DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant, qui est une version précisée d'un théorème de ShouWu Zhang.

Théorème (Zhang, Zagier).– *Soit ξ une racine primitive de l'unité d'ordre 6. Soit $f \in \mathbf{Z}[t]$ un polynôme de degré d tel que $f(0)f(1)f(\xi) \neq 0$. Soit $f_*(t)$ le polynôme $f_*(t) = f(1-t)$. Alors*

$$m(f) + m(f_*) \geq \frac{d}{2} \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

avec égalité si et seulement si f ou f_* est une puissance de $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$.

Déduire du théorème d'équidistribution de Bilu qu'il existe une constante $c_0 > 0$, ne dépendant pas de f, telle que $m(f) + m(f_*) \geq c_0/d$. Le théorème fournit donc la constante optimale.

(1) Dessiner le cercle unité, son image par $z \mapsto 1 - z$, les racines de l'unité d'ordre 5, les racines de $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = 0$.

(2) Soient ω et $\overline{\omega}$ les racines de $x^2 - x + 1 = 0$. Montrer que, pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$, on a

$$\log^+|z| + \log^+|1-z| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \log|z^2 - z| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log|z^2 - z + 1| + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

avec égalité si et seulement si z ou $1-z$ vaut $\exp(\pm i\pi/5)$ ou $\exp(\pm 3i\pi/5)$.

Pour cela, on notera Φ la fonction obtenue en faisant la différence entre le terme de droite et celui de gauche dans l'inégalité. On montrera que $\Phi(z)$ tend vers $-\infty$ lorsque z tend vers l'infini ou vers 0, 1, ω ou $\overline{\omega}$. Utiliser le principe du maximum, et les symétries $\Phi(\overline{z}) = \Phi(1-z) = \Phi(z)$ pour montrer que Φ atteint son maximum en un point w de la forme $w = \exp(2i\pi\theta$, avec $0 < \theta < 1/2$. Conclure.

Date: 2021.

(3) On suppose f unitaire, et on note z_i ses racines. Montrer que les quantités $\prod |z_i^2 - z_i|$ et $\prod |z_i^2 - z_i + 1|$ sont des entiers > 0. En déduire l'inégalité cherchée.

(4) On ne suppose plus f unitaire, on note $a_d \in \mathbf{Z}$ son coefficient dominant. Reprendre la question précédente en remarquant que $\log|a| = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \log|a_d^2| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log|a_d^2|$, et conclure.

Exercice 2. Soit f un polynôme à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$ de degré $d \geq 2$. On suppose qu'une infinité de racines de l'unité sont des points prépériodiques de f. Montrer que le f préserve le cercle unité : si $|z| = 1$ alors $|f(z)| = 1$. En déduire que f est égal à αz^d avec α une racine de l'unité.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble de Julia d'un $f \in \mathbf{C}[t]$ de degré > 1 n'a pas de point isolé.

Exercice 4. Soient f et g deux éléments de $\mathbf{C}[t]$ de degrés > 1. On suppose que f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g ont même ensemble de Julia.

Exercice 5. Soit K un corps de nombres et v une place de K. Soit A un réel ≥ 1. On dit que v est A-active en $x \in \overline{\mathbf{Q}}$ si $|x|_v \geq A$. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant x, on note $h_\infty^A(x)$ la somme

$$h_\infty^A(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v|\infty; |x|_v \geq A} [K_v : \mathbf{Q}_v] \log^+ |x|_v.$$

C'est la somme sur les places à l'infini qui sont A-actives. On note aussi $h_\infty(x)$ cette somme quand $A = 1$. On utilise des notations similaires $h_F^A(x)$ et $h_F(x)$ pour les places finies.

A.– Le but de cette première partie est de montrer le lemme suivant: *Pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, $D \geq 1$ et $A \geq 1$ tels que*

$$h_\infty^A\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq \eta$$

pour tout $x \in \overline{\mathbf{Q}}$ tel que $h(x) \leq \varepsilon$ et $\deg(x) \geq D$.

(1) Soit $\Phi_A : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\Phi_A(z) = \log|1-z|$ si $|1-z| > 1/A$ et $\Phi_A(z) = 0$ si $|1-z| \leq 1/A$. Déduire de la formule de Jensen que, pour A assez grand, on a

$$\left| \int_0^1 \Phi_A\left(e^{2i\pi\theta}\right) d\theta \right| \leq \eta/3.$$

On choisit un tel $A \geq 1$ pour la suite.

(2) Si x est un élément de $\overline{\mathbf{Q}}$ de degré d, on note $x_1 = x, \ldots, x_d$ ses conjugués galoisiens. Déduire du théorème de Bilu et de la question précédente qu'il existe $D \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ pour lesquels
$$\left| \frac{1}{d} \sum_{|1-x_i|>1/A} \log|1-x_i| \right| \leq 2\eta/3$$
pour tout $x \in \overline{\mathbf{Q}}$ de degré $\geq D$ et de hauteur $\leq \varepsilon$.

(3) Avec les mêmes notations, montrer que
$$\frac{1}{d} \sum_{|1-x_i|\leq 1/A} \log \frac{1}{|1-x_i|} \leq h(x) + \sum_{|1-x_i|>1/A} \log|1-x_i|.$$
En déduire le lemme annoncé.

B.– Dans cette seconde partie, on montre : *Pour tout* $\eta > 0$, *il existe* $D \geq 1$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que*
$$h_F(x)\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq \eta$$
dès que $h(x) \leq \varepsilon$ *et* $\deg(x) \geq D$.

(1) Déduire du théorème de Bilu, appliqué à $\Phi(z) = \log|1-z|$ (on justifiera l'application), que $h_\infty(1-x) - h_\infty((1-x)^{-1})$ est petit si $h(x)$ est petit et $\deg(x)$ est grand. On pourra comparer $h_F(x)$ et $h_F(1-x)$.

(2) En déduire le résultat annoncé (on pourra utiliser la formule du produit).

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr