CORPS VALUÉS COMPLETS: EXERCICES
MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. *Equivalence des valeurs absolues.*– Soit $\mathbf{K}$ un corps. Soient $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ deux valeurs absolues sur $\mathbf{K}$ définissant la même topologie. On veut montrer qu'il existe $s>0$ tel que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^s$.

(1) Traiter le cas où l'une des valeurs absolues est triviale. Dans la suite on suppose que les deux valeurs absolues ne sont pas triviales.
(2) Montrer que si $|x|_1 < 1$ alors $|x|_2 < 1$. Dans la suite, nous n'utiliserons que cette propriété et la non-trivialité.
(3) Soit y un élément de $\mathbf{K}$ pour lequel $|y|_1 > 1$ (montrer qu'un tel élément existe). Soit x un élément non nul de $\mathbf{K}$. Soit α le réel tel que $|x|_1 = |y|_1^{\alpha}$. Montrer que $|x|_2 = |y|_2^{\alpha}$. Pour cela, écrire α comme une limite monotone (décroissante puis croissante) de rationnels p_i/q_i, puis remarquer que $|x|_1 < |y|_1^{p_i/q_i}$ peut-être écrit sous la forme $|x^{q_i}/y^{p_i}|_1 < 1$.
(4) Conclure : deux valeurs absolues définissent la même topologie si et seulement si $|x|_1 < 1$ entraîne $|x|_2 < 1$, si et seulement s'il existe $s > 0$ tel que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^s$.

Exercice 2. *Théorème d'approximation.*– Soient $|\cdot|_j$, $j = 1, \ldots, n$, des valeurs absolues non-triviales et deux-à-deux non équivalentes sur un corps $\mathbf{K}$ fixé. Soient a_1, …, a_n des éléments de $\mathbf{K}$. Le but est de démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in \mathbf{K}$ tel que $|x - a_j|_j < \varepsilon$ pour tout $1 \leq j \leq n$. On peut supposer $n > 1$.

(1) Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'il existe un élément y de $\mathbf{K}$ tel que $|y|_1 > 1$ et $|y|_n < 1$.
(2) Montrer par récurrence sur n qu'il existe $z_1 \in \mathbf{K}$ tel que $|z_1|_1 > 1$ et $|z_1|_j < 1$ pour $j \geq 2$. On pourra considérer la suite $z_1 = z^m(1+z^m)^{-1}y$ où y est fourni par la question (1) et z est fourni par l'hypothèse de récurrence.

Date: 2021.

(3) Soit z_1 comme dans la question (2). Montrer que $z_1^m(1+z_1^m)^{-1}$ converge vers 1 pour $|\cdot|_1$ et vers 0 pour les autres valeurs absolues.
(4) Conclure.

Exercice 3. On munit $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue usuelle, notée $|\cdot|_\infty$. Soit E le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbf{R}$.

(1) Montrer que E est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension 2 pour lequel $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) := (1, \sqrt{5})$ est une base. On note $\|\cdot\|_{sup}$ la norme du supremum dans cette base. Quel est le complété de l'espace vectoriel E pour cette norme ?
(2) Notons maintenant $\|\cdot\|_\infty$ la restriction de la valeur absolue usuelle de $\mathbf{R}$ à E. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une valeur absolue sur E et que c'est une norme pour E vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. Quel est le complété de E pour cette valeur absolue ?
(3) Comparer les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{sup}$.

Exercice 4. Soit $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

(1) Tout triangle est isocèle.
(2) Si deux boules ont une intersection non vide, elles sont emboitées.
(3) Tout point d'une boule est un centre.
(4) La boule unité fermée $\{z \in \mathbf{K} ; |z| \leq 1\}$ est compacte.

On considère le corps $\mathbf{Q}_5$. Dessiner la boule unité fermée $\mathbf{Z}_5$ et les boules de rayon $1/5$ et $1/25$ qui sont contenues dans $\mathbf{Z}_5$; on les étiquètera suivant la classe résiduelle de leur centre dans $\mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de démontrer le *Lemme de Krasner*. Soit $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ un corps valué complet non archimédien de caractéristique nulle. Soit $\overline{\mathbf{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{K}$. On note encore $|\cdot|$ l'unique extension de la valeur absolue de $\mathbf{K}$ à $\overline{\mathbf{K}}$. Montrer que tout élément σ de $\mathsf{Gal}(\overline{\mathbf{K}} : \mathbf{K})$ est une isométrie de $\overline{\mathbf{K}}$: $|\sigma(x)| = |x|$.

Soit x un élément de $\overline{\mathbf{K}}$ de degré d sur $\mathbf{K}$; soient $x_1 = x$, x_2, …, x_d les conjugués de x. Soit y un élément de $\overline{\mathbf{K}}$ tel que $|x-y| < |x-x_j|, \quad \forall j = 2, \ldots, d$. Montrer que $\mathbf{K}(x) \subset \mathbf{K}(y)$. (Montrer que les éléments de $\mathsf{Gal}(\overline{\mathbf{K}} : \mathbf{K}[y])$ fixent tous x.)

Cet énoncé peut être étendu au cas de caractéristique positive en considérant une clôture séparable de $\mathbf{K}$ plutôt qu'une clôture algébrique.

Exercice 6.

(1) Utiliser le lemme de Hensel pour montrer que $\mathbf{Q}_p$ contient toutes les racines de l'unité d'ordre $p-1$. Pour chaque classe $j \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \setminus \{0\}$, montrer qu'il existe exactement une racine ξ_j congrue à j modulo $p\mathbf{Z}_p$. Ces racines ξ_j forment donc un sous-groupe multiplicatif de $\mathbf{Q}_p^\times$ qui est en bijection avec $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ par réduction modulo p.
(2) Montrer que $t^p - p$ est irréductible dans $\mathbf{Q}_p[t]$ (critère d'Eisenstein).
(3) Pour quels nombres premiers p le corps $\mathbf{Q}_p$ contient-il une racine carrée de 5 ? (voir la définition et le calcul du symbole de Legendre, et appliquer le lemme de Hensel). Pour $p = 11$, on considère la racine $x \in \mathbf{Q}_p$ de $x^2 = 5$ vérifiant $x = 4 \mod (p)$. Calculer les premiers termes du développement $x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n + \cdots$, avec $0 \le a_j \le p-1$ pour tout j.

Exercice 7. Soit $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ un corps valué complet non-archimédien. Pour $f = \sum_n a_n t^n$ un élément de $\mathbf{K}[t]$ on pose $\| f \| = \max |a_n|$. Soient $f = \sum_n a_n t^n$ et $g = \sum b_n t^n$ deux polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbf{K}$ tels que $\| f - g \| < 1$.

(1) Montrer que f et g ont le même degré ; on le note d.
(2) Montrer que $\| f \| = \| g \| \geq 1$.
(3) Soit y une racine de g. Montrer que $|y| \le \max |b_i|^{1/i} \le \| g \|$.

On suppose désormais que f est unitaire, irréductible et à racines simples : $f(t) = \prod_{j=1}^{d} (t - x_j)$ où les x_j sont des éléments deux-à-deux distincts (de $\overline{\mathbf{K}}$). On pose

$$d(f) = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$$

et on suppose désormais que

$$\| f - g \| < \min \left(1, \left(\frac{d(f)}{\| f \|} \right)^d \right).$$

Soit y une racine quelconque de g.

(4) Montrer que

$$\prod_j |y - x_j| \le \| f - g \| \max(1, |y|^d) \le \| f - g \| \| f \|^d .$$

(5) Montrer qu'il existe une racine x_k de f telle que $|y - x_k| < d(f)$.
(6) Déduire du lemme de Krasner que $\mathbf{K}(x_k) \subset \mathbf{K}(y)$. En déduire que y est de degré d, que $\mathbf{K}(x_k) = \mathbf{K}(y)$, puis que g est irréductible.

Ainsi, si f est un polynôme unitaire, irréductible, et séparable, il existe $\delta(f) > 0$ tel que la propriété suivante soit satisfaite : pour tout g unitaire tel que $\|$

$f - g \| < 1$ et pour toute racine y de g, g est irréductible et il existe une racine x de f telle que $\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}(y)$.

Exercice 8. Montrer que la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ n'est pas un corps complet, mais que sa complétion est algébriquement close. (s'aider éventuellement de l'exercice précédent, ou de la littérature sur le sujet.)

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr