GROUPES LINÉAIRES
MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. On admet la version suivante du théorème de Bezout.

Théorème 0.1. Soit K un corps algébriquement clos. Soient X_1, ..., X_s des sous-variétés algébriques de $\mathbb{A}_K^m$. On suppose que chaque X_i est de dimension pure (ses composantes irréductibles sont toutes de même dimension). Alors, en notant Z_1, ..., Z_t les composantes irréductibles de $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_t$, on a

$$\sum_{i=1}^{t} \deg(Z_i) \leq \prod_{j=1}^{s} \deg(X_j).$$

On admettra aussi le fait que si X et X' sont deux variétés irréductibles distinctes, alors $\dim(X \cap X') < \max(\dim(X), \dim(X'))$.

Si X est une sous-variété algébrique de l'espace affine, on note $\chi(X) = \sum_i \deg(X_i) + \dim(X_i)$, la somme portant sur les composantes irréductibles de X. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :

Lemme d'échappement.– *Pour tout entier χ, il existe un entier $N(\chi)$ vérifiant la propriété suivante. Si $X \subset Mat_m(K)$ est une sous-variété algébrique telle que $\chi(X) \leq \chi$ et si $\Sigma \subset \mathsf{GL}_m(K)$ est un sous-ensemble symétrique ($s \in \Sigma$ ssi $s^{-1} \in \Sigma$) contenant l'identité et engendrant un groupe Γ qui n'est pas contenu dans X, alors*

$$\Sigma^{N(\chi)} = \{s_1 \cdots s_{N(\chi)} \, ; \, s_j \in \Sigma \forall j\}$$

n'est pas contenu dans X.

(1) On note $im(X)$ le nombre de composantes irréductibles de X de dimension $\dim(X)$. Montrer que $im(X) \leq \chi(X)$.
(2) Soit X_1 une composante irréductible de X de dimension maximale. Montrer qu'il existe $s \in \Sigma$ tel que $s(X_1) \neq X_1$.
(3) Montrer qu'il existe $s \in \Sigma$ tel que ou bien $\dim(X \cap s(X)) < \dim(X)$ ou bien $\dim(X \cap s(X)) = \dim(X)$ et $im(X \cap s(X)) < im(X)$.

Date: 2021.

(4) Construire une suite d'éléments $s_1, \ldots, s_m$ dans Σ telle que la suite de variétés $X_1 = X$, $X_2 = X_1 \cap s_1(X_1)$, ..., $X_m = X_{m-1} \cap s_m(X_{m-1})$ satisfait $\dim(X_m) < \dim(X)$, avec m majoré par une fonction de χ.
(5) Constuire d'autres éléments $s_{m+1}, \ldots, s_N$ tels que $X_N = \emptyset$, en majorant N en fonction de χ.
(6) Montrer que Σ^N ne peut être contenu dans X.

Exercice 2. Soit Γ un groupe et Γ_0 un sous-groupe de Γ d'indice fini. Montrer que Γ_0 contient un sous-groupe d'indice fini Γ_1 qui est distingué dans Γ.

Exercice 3. On dit qu'un groupe Γ est hopfien si tout homomorphisme surjectif $\rho\colon \Gamma \to \Gamma$ est bijectif. Le but de cet exercice est de montrer que les groupes de type fini résiduellement finis (propriétés de Malcev) sont hopfiens.

Soit Γ un groupe de type fini qui est résiduellement fini (pour tout $f \in \Gamma$ distinct de l'élément neutre e_Γ, il existe un homomorphisme de Γ vers un groupe fini qui envoie f sur un élément distinct du neutre). Soit N un sous-groupe distingué de Γ tel que Γ/N et Γ soient isomorphes.

(1) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, le nombre de sous-groupes de Γ d'indice $\leq m$ est fini et est égal au nombre de sous-groupes d'indice $\leq m$ contenant N.
(2) En déduire que tout sous-groupe d'indice fini contient N, et conclure.

Exercice 4. Soit r un entier ≥ 1. Soit $F_r = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ le groupe libre de rang r. Montrer que F_r est résiduellement fini. Soit $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ un système de générateurs de F_r ayant exactement r éléments. Montrer que l'homomorphisme $\rho\colon F_r \to F_r$ défini par $\rho(a_i) = s_i$ est un isomorphisme (utiliser l'exercice précédent); autrement dit, il n'y a pas de relations non-triviales entre les s_i.

Exercice 5. Cet exercice démontre la continuité des racines en fonction du polynôme. Soit K un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. Soit $P(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i$ un élément de $K[t]$ de degré d, et $P_n(t)$ une suite d'éléments de $K[t]$ de degrés d dont les coefficients tendent vers ceux de P. Autrement dit,

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{d} (a_i + \varepsilon_i(n)) t^i$$

avec $\lim_n |\varepsilon_i(n)| = 0$ pour tout $0 \leq i \leq d$. Soient α_j, $1 \leq j \leq d$, les racines de P, répétées selon leur multiplicité. On numérote les racines $\alpha_j(n)$ de P_n de telle sorte que $|\alpha_j - \alpha_j(n)| = \min_k |\alpha_j - \alpha_k(n)|$ pour tout n, pour tout j.

(1) Montrer que $\alpha_1(n)$ converge vers α_1 lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra changer P (resp. P_n) en $P(t-\alpha_1)$ (resp. $P_n(t-\alpha_1)$) et étudier le terme constant de ces polynômes.

(2) On effectue la division de P par $(t-\alpha_1)$ et de P_n par $(t-\alpha_1(n))$:

$$P(t) = (t-\alpha_1)H(t), \qquad P_n(t) = (t-\alpha_1(n))H_n(t).$$

Montrer que H_n converge vers H dans l'espace des polynômes de degré $d-1$. (exprimer les coefficients des H_n en fonction de ceux des P_n).

(3) Conclure.

On notera que cette preuve n'utilise pas d'hypothèse de compacité locale ou de complétude pour $(K, |\cdot|)$.

Exercice 6. Soit Γ un groupe de type fini. On se donne une partie génératrice finie $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ de Γ et on considère le graphe de Cayley $C_S(\Gamma)$ associé. On note $S^{-1} = \{s_1^{-1}, \ldots, s_n^{-1}\}$. Les éléments de Γ qui sont à distance $\leq r$ de l'élément neutre dans $C_S(\Gamma)$ sont ceux qui peuvent être écrits comme un produit d'au plus r termes $u_1 \cdots u_s$, $s \leq r$, chaque u_i étant dans $S \cup S^{-1}$. On note $B_S(r)$ cet ensemble, et $|B_S(r)|$ son cardinal.

(1) Calculer $|B_S(r)|$ pour $\Gamma = \mathbf{Z}^m$ et S l'ensemble des vecteurs de la base canonique.

(2) Calculer $|B_S(r)|$ pour $\Gamma = F_m = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ et $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

(3) Montrer que $|B_S(r+r')| \leq |B_S(r)||B_S(r')|$. En déduire que $|B_S(r)|^{1/r}$ converge lorsque r tend vers $+\infty$ vers un réel ≥ 1. On note $\lambda(S)$ ce réel.

(4) Montrer que la propriété $\lambda(S) > 1$ ne dépend pas du choix de la partie génératrice S.

(5) Montrer que si Γ contient un groupe libre de rang ≥ 2, alors $\lambda(S) > 1$.

Complément.– Un théorème de Guivarc'h permet d'estimer $|B_S(r)|$ lorsque Γ est résoluble. En particulier, pour un tel groupe, ou bien $|B_S(r)|$ est majoré par un polynôme en r, ou bien $\lambda(S) > 1$. En déduire que cette propriété est valable pour les groupes linéaires de type fini. Par contre, il existe des groupes de type fini pour lesquels la croissance de $|B_S(r)|$ est intermédiaire (par exemple $c_1 \exp(n^{\alpha}) \leq |B_S(r)| \leq c_2 \exp(n^{\beta})$ avec $0 < \alpha < \beta < 1$).

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr