MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ définie par $f[x:y:z] = [x^3+y^2z : y^3+z^3 : x^2y+y^2x]$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $[a:b:c]$ prépériodiques pour f dont les coordonnées a, b, et c sont des nombres algébriques de degré 2.

Exercice 2. Soit f un automorphisme de $\mathbb{A}^m_{\mathbf{C}}$ tel que f et f^{-1} sont définis par des formules à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbb{A}^m(\mathbf{Z})$. Montrer que l'orbite $\{f^n(x) \; ; \; n \in \mathbf{Z}\}$ ne peut être égale à $\mathbb{A}^m(\mathbf{Z})$.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme de l'espace projectif $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbf{Q}}}$, de degré $d \geq 2$. Le but de cet exercice est de démontrer que les points fixes de f dans $\mathbb{P}^m(\mathbf{C})$ forment un sous-ensemble fini contenu dans $\mathbb{P}^m(\overline{\mathbf{Q}})$.

On note $[z_0 : \ldots : z_m]$ les coordonnées homogènes. On note $Fix(f) \subset \mathbb{P}^m(\mathbf{C})$ l'ensemble des points fixes de f.

1. Montrer que $Fix(f)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbf{Q}}}$. Autrement dit, dans chaque carte affine $z_j = 1$, $Fix(f)$ est défini par un système d'équations polynomiales à coordonnées dans $\overline{\mathbf{Q}}$.
2. On suppose $Fix(f)$ fini. Montrer que c'est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbf{Q}}}$.
3. On suppose $Fix(f)$ infini. Montrer que $Fix(f) \cap \mathbb{P}^m(\overline{\mathbf{Q}})$ est infini.
4. Conclure.

En déduire que l'ensemble des points ayant une orbite de cardinal au plus N est fini et contenu dans $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbf{Q}}}$, ceci pour n'importe quel $N \geq 1$. (Ce résultat avait seulement été esquissé dans le cours, avec une preuve différente)

Exercice 4. Résumer, en une page, ce que vous savez sur la notion de dimension pour une sous-variété algébrique irréductible de l'espace affine $\mathbb{A}^m_{\mathbf{C}}$. (Comment peut-on définir cette notion ? Comment peut-elle être comparée à la notion de dimension usuelle pour les variétés réelles lisses définies en géométrie différentielle ?)

Date: 2021.

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr