FRACTIONS RATIONNELLES ET AUTOMORPHISMES
MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. Montrer que $f(z) = z^2 + c$ possède une infinité de points prépériodiques réels lorsque $c < -2$, et qu'il n'en possède aucun lorsque $c > 1/4$.

Exercice 2. On se donne un entier $d > 1$ et on considère l'application monomiale $g\colon z \mapsto z^d$. Montrer que tout point prépériodique de g est soit situé sur le cercle unité $\{|z| = 1\}$, soit égal à 0 (soit situé à l'infini dans la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que les points périodiques de g situés sur le cercle unité forment un sous-ensemble dense du cercle.

Exercice 3. (*Nécessite d'avoir suivi le cours sur les surfaces de Riemann.*)

On considère un nombre complexe τ de partie imaginaire > 0. On considère le réseau $\Lambda = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau \subset \mathbf{C}$, puis la courbe elliptique $E = \mathbf{C}/\Lambda$. On considère un entier $D > 1$ et l'application $F\colon E \to E$ définie par $F(z) = Dz \mod (\Lambda)$.

(1) Montrer que tout point de E a exactement D^2 pré-images par F.
(2) Montrer que F commute à l'application $\eta(z) = -z \mod (\Lambda)$.
(3) Montrer que le quotient E/η est une sphère de Riemann, et que F induit par passage au quotient un endomorphisme f de la sphère de Riemann (i.e. une fraction rationnelle agissant sur $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$). Calculer le degré de cette fraction rationnelle f.
(4) Montrer que les points périodiques de f sont denses dans la sphère de Riemann.

Exercice 4. Soit a un nombre complexe non nul. Soit $p(t) \in \mathbf{C}[t]$ un polynôme de degré $d > 1$. On considère l'application $f\colon \mathbb{A}^2_{\mathbf{C}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbf{C}}$ définie par $f(x,y) = (ay, x + p(y))$.

(1) Montrer que f est un automorphisme polynomial du plan affine complexe. On calculera l'automorphisme inverse f^{-1}.
(2) Montrer que le degré des formules définissant le n-ème itéré f^n est égal à d^n.

Date: 2021.

(3) Soit $L \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{C}}$ une droite affine, définie par une équation $ax+by+c=0$ avec $ab \neq 0$. Déduire du théorème de Bell, Ghioca, et Tucker que l'orbite d'un point (x,y) qui n'est pas périodique intersecte L un nombre fini de fois. (On montrera que L n'est pas f-périodique.)

Exercice 5. Les groupes suivants peuvent-ils agir fidèlement par automorphismes polynomiaux sur un espace affine complexe de dimension m ? On précisera éventuellement la dimension en fonction des cas:

(1) Le groupe fini $\mathsf{Bij}(N)$ des permutations d'un ensemble à N éléments.
(2) Le groupe $\mathsf{SL}_N(\mathbf{Z})$ des matrices N par N à coefficients dans $\mathbf{Z}$.
(3) Le sous-groupe Γ des permutations de $\mathbf{Z}$ qui est engendré par les deux éléments suivants: l'involution qui transpose 0 et 1 et fixe tous les autres entiers ; la translation $n \mapsto n+1$. On commencera par montrer que Γ contient une copie de $\mathsf{Bij}(N)$ pour tout $N > 0$.
(4) Le groupe $\mathsf{SL}_N(\mathbf{Z}_p)$.

Exercice 6. Soit f un automorphisme polynomial de $\mathbb{A}^m_{\mathbf{C}}$, soit x un point de $\mathbb{A}^m(\mathbf{C})$, soit W une sous-variété algébrique de $\mathbb{A}^m_{\mathbf{C}}$. On suppose que $f^p(x) \in W$ pour tout nombre premier p. Que dire de l'ensemble des n tels que $f^n(x) \in W$?

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr