire.

Extensions et collages. Un sous-groupe H de $G(L)$ correspond à un module M tel que $L \subset M \subset L^*$. La forme $\ll, \gg$ est isotrope sur H si et seulement si la forme $\langle , \rangle$ est à valeurs entières sur M. Nous avons donc la bijection suivante :

$$\begin{aligned} &\{\text{réseaux } M \text{ tels que } L \subset M \subset L^*\} \\ \longleftrightarrow &\left\{\text{sous-groupes isotropes } \bar{M} \text{ de } G(L)\right\}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $L = L_1 \oplus L_2$ est la somme directe de deux sous-réseaux. Une *application de collage* est un isomorphisme $\phi : H_1 \to H_2$ entre deux sous-groupes $H_i \subset G(L_i), i = 1, 2$ tel que $\ll x, y \gg = - \ll \phi(x), \phi(y) \gg$. Cette condition implique que le sous-groupe

$$\bar{M} = \{(x, \phi(x)) | x \in H_1\} \subset G(L_1) \oplus G(L_2) = G(L)$$

est isotrope. Ainsi ϕ détermine une extension $M = L_1 \oplus_\phi L_2$ de $L_1 \oplus L_2$ que nous appelons le collage de L_1 et L_2 le long de ϕ. Le réseau M vérifie que $M \cap (L_i \otimes \mathbb{Q}) = L_i$; on dit qu'une extension vérifiant cette propriété est *primitive*. Nous avons alors la bijection suivante :

$$\begin{aligned} &\{\text{extensions primitives } L_1 \oplus L_2 \subset M\} \\ \longleftrightarrow &\{\text{applications de collage } \phi : H_1 \to H_2\}. \end{aligned}$$

Supposons que nous avons maintenant en plus deux isométries $f_i \in \mathrm{O}(L_i)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} &\{\text{extensions } f \in \mathrm{O}(M) \text{ de } f_1 \oplus f_2 \in \mathrm{O}(L_1 \oplus L_2)\} \\ \longleftrightarrow &\{\text{applications de collage } \phi : H_1 \to H_2 \text{ telles que } \phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi\}. \end{aligned}$$

Corps fini. Dans le cas général, il est difficile de manipuler des applications de collage. Pourtant il y a une manière simple de faire le collage quand les deux groupes de collage sont $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels :

Théorème 4.5 ([McM11] 3.1) *Soient $f_i \in \mathrm{O}(L_i), i = 1, 2$ deux isométries. Soit p un nombre premier. Supposons que*

1. *Chaque $G(L_i)_p$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel ;*
2. *Les applications induites $\overline{f_i}$ sur $G(L_i)_p$ ont le même polynôme caractéristique S ;*
3. *$S \in \mathbb{F}_p[x]$ est un polynôme séparable tel que $S(1)S(-1) \neq 0$.*

Alors il y a une application de collage $\phi : G(L_1)_p \to G(L_2)_p$ telle que $f_1 \oplus f_2$ s'étend en $L_1 \oplus_\phi L_2$.

La condition 3) assure que S se factorise en facteurs irréductibles distincts de degré supérieur à 2 et que l'espace vectoriel correspondant est une somme directe des sous-espaces de dimension supérieure à 2 ; ceci permet de se ramener au cas où S est irréductible.

Contraintes. Quand nous fixons les polynômes caractéristiques des isométries, il y a des contraintes sur l'ordre des groupes de collage. Nous rappelons la notion de résultant : soient $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ deux polynômes unitaires sans racines communes dans $\mathbb{C}$, le *résultant* de P et Q est

$$res(P, Q) = \prod_{P(u)=0, Q(v)=0} (u - v).$$

Le résultant a la propriété suivante : *les polynômes $\bar{P}, \bar{Q}$ obtenus de P, Q par modulo p ont un facteur commun dans $\mathbb{F}_p[x]$ si et seulement si p divise $res(P, Q)$.* Nous pouvons en déduire

Proposition 4.6 ([McM16] 4.3) *Soit L un réseau unimodulaire. Soit f une isométrie de L. Supposons que le polynôme caractéristique de f est P_1P_2 où P_1, P_2 sont premiers entre eux. Posons $L_i = Ker(P_i(f)|_L)$. Alors tout nombre premier p qui divise $|G(L_1)| = |G(L_2)|$ divise aussi $res(P_1, P_2)$.*

Démonstration Puisque L est unimodulaire, l'application de collage ϕ est un isomorphisme entre $G(L_1)$ et $G(L_2)$, leurs ordres sont donc égaux. Notons $\overline{f_i}$ l'endomrophisme de $G(L_i)/pG(L_i)$ induite par f. Alors les deux $\overline{f_i}$ sont conjugués par ϕ et satisfont que $P_1(\overline{f_i}) = P_2(\overline{f_i}) = 0$. On en déduit que les deux P_i ont un facteur commun modulo p. D'où $p|res(P_1, P_2)$. □

4.3 Réseaux dans des corps de nombres

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire irréductible réciproque de degré $2d$ ($P(x) = x^{2d}P(x^{-1})$). Nous décrirons dans cette section une méthode pour construire un réseau L et une isométrie f de L tels que le polynôme caractéristique de f est P. Nous associons à P le *polynôme trace* R caractérisé par $P(x) = x^d R(x + x^{-1})$. Considérons les corps $k = \mathbb{Q}[x]/R(x)$ et $K = \mathbb{Q}[y]/P(y)$. Alors $K = k(y)$ avec $y + 1/y = x$. Le groupe de Galois $Gal(K/k)$ est un groupe d'ordre deux engendré par $x^\sigma = 1/x$.
Posons $A = \mathbb{Z}[x]/R(x) \subset k$; c'est un sous-anneau de l'anneau des entiers algébriques de k. Munissons A d'une forme bilinéaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_A = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^k \left(\frac{f_1(x) f_2(x)}{R'(x)} \right)$$

où R' est le polynôme dérivé de R. C'est un fait classique que A muni de cette forme est un réseau unimodulaire (voir par exemple [Lan94] Chapter 3). Nous posons ensuite $B = \mathbb{Z}[y]/P(y) \subset K$ et le munissons d'une forme bilinéaire :

$$\langle g_1, g_2 \rangle_B = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^K \left(\frac{g_1 g_2^\sigma}{R'(x)} \right) = \langle 1, \mathrm{Tr}_k^K (g_1 g_2^\sigma) \rangle_A.$$

Proposition 4.7 *Le réseau B est pair et l'ordre de son groupe de collage est $|G(B)| = |P(1)P(-1)|$.*

Démonstration Définissons un endomorphisme Q de A^2 par

$$Q(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Pour $(a+by) \in A \oplus yA = B$ on a $(a+by)(a+by)^\sigma = a^2+b^2+abx$, de sorte que

$$\langle a+by, a+by \rangle_B = 2\langle 1, a^2+b^2+abx \rangle_A = \langle Q(a,b), (a,b) \rangle_{A^2}.$$

Ainsi B est paire. En notant $N_{\mathbb{Q}}^k$ la norme, on a encore

$$|G(B)| = |N_{\mathbb{Q}}^k(4-x^2)| = |R(2)R(-2)| = |P(1)P(-1)|$$

puisque $N_{\mathbb{Q}}^k(n-x) = R(n)$. $\square$

On remarque aussi que la multiplication par y que nous notons m_y est naturellement une isométrie du réseau B dont le polynôme caractéristique est P. Selon McMullen, on dit que B est le *réseau principal associé à P*.

Twist. Dans le cas de construction d'automorphismes de surfaces K3, nous avons des contraintes sur la signature et la taille du groupe de collage. Nous introduisons donc une opération de *twist* qui permet d'ajuster la signature et le groupe de collage de B.

Soit $a \in \mathbb{Z}[y+1/y] = A \subset B$. La multiplication par a est un endomorphisme linéaire de B ; on note $\det(a)$ son déterminant. Alors $\langle x,y \rangle_a = \langle ax, y \rangle$ définit une nouvelle forme bilinéaire symétrique sur B ; on appelle le nouveau réseau $B(a)$. De plus m_y est encore une isométrie de $B(a)$.

Nous avons une suite exacte de B-modules

$$0 \to B/aB \to G(B(a)) \to G(B) \to 0. \tag{17}$$

Le nouveau groupe de collage $G(B(a)) = B^*/aB$ est d'ordre $|\det(a)||G(B)|$.

Proposition 4.8 *Le réseau $B(a)$ est pair.*

Démonstration Ecrivons $a = \sum_{i=0}^d a_i(y^i + y^{-i})$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$. Soit $b \in B$ Puisque B est pair et $\langle yb, b \rangle = \langle y^{-1}b, b \rangle$, nous avons

$$\langle ab, b \rangle = a_0 \langle b, b \rangle + \sum_{i=1}^d 2\langle y^i b, b \rangle \in 2\mathbb{Z}.$$

$\square$

Modifier la signature. Soit $u(x) \in \mathbb{Z}[x]/R(x) = A$ une unité de l'anneau A. Alors la multiplication par u est de déterminant ± 1 ; les groupes de collage de $B(u)$ et B ont le même ordre tandis que la signature est modifiée par le twist. La forme bilinéaire du réseau $B(u)$ s'étend en un produit scalaire hermitien sur

$B(u) \otimes \mathbb{C}$; m_y s'étend en une isométrie sur $B(u) \otimes \mathbb{C}$. Nous avons donc une décomposition orthogonale m_y-invariante :

$$B(u) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{R(\tau)=0} E(\tau)$$

où $E(\tau) = \ker(m_y + m_y^{-1} - \tau I)$ est de dimension deux ; les valeurs propres $\lambda, 1/\lambda$ de m_y sur $E(\tau)$ vérifient $\lambda + 1/\lambda = \tau$.

Théorème 4.9 ([McM02] 8.3) *Soit τ une racine de R. Pour τ réel, le sous-espace $E(\tau)$ est de signature*
$(2,0)$ *si* $|\tau| < 2$ *et* $u(\tau)R'(\tau) > 0$,
$(0,2)$ *si* $|\tau| < 2$ *et* $u(\tau)R'(\tau) < 0$,
$(1,1)$ *si* $|\tau| > 2$.
Pour τ non réel, le sous-espace $E(\tau) \oplus E(\bar{\tau})$ est de signature $(2,2)$.

Démonstration Supposons d'abord que $\tau \in \mathbb{R}$. Le produit hermitien sur $E(\tau)$ est la complexification de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

$$q(a,b) = 2u(\tau)(a^2 + b^2 + ab\tau)/R'(\tau).$$

La signature de la forme $(a^2 + b^2 + ab\tau)$ est $(1,1)$ si $|\tau| > 2$ et $(2,0)$ si $|\tau| < 2$. D'où la signature de q.
Supposons que τ est non réel. Soit λ la valeur propre telle que $\lambda + 1/\lambda = \tau$. Alors le sous-espace engendré par les vecteurs propres correspondant à $\lambda, \bar{\lambda}$ est isotrope de dimension deux. Cela implique que $E(\tau) \oplus E(\bar{\tau})$ est de signature $(2,2)$. □

Plus généralement soit $a(x) \in \mathbb{Z}[x]/R(x) = A$. Alors $B(a) \otimes \mathbb{C}$ se décompose aussi en $\bigoplus_{R(\tau)=0} E(\tau)$, et nous avons

Théorème 4.10 *Soit τ une racine de R. Pour τ réel, le sous-espace $E(\tau)$ est de signature*
$(2,0)$ *si* $|\tau| < 2$ *et* $a(\tau)R'(\tau) > 0$,
$(0,2)$ *si* $|\tau| < 2$ *et* $a(\tau)R'(\tau) < 0$,
$(1,1)$ *si* $|\tau| > 2$.
Pour τ non réel, le sous-espace $E(\tau) \oplus E(\bar{\tau})$ est de signature $(2,2)$.

Remarque 4.11 Soit u une unité. L'application $x \mapsto ux$ est un isomorphisme entre $B(uu^\sigma a)$ et $B(a)$. Puisque le conoyau de l'application norme $\mathcal{O}_K^* \to \mathcal{O}_K^*$ est fini, les conjugués d'un $a \in A$ ne déterminent qu'un nombre fini de twists à isomorphisme près.

Modifier le groupe de collage. Fixons un nombre premier p qui ne divise pas $|G(B)|$. Notons $Q \mapsto \bar{Q}, \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$ l'application modulo p d'un polynôme. Nous voulons modifier le groupe de collage afin de nous trouver dans la situation du théorème 4.5. Le twist par p vérifie que $G(B(p))_p \cong \mathbb{F}_p^{2d}$ et $\det(xI - \overline{m_y}|_{G(B(p))_p}) = P(x)$. Plus généralement supposons que

1. Le polynôme $\bar{P} \in \mathbb{F}_p[x]$ est séparable ;
2. $a \in A$ divise p.

Alors

Théorème 4.12 ([McM11] 4.2) *Le groupe de collage du réseau $B(a)$ est $G(B(a)) = G(B(a))_p \oplus G(B)$. De plus $G(B(a))_p$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel ; le polynôme caractéristique de $\overline{m_y}$ sur $G(B(a))_p$ est $\bar{Q} = pgcd(\bar{A}, \bar{P}) \in \mathbb{F}_p[x]$ où $a = A(y) \in B$.*

Démonstration Comme a divise p, $\det(a)$ est une puissance de p. Puisque p ne divise pas $|G(B)|$, la suite exacte (17) est scindée, ce qui montre la décomposition du groupe de collage. $G(B(a))_p$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel car c'est un quotient de $G(B(p)) \cong \mathbb{F}_p^{2d} \cong \mathbb{F}_p[x]/\bar{P}(x)$. Nous avons

$$G(B(a))_p \cong G(B(p))/aG(B(p)) \cong \mathbb{F}_p[x]/(\bar{A}, \bar{P}) \cong \mathbb{F}_p[x]/(\bar{Q}). \qquad \square$$

Nous donnons maintenant sans démonstration deux cas particuliers où les constructions précédentes sont générales dans le sens suivant :

Théorème 4.13 ([McM16] 5.2) *Supposons que $\mathbb{Z}[x]/P(x)$ est l'anneau des entiers algébriques de K et que le nombre de classes est 1. Supposons aussi qu' aucun entier carré ne divise $|P(1)P(-1)|$. Soient L un réseau et f une isométrie de L dont le polynôme caractéristique est P. Alors le couple (L, f) est isomorphe à $(B(a), m_y)$ pour un certain $a \in A$.*

C'est-à-dire que si un polynôme P vérifie les conditions de ce théorème, alors tout réseau qui possède un automorphisme dont le polynôme caractéristique est P est obtenu par un twist du réseau principal associé à P.

Théorème 4.14 ([McM11] 4.3) *Supposons que A est un anneau de Dedekind dont le nombre de classes est 1, que $\bar{P} \in \mathbb{F}_p[x]$ est séparable, que $P(1)P(-1) \neq 0$ et que $pgcd(p, |G(B)|) = 1$. Soit $\overline{P_1}$ un facteur réciproque de $\bar{P}$. Alors il existe un twist $B(a)$ avec a un facteur de p tel que*

$$\overline{P_1}(x) = \det(xI - \overline{m_y}|_{G(B(a))_p}).$$

4.4 Positivité

On se donne dans cette section un réseau pair L de signature $(n, 1)$ (hyperbolique) ou $(n+1, 0)$ (euclidien). On pose $V = L \otimes \mathbb{R}$. On dit qu'un élément $\phi \in V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ est *positif* ($\phi \gg 0$) si $\ker \phi$ est un sous-espace défini positif de V. On pose $\Phi = \{y \in L | y^2 = 2\}$ l'ensemble des racines de L. On dit qu'une isométrie $f \in \mathrm{O}(L)$ est *positive* s'il existe $\phi \gg 0$ tel que $\Phi \cap \ker \phi = \emptyset$ et que le système de racines positives $\Phi_+ = \{y \in \Phi | \phi(y) > 0\}$ est invariant par f.
Nous associons respectivement à L l'espace homogène

$$X = \begin{cases} \mathbb{H}^n = \{x \in V | x^2 = -1\}/(\pm 1) \\ S^n = \{x \in V | x^2 = 1\} \end{cases}$$

dans le cas hyperbolique ou euclidien. X peut être identifié avec une composante de $V_+^*/\mathbb{R}_+$ où $V_+^* = \{\phi \in V^* | \phi \gg 0\}$. Les hyperplans $y^\perp$ pour $y \in \Phi$ découpent X en chambres convexes ouvertes. Les isométries de L agissent par isométrie sur X (par rapport à la métrique hyperbolique ou sphérique) et permutent des chambres.
On note $\mathrm{O}^+(L)$ le sous-groupe des isométries qui préservent chaque composante de $\{y \in V | y \neq 0, y^2 = 0\}$. Le groupe $\mathrm{O}^+(L)$ admet un sous-groupe : *le groupe de Weyl* $W(L)$ engendré par les réflexions orthogonales déterminées par $y \in \Phi$ (fixant $y^\perp$). On peut maintenant formuler la notion suivante :

Définition 4.15 *Une isométrie $f \in \mathbb{O}(L)$ est dite positive si et seulement si f préserve un système de racines positives, ce qui équivaut à dire que $f \in \mathrm{O}^+(L)$ et f préserve une chambre de X.*

Remarque 4.16 La positivité correspond à la préservation du cône de Kähler, voir théorème 4.4.

Une condition équivalente.

Définition 4.17 *Soient $y \in \Phi$ et $f \in \mathrm{O}^+(L)$. On dit que y est une racine obstacle pour f s'il n'existe pas de $\phi \gg 0$ tel que $\phi(f^i(y)) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On dit que y est cyclique si $y + f(y) + \cdots + f^i(y) = 0$ pour un certain i.*

Toute racine cyclique est une racine obstacle. Dans le cas sphérique, toute racine obstacle est cyclique. Dans le cas où $X = \mathbb{H}^n$ et f est une translation le long d'une géodésique $\gamma \subset \mathbb{H}^n$, une racine obstacle est soit une racine cyclique soit une racine dont l'hyperplan correspondant intersecte γ.

Proposition 4.18 ([McM16] 2.1) *Une isométrie $f \in \mathrm{O}^+(L)$ est positive si et seulement si f n'a pas de racine obstacle.*

Critère I. On peut parfois passer à un sous-réseau pour rendre une isométrie positive en se débarrassant des racines obstacle.

Proposition 4.19 ([McM16] 3.1) *Soit $f \in W(L)$ qui s'exprime comme un produit de réflexions $f = s_1 \cdots s_r$ correspondant aux racines $y_1, \cdots, y_r$. Soit $M \subset L$ un sous-réseau f-invariant. Si $s_1 s_2 \cdots s_{i-1}(y_i) \notin M$ pour $i = 1, \cdots, n$, alors f est positive sur M.*

Démonstration Prenons une chambre C_0 dont les réflexions par rapport aux faces engendrent le groupe de Weyl $W(L)$. Alors $C_i = s_1 \cdots s_i(C_0)$ donnent un chaîne de chambres adjacentes reliant C_0 et $C_n = f(C_0)$; les chambres C_{i-1} et C_i sont adjacentes le long de $(s_1 s_2 \cdots s_{i-1}(y_i))^\perp$.
Puisque M a moins de racines, ses chambres sont plus grandes. Considérons l'unique chambre D_0 de M contenant C_0. Comme les $s_1 s_2 \cdots s_{i-1}(y_i)$ ne sont pas dans M, les C_i sont toutes contenues dans D_0. Ainsi $f(D_0) = D_0$ et f est positive sur M. $\square$

Critère II. Supposons que L est hyperbolique et que f agit sur X comme une translation le long d'une géodésique $\gamma \subset X$; c'est-à-dire que le rayon spectral de f est strictement plus grand que 1. On pose $a = f + f^{-1}$ et $A = \mathbb{R}[a]$; les éléments de l'algèbre A sont des endomorphismes auto-adjoints de V. Tout $x \in L$ détermine une forme sur A par $\varphi_x(a) = \langle ax, x\rangle$. Ces formes engendrent un sous-groupe discret $M \subset A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{R})$.
Notons $\tau_1 > \cdots > \tau_r$ les valeurs propres de a, et $p_i \in A$ les projections correspondantes. On a alors $p_i^2 = p_i, ap_i = \tau_i p_i$ et $\sum p_i = 1$. Posons $V_i = p_i(V)$. Alors $V = \bigoplus V_i$ est une décomposition orthogonale f-invariante ; le sous-espace V_1 est de signature $(1, 1)$, tous les autres sont définis positifs. On intoduit

$$\mu(f) = \min\{\varphi(1) | \varphi \in M; \varphi(p_1) > 0; \varphi(p_i) \geqslant 0, i > 1\} > 0.$$

Proposition 4.20 ([McM16] 3.3) *l'isométrie f est positive s'il n'y a pas de racine cyclique et si $\mu(f) > 2$.*

Démonstration Supposons que y est une racine obstacle de f. Comme f n'a pas de racine cyclique, $y^\perp$ intersecte la géodésique γ. Cela implique que $\varphi_y(p_1) > 0$. Pour $i > 1$, comme V_i est défini positif, on a $\varphi_y(p_i) = \langle p_i y, y\rangle$. Ainsi $\mu(f) \leqslant \varphi_y(1) = y^2 = 2$. □

La condition est suffisante mais non nécessaire ; l'avantage de ce critère est que le minimum $\mu(f)$ peut être calculé par l'ordinateur.
Critères III et IV. On énonce aussi deux critères techniques concernant la positivité du collage de deux isométries. Soit $L = L_1 \oplus_\phi L_2$ un réseau paire obtenu par collage d'un réseau hyperbolique L_1 et un réseau euclidien L_2. Soit $f = f_1 \oplus f_2$ une isométrie de L obtenu par collage de deux isométries f_1, f_2.

Proposition 4.21 ([McM11] 5.1) *Supposons que $x^2 \in 2a_i\mathbb{Z}$ pour tout $x \in L_i$ avec $a_i > 1$, et que $bL \subset L_1 \oplus L_2$ avec $b^2 \notin \mathbb{Z}_+ a_1 + \mathbb{Z}_+ a_2$. Alors f est une isométrie positive de L si f_1 a une valeur propre strictement plus grand que* 1.

Proposition 4.22 ([McM11] 5.2) *Supposons que f_1, f_2 sont positives et que toute racine $(y_1, y_2) \in L$ non inclus dans $L_1 \oplus L_2$ vérifie que $y_2^2 \geqslant 2$. Alors f est positive sur L.*

4.5 Stratégie générale

Nous fixons un nombre de Salem λ de degré $d \leqslant 22$ dont le polynôme de Salem est S. Nous essayons de construire un automorphisme d'une surface K3 projective dont le degré dynamique est λ.
Etape 1. Construire le réseau principal (B, m) associé à S. Rappelons que $A \subset B$ correspond à une extension de corps de degré deux $k \subset K$.
Etape 2. Trouver des polynômes cyclotomiques C de degré inférieur à $22 - d$ tels que C et S ont un facteur commun modulo un certain nombre premier p. Le nombre de tels polynômes cyclotomiques est fini. Par la proposition 4.6, le

nombre des nombres premiers p concernés est aussi fini ; on dit qu'un tel nombre premier est admissible. Prendre l'ensemble P formé de tous les facteurs premiers des nombres premiers admissibles.
Etape 3. Considérer l'ensemble E formé des éléments $a \in A$ qui sont produits des éléments de P et tels que $C(m)|_{G(B(a))} = 0$ où C de degré $\leqslant (22 - d)$ est un certain produit de polynômes cyclotomiques.
Etape 4. Choisir $U \subset A^* \subset \mathcal{O}_k^*$ un système de représentants modulo l'image de l'application norme $K \to k$; l'ensemble U est fini. D'après la remarque 4.11, remplacer E par des $au \in EU$ tels que la signature de $B(au)$ est $(d-1, 1)$. Le nouvel ensemble E est fini.
Etape 5. Remplacer E par son sous-ensemble qui contient des a tels que m satisfait le critère 4.20 sur $B(a)$; alors m est positive sur $B(a)$ pour tels a.
Etape 6. Trouver un $a \in E$ et un réseau (B', m') correspondant à un produit de polynômes cyclotomiques tels qu'il existe un collage L entre (B, m) et (B', m') tel que $L(-1)$ vérifie les conditions du théorème 4.4.

Remarque 4.23 Supposons que S satisfait

1. le nombre de classes de l'anneau des entiers de k est 1 ;
2. les conditions de la proposition 4.13.

Si un réseau de type K3 possède un automorphisme dont le rayon spectral est λ, alors il y a un sous-réseau correspondant au polynôme de Salem S. Sous nos conditions, par la proposition 4.13 ce sous réseau est toujours obtenu par un twist du réseau principal associé à S ; les étapes 1–4 sont donc générales dans le sens que tout automorphisme de surface K3 projective dont le degré dynamique est λ peut être construit de cette manière.

Les étapes 1–5 sont routinières ; on peut les faire avec un ordinateur. Pourtant l'étape 6 pose souvent des difficultés. On essaie de choisir des $a \in E$ qui vérifient les conditions du théorème 4.5 ; c'est essentiellement le seul cas qu'on sait vraiment manipuler en pratique. Pour la positivité du collage, on peut utiliser les propositions 4.21 et 4.22.

4.6 Réalisation de λ_{10}

Les polynômes minimaux des nombres de Salem minimum λ_d pour $d \leqslant 20$ vérifient tous les conditions de la remarque 4.23. En effectuant les étapes 1–5 par Mathematica, McMullen a montré

Théorème 4.24 ([McM16] 1.2) *Les nombres de Salem λ_d peuvent être réalisés comme degré dynamique d'automorphisme de surface K3 projective pour $d = 2, 4, 6, 8, 10, 18$, mais non pour $d = 14, 16, 20, 22$.*

Le cas où $d = 12$ reste ouvert à cause des difficultés de l'étape 6. Nous présentons dans cette section un exemple qui réalise λ_{10} et un argument qui rejette λ_{16} pour illustrer la méthode.

Théorème 4.25 ([McM16] 7.1) *Il existe un automorphisme F d'une surface K3 projective X tel que le rang de $NS(X)$ est 12, et le degré dynamique $\lambda(F) = \lambda_{10}$. Le polynôme caractéristique de F^* sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ est $S(x)C_{22}(x)(x^2-1)$ où S est le polynôme minimal de λ_{10} et C_{22} est le polynôme cyclotomique d'ordre 22.*

Démonstration Les nombres premiers admissibles sont $3, 5, 13, 23$ et 29. Prenons $p = 23$. Les polynômes S et C_{22} satisfont

$$pgcd(\overline{S}(x), \overline{C_{22}}(x)) = (x+4)(x+6) \in \mathbb{F}_p[x].$$

Considérons les extensions de corps : $\mathbb{Q} \subset k \subset K$. Il existe à une unité près un facteur premier $a \in A \subset k$ de degré 1 au-dessus de 23 qui se factorise en $vv^\sigma, v \in B \subset K, v \neq v^\sigma$.

Le réseau correspondant à S. Le polynôme S vérifie les conditions du théorème 4.13. Quitte à faire un twist, nous pouvons donc, au lieu de considérer le réseau principal associé à S, prendre directement le réseau L_1' associé au diagramme de Coxeter E_{10} et l'élément de Coxeter f_1 pour isométrie (voir [Hum90]) ; L_1' est un réseau unimodulaire de signature $(9, 1)$. Nous pouvons choisir un a tel que $L_1 = L_1'(a)$ est encore de signature $(9, 1)$; le réseau L_1 est isomorphe au sous-réseau $v(L_1')$ de L_1'. Nous pouvons vérifier en utilisant la proposition 4.19 que f_1 est positive sur L_1. Le groupe de collage $G(L_1) \cong \mathbb{F}_{23}^2$; l'application $f_1|_{G(L_1)}$ est de période 22.

Le réseau correspondant à C_{22}. Nous prenons le réseau L_2' associé au diagramme de Coxeter A_{10} et f_2 le négatif de l'élément de Coxeter comme isométrie. Le groupe de collage est $G(L_2') = \mathbb{F}_{11}$; l'action de $\overline{f_2}|_{G(L_2')}$ est $\overline{f_2}(x) = -x$. Par le théorème 4.14, nous pouvons trouver $b \in \mathbb{Z}[f_2 + f_2^{-1}], b|23$ qui correspond au facteur $(x+4)(x+6)$ de $\overline{C_{22}}(x)$; nous choisissons b de sorte que le réseau $L_2 = L_2'(b)$ est de signature $(8, 2)$. Alors le théorème 4.5 assure une application de collage $\phi_{12} : G(L_1) \cong G(L_2)_{23}$ qui colle f_1 et f_2.

Le réseau correspondant à (x^2-1). Il reste à coller $G(L_2)_{11} = \mathbb{F}_{11}$. Nous prenons l'anneau des entiers $L_3 = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{-11})/2]$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$; la norme de $a+b\sqrt{-11}$ est $2a^2+22b^2$. Le réseau L_3 est un réseau pair de signature $(2, 0)$ dont le groupe de collage est $G(L_3) \cong \mathbb{F}_{11}$. Nous prenons $f_3(a+b\sqrt{-11}) = a-b\sqrt{-11}$ comme isométrie de L_3. Les actions de $\overline{f_2}$ et $\overline{f_3}$ sur $G(L_2)_{11}$ et $G(L_3)$ respectivement sont toutes données par $x \mapsto -x$; les formes bilinéaires fractionnaires sur $G(L_2)_{11}$ et $G(L_3)$ sont l'inverse l'une de l'autre. Nous avons donc un collage $\phi_{23} : G(L_2)_{11} \to G(L_3)$ qui colle f_2 et f_3. Comme le plus petit carré d'un élément x tel que $f_3(x) = -x$ est plus grand que 2, l'isométrie f_3 est positive.

Assemblage. Le réseau $L = L_1 \oplus_{\phi_{12}} L_2 \oplus_{\phi_{23}} L_3$ est paire unimodulaire de signature $(19, 3)$. Par la proposition 4.22, l'isométrie $f_1 \oplus f_3$ est positive sur $L_1 \oplus L_3$. Nous vérifions que f et $L(-1)$ satisfont les hypothèses du théorème 4.4. D'où la conclusion. $\square$

Théorème 4.26 ([McM16]) *Le nombre de Salem λ_{16} n'est pas réalisable*

Démonstration Les nombres premiers admissibles sont 3 et 29. Après les étapes 1–4, il ne reste que deux choix pour le twist : $a = 1$ ou a est l'un des facteurs premiers de 3. Dans tous les deux cas, la positivité ne tient pas à cause de la présence d'une racine obstacle. □

Remarque 4.27 Nous n'avons pas besoin de la méthode de McMullen pour réaliser λ_2 et λ_4. Ils peuvent être réalisés sur des surfaces abéliennes ; il suffit de passer aux surfaces de Kummer associées.

4.7 Quelques corollaires

Corollaire 4.28 *Les deux nombres de Salem λ_{10} et λ_{18} ne peuvent pas être réalisés sur une même surface K3 projective.*

Démonstration Les nombres de Salem λ_{10} et λ_{18} vérifient les conditions de la remarque 4.13 ; les étapes 1–4 épuisent toutes les possibilités. Après le test de positivité de l'étape 5, il existe trois twists possibles pour λ_{10} et un seul twist possible pour λ_{18}. Dans [McM16], deux twists pour λ_{10} et le twist pour λ_{18} sont réalisés. Le groupe de Néron-Severi de la surface K3 qui réalise λ_{18} est de rang 18 avec un groupe de collage d'ordre 13^2 tandis que les deux autres qui réalisent λ_{10} sont de rang 12 et 16.
Il reste un seul twist pour λ_{10} : l'élément de twist a est un produit d'un facteur premier de 3 et un facteur premier de 29. L'isométrie sur le 29-sous-groupe du groupe de collage est de période 15 (voir [McM]). Le polynôme cyclotomique C_{15} est de degré 8. Si nous vonlons un groupe de Néron-Severi de rang 18, alors C_{22} correspond à un sous-réseau du groupe de Néron-Severi. Ainsi 3 divise l'ordre du groupe de collage du groupe de Néron-Severi ; ce ne peut donc pas être la surface K3 qui réalise λ_{18}.

Corollaire 4.29 *Les nombres de Salem $\lambda_{10}, \lambda_{14}, \lambda_{16}, \lambda_{18}, \lambda_{20}$ et λ_{22} ne peuvent pas être réalisés sur des surfaces K3 réelles.*

Démonstration Les nombres $\lambda_{14}, \lambda_{16}, \lambda_{20}$ et λ_{22} ne peuvent pas être réalisés sur des surfaces K3 complexes projectives, donc non plus sur des surfaces K3 réelles par le théorème 2.16.
Aussi par le théorème 2.16, la valeur propre d'un automorphisme réel à entropie positive sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ est ± 1. Les deux constructions pour λ_{10} et la construction pour λ_{18} (voir la démonstration du corollaire précédent) ne passent pas au cas réel parce que dans ces cas la valeur propre sur $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ n'est pas ± 1.
Il reste le troisième twist candidat pour λ_{10} : l'élément de twist a est un produit d'un facteur premier de 3 et un facteur premier de 29. L'isométrie sur le 29-sous-groupe du groupe de collage est de période 15 tandis que celle sur le 3-sous-groupe est de période 4 (voir [McM]). Ainsi l'action de l'isométrie sur le sous-réseau transcendant ne peut pas être $\pm Id$ qui est de période au plus deux.□

Remarque 4.30 Parmi les nombres de Salem de degré inférieur à 22, $\lambda_{10} < \lambda_{18} < \lambda_{14}$ sont les trois les plus petits. Le quatrième plus petit qui est aussi d'ordre 14 ne peut pas être réalisé sur une surface K3 complexe projective (voir [McM]), donc non plus sur une surface K3 réelle. Comme dans le cas de surfaces abéliennes, le minimum complexe n'est pas le minimum réel.

Pourtant

Proposition 4.31 *Il existe des surfaces K3 réelles qui admettent des automorphismes réels à entropie positive.*

Démonstration Nous décrirons explicitement un tel exemple (voir [Can14] et [McM02] pour les détails).
Considérons une surface lisse X de degré $(2,2,2)$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, définie par exemple par l'équation affine :

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + Axyz = 2, A \in \mathbb{R}, A \neq 0.$$

X est une surface K3 munie naturellement d'une structure réelle. Nous pouvons supposer que X ne contient pas de droites $x = constante, y = constante, z = constante$. Soient π_i la projection vers $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ qui oublie la i-ième coordonnée. Alors $\pi_i : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est un revêtement double. Il existe donc des involutions s_i de X telles que $\pi_i \circ s_i = \pi_i$. Les s_i sont réelles. Soient σ_i la projection vers la i-ième coorodonnée. Notons N le sous-groupe de $NS(X)$ engendré par des classes F_i des fibres de la projection σ_i. Les s_i préservent N ; par exemple s_1 agit sur (C_1, C_2, C_3) par

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rayon spectral de $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^*$ sur N est $9+4\sqrt{5}$. L'automorphisme $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est donc un automorphisme réel de X dont le degré dynamique est $9+4\sqrt{5}$.

Nous avons aussi un autre type d'exemple :

Proposition 4.32 *L'entier quadratique λ_2 peut être réalisé sur une surface K3 réelle.*

Démonstration Nous avons vu que par le théorème 3.26 λ_2 peut être réalisé sur une surface abélienne réelle. Il suffit ensuite de passer à la surface de Kummer associée.

Références

[Ast85] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes.* Société Mathématique de France, Paris, 1985. Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982, Astérisque No. 126 (1985).

[BHPVdV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[BL04] Christina Birkenhake and Herbert Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[Can99] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :901–906, 1999.

[Can14] Serge Cantat. Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces. In *Frontiers in complex dynamics*, volume 51 of *Princeton Math. Ser.*, pages 463–514. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014.

[GM02] Benedict H. Gross and Curtis T. McMullen. Automorphisms of even unimodular lattices and unramified Salem numbers. *J. Algebra*, 257(2) :265–290, 2002.

[Gro03] Mikhaïl Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.

[Hum90] James Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge university Press, 1990.

[KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[Lan94] Serge Lang. *Algebraic number theory*, volume 110 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.

[McM] Curtis McMullen. Salem number/coxeter group/k3 surface package. *dx.doi.org/doi :10.7910/DVN/29211*.

[McM02] Curtis T. McMullen. Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.

[McM07] Curtis T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :49–89, 2007.

[McM11] Curtis T. McMullen. K3 surfaces, entropy and glue. *J. Reine Angew. Math.*, 658 :1–25, 2011.

[McM16] Curtis T. McMullen. Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy. *Invent. Math.*, 203(1) :179–215, 2016.

[Mor84] David Robert Morrison. On k3 surfaces with large picard number. *Invent. Math.*, 75(1) :105–121, 1984.

[Ogu10] Keiji Oguiso. The third smallest Salem number in automorphisms of $K3$ surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, volume 60 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 331–360. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Ogu15] Keiji Oguiso. Free automorphisms of positive entropy on smooth Kähler surfaces. In *Algebraic geometry in east Asia—Taipei 2011*, volume 65 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 187–199. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2015.

[Res12] Paul Reschke. Salem numbers and automorphisms of complex surfaces. *Math. Res. Lett.*, 19(2) :475–482, 2012.

[Res14] Paul Reschke. Salem Numbers and Abelian Surface Automorphisms. *ArXiv e-prints*, June 2014.

[Rup90] Wolfgang M. Ruppert. When is an abelian surface isomorphic or isogeneous to a product of elliptic curves ? *Math. Z.*, 203(2) :293–299, 1990.

[Sil82] Robert Silhol. Real abelian varieties and the theory of Comessatti. *Math. Z.*, 181(3) :345–364, 1982.

[Sil89] Robert Silhol. *Real algebraic surfaces*, volume 1392 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Voi07] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, english edition, 2007. Translated from the French by Leila Schneps.

[Yom87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.