DEVOIR MAISON III, MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $m < +\infty$. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur V. On note encore $\| \cdot \|$ la norme d'opérateur sur $\mathsf{End}\,(V)$. Si A est une partie bornée de V (resp. de $\mathsf{End}\,(V)$), on pose $\| A \| = \sup_{v \in A} \| v \|$.

Dans toute la suite, F est une partie bornée de $\mathsf{End}\,(V)$. On définit $R(F) = \lim_n \| F^n \|^{1/n}$ où

$$F^n = \{f_1 \circ \cdots \circ f_n \,;\, f_i \in F,\, \forall\, 1 \le i \le n\}.$$

On dit que F est irréductible si tout sous-espace W de V tel que $f(W) \subset W$ pour tout $f \in F$ est égal à $\{0\}$ ou V. Le semi-groupe engendré par F est $S_F = \cup_{n \ge 1} F^n$.

(1) Montrer que
$$R(F) = \inf_{\|\cdot\|'} \| F \|', \tag{0.1}$$
l'infimum étant pris sur l'ensemble des normes $\| \cdot \|'$ de $\mathbf{C}^m$ (ou plutôt sur l'ensemble des normes d'opérateurs associées). On pourra considérer $x \mapsto \sum_{n \ge 0} \| F^n(x) \| \, r^n$ pour r convenablement choisi.

(2) On suppose que F est irréductible. Montrer que $R(F) > 0$. Montrer que le semi-groupe engendré par $F/R(F)$ est borné. Montrer que l'infimum est atteint dans la question précédente.

(3) On suppose que $R(F) = 0$, montrer que la sous-algèbre de $\mathsf{End}\,(V)$ engendrée par F est conjuguée à une sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale.

(4) On suppose maintenant que F est irréductible et que $R(F) = 1$. Pour x dans V, on pose
$$\nu(x) = \limsup_n \| F^n x \| \,.$$
Montrer que ν est une norme sur V.

(5) On suppose F irréductible, montrer qu'il existe une norme ν sur V telle que $\sup_{f \in F} \nu(f(x)) = \mathbf{R}(F)\nu(x)$ pour tout $x \in V$. Montrer que ν vérifie le cas d'égalité dans l'équation (0.1).

Date: 2021.

Exercice 2. Montrer qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que, pour tout polynôme $f \in \mathbf{Z}[t]$ irréductible de degré $d > 1$ dont les racines sont toutes réelles, $m(f) \geq \varepsilon d$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant, version simplifiée d'un théorème de Smyth (1980): *Soit $f \in \mathbf{Z}[t]$ un polynôme de degré d qui n'est pas réciproque, c'est-à-dire que $f(1/t)t^d \neq f(t)$, et qui ne s'annule ni en 0 ni en 1. Alors la mesure de Mahler logarithmique de f vérifie*

$$m(f) \geq \log\sqrt{\frac{5}{4}} > \frac{1}{10}.$$

–.Préliminaires.–

(1) On suppose que f n'est pas unitaire, montrer que $m(f) \geq \log(2) > \log\sqrt{\frac{5}{4}}$.
(2) On suppose que f est unitaire et irréductible, avec $f(-1)f(1) \neq 0$. Montrer que si l'une des racines de f est située sur le cercle unité alors f est réciproque.

Dans la suite, on supposera donc f unitaire.

–.Produits de Blashcke.–

(1) Soit α un nombre complexe de module < 1. On considère l'homographie
$$h(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$
Montrer que $|h(w)| = 1$ pour tout nombre complexe w de module 1. Montrer que h induit un difféomorphisme holomorphe du disque unité dans lui même.
(2) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des nombres complexes de modules < 1. Considérons le produit
$$H(z) = h_{\alpha_1}(z)h_{\alpha_2}(z)\cdots h_{\alpha_s}(z).$$
Montrer que H est une fraction rationnelle de degré s telle que $|H(w)| = 1$ si $|w| = 1$, $|H(w)| < 1$ si $|w| < 1$, et $|H(w)| > 1$ si $|w| > 1$.
(3) Notons $H(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ le développement en série de Taylor de H à l'origine. Calculer le rayon de convergence de cette série et montré qu'il est > 1. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{+\infty} |b_i|^2 = 1.$$

–.Démonstration du théorème.–

On suppose que f est unitaire et irréductible et que $f(0)=1$. On note α_1, …, α_d ses racines. Le polynôme réciproque est noté f^*:

$$f^*(t)=f(1/t)t^d.$$

On définit une fraction rationnelle $R\in\mathbf{C}(t)$ par

$$R(t)=\frac{f(t)}{f^*(t)}.$$

(1) Vérifier que $R(0)=1$ et que

$$R(t)=\frac{\prod_j(t-\alpha_j)}{\prod_j(1-\alpha_j t)}=\prod_j\frac{(t-\alpha_j)}{(1-\overline{\alpha_j}t)}.$$

(2) Montrer que le développement de R en série de Taylor à l'origine fournit une série entière à coefficients entiers dont le terme constant est égal à 1. On note

$$R(z)=1+a_kz^k+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots$$

cette série entière, où k est le premier entier ≥ 1 tel que $a_k\neq 0$.

(3) On considère les fractions rationnelles

$$H(t)=\prod_{|\alpha_j|<1}\frac{(t-\alpha_j)}{(1-\overline{\alpha_j}t)}\quad\text{et}\quad K(t)=\prod_{|\alpha_j|>1}\frac{(1-\overline{\alpha_j}t)}{(t-\alpha_j)}.$$

On note $H(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots$ et $K(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ leurs développements de Taylor à l'origine. Montrer que $b_0=c_0=\exp(-m(f))$, où $m(f)$ est la mesure de Mahler logarithmique de f. Montrer que $b_i=c_i$ pour $i<k$ et que $c_0a_k+c_k=b_k$. En déduire que

$$\max\{|c_k|,|b_k|\}\geq b_0/2=c_0/2.$$

(4) On suppose que $|b_k|\geq b_0/2$. Montrer que $\frac{5}{4}b_0^2\leq 1$. Conclure dans ce cas.

(5) Conclure dans le cas général (sans hypothèse sur f autre que celle du théorème).

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr