THÉORÈME DE MAHLER
MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Pour $k \geq 1$, nous noterons $B_k(x)$ le polynôme

$$B_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!},$$

coefficient binomial de degré k. Et nous poserons $B_0(x) = 1$.

Le but de cette feuille est de démontrer le théorème de Mahler: *si $f\colon \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$ est une fonction continue, alors*

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} A_k B_k(x)$$

où les A_k sont obtenus par l'algorithme des différences divisées de Newton: $A_0 = f(0), A_1 = f(1) - f(0), A_2 = f(2) - 2f(1) + f(0)$, etc.

A.– Dans un premier temps, on démontre le théorème suivant.

Theorem A.– *Soit $\mathbf{F}$ un corps fini ayant $q = p^n$ élément, avec $n \geq 1$. Soit V un $\mathbf{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit t un entier ≥ 1 et $f\colon \mathbf{Z} \to V$ une fonction qui est p^t-périodique, c'est-à-dire que $f(a+p^t) = f(a)$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$. Montrer que f s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p^t-1} B_i(x) v_i$$

pour des éléments v_0, v_1, …, v_{p^t-1} de V.

Dans cet énoncé, le coefficient binomial $B_i(x)$ est pris modulo p, donc comme élément du corps $\mathbf{F}_p \subset \mathbf{F}$.

A.1.– Montrer que, modulo p, $B_i(x)$ est une fonction p^t périodique lorsque $i \leq p^t - 1$. Pour cela, on pourra développer les polynômes $(1+u)^x$ et $(1+u)^{x+p}$ et utiliser $(a+b)^p = a^p + b^p \bmod(p)$.

Date: 2021.

A.2.– Montrer que les fonctions $B_i(x)$, pour $0 \leq i \leq p^t - 1$, forment une base de l'espace vectoriel des fonctions p^t-périodiques de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{F}$.

A.3.– Conclure, en dimension 1, puis en dimension quelconque.

B.– On démontre maintenant le théorème de Mahler. On va chercher à écrire $f = p^{r_1}F_1 + p^{r_1+r_2}F_2 + p^{r_1+r_2+r_3}F_3 + \dots$ où chaque F_i est une combinaison linéaire des $B_j(x)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ et où les r_i sont ≥ 1 pour $i \geq 2$.

B.1.– Posons $f_1 = f$. Notons r_1 l'entier tel que $\max_{x \in \mathbf{Z}_p} |f_1(x)| = p^{-r_1}$. On remplace f_1 par $p^{-r_1} f_1$ pour supposer que $\max_{x \in \mathbf{Z}_p} |f_1(x)| = 1$. Montrer qu'il existe un entier $t_1 \geq 1$ tel que la réduction $\overline{f}_1 \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p$, $x \mapsto f_1(x) \mod (p)$ est p^{t_1}-périodique. Soit

$$P_1 = \sum_{i=0}^{p^{t_1}-1} B_i(x)\, v_i$$

le polynôme associé à $\overline{f}_1$ par le théorème A. On note $a_i(1) \in \mathbf{Z}_p$ des éléments tels que $a_i(1) = v_i$ modulo p, puis on pose

$$F_1 = \sum_{i=0}^{p^{t_1}-1} B_i(x)\, a_i.$$

B.2.– On pose $f_2 = f_1 - F_1$. Montrer que $\max_{x \in \mathbf{Z}_p} |f_2(x)|$ est de la forme p^{-r_2} avec $r_2 \geq 1$. Appliquer le même procédé à f_2 (ce qui fournit F_2, puis f_3).

B.3.– Itérer ce processus et conclure.

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr