ENSEMBLE DE FATOU DES AUTOMORPHISMES DE SURFACES : HYPERBOLICITÉ ET DOMAINES DE ROTATION

par

Arnaud Moncet

Résumé. —

Abstract. —

Table des matières

Introduction

Remerciements. —

1. Courants associés à un automorphisme

Le théorème suivant est démontré dans [**Can01**] et [**DS05, DS10**] (voir aussi [**Mon12**] pour une preuve alternative) :

Théorème 1.1 **(Cantat, Dinh – Sibony).** — *Soit X une surface complexe compacte kählérienne, et soit $f : X \to X$ un automorphisme d'entropie positive. On note $\lambda = \exp(\mathsf{h}_{\mathsf{top}}(f)) > 1$ la plus grande valeur propre de f^* sur $H^{1,1}(X)$. Il existe alors des courants positifs fermés T_f^+ et T_f^-, uniques à des scalaires près, tels que*

$$f^* T_f^+ = \lambda\, T_f^+ \quad et \quad f^* T_f^- = \frac{1}{\lambda}\, T_f^- . \tag{1}$$

De plus, les potentiels (locaux) de $T_f^{\pm}$ sont continus, et même Hölder-continus.

Pour lever l'ambiguïté sur l'unicité de ces courants, on peut par exemple supposer qu'ils sont de masse 1 par rapport à une forme de Kähler fixée, ce que l'on fera dans la suite.

En complément, on montre que si f possède des courbes périodiques, alors les potentiels de T_f^+ et T_f^- sont constants le long de ces courbes, quitte à réduire les ouverts sur lesquels ils sont définis. Plus précisément :

Théorème 1.2. — *Soit f un automorphisme d'entropie positive d'une surface kählérienne compacte X. Il existe un recouvrement de X par des ouverts V^α tels que*

(1) $T^+_{f\ |V^\alpha} = \mathrm{dd^c}\, u^\alpha_+$ *et* $T^+_{f\ |V^\alpha} = \mathrm{dd^c}\, u^\alpha_-$ [1], *où u^α_+ et u^α_- sont des fonctions continues pluri-sous-harmoniques sur V^α ;*

(2) *les potentiels u^α_+ et u^α_- sont constants sur $\mathsf{CP}(f) \cap V^\alpha$, où $\mathsf{CP}(f)$ désigne l'union des courbes périodiques de f.*

Remarque 1.3. — Il existe un morphisme birationnel $\pi : X \to X_0$, où X_0 est une surface éventuellement singulière, qui contracte chaque courbe périodique connexe de f sur un point (cf. [**Can12**]). Les potentiels u^α_+ et u^α_- sont alors constants sur les fibres de π, et induisent donc des fonctions continues u^α_{0+} et u^α_{0-} sur $V^\alpha_0 := \pi(V^\alpha)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le théorème pour le courant T_f^+, puis de remplacer f par f^{-1} pour obtenir le résultat pour T_f^-.

D'après [**DJS07**], il existe un morphisme birationnel $\eta : X \to X_1$, avec X_1 lisse, tel que f (quitte à le remplacer par un itéré, ce qui ne change pas le courant T_f^+) induit un automorphisme $f_1 : X_1 \to X_1$, pour lequel chaque courbe périodique connexe est
- soit un arbre de courbes rationnelles lisses ;
- soit une courbe (réductible) de genre 1 qui est de l'un des types suivants :
  - une courbe elliptique lisse,
  - une courbe rationnelle avec une singularité nodale ou cuspidale,
  - une union de deux courbes rationnelles qui se coupent en deux points (confondus ou non),
  - trois courbes rationnelles qui s'intersectent en un unique point
  - ou un cycle de $n \geq 3$ courbes rationnelles lisses.

Il suffit alors de montrer le théorème sur la surface X_1, pour l'automorphisme f_1.

Puis quitte à faire un nombre fini d'éclatements f-équivariants (au plus trois), chaque courbe périodique connexe est
- une courbe elliptique lisse,
- un arbre de courbes rationnelles lisses
- ou un cycle d'au moins trois courbes rationnelles lisses,

et il suffit de montrer le théorème sur cette nouvelle surface.

Dans la suite, on suppose donc, ces modifications étant faites, que pour tout point $x \in X$ sur une courbe périodique, l'union E des courbes périodiques irréductibles contenant x est de la forme suivante :

1. Par convention, $\mathrm{d^c} = \frac{1}{2i\pi}(\partial - \overline{\partial})$, si bien que $\mathrm{dd^c} = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.

- E est une courbe elliptique lisse,
- E est une courbe rationnelle lisse
- ou E est l'union de deux courbes rationnelles qui se coupent transversalement en x (et uniquement en x).

Nous allons montrer qu'un tel point x possède un voisinage comme souhaité, en montrant que E possède un voisinage ouvert V sur lequel T_f^+ admet un potentiel, qui est continu et constant sur E. Il suffira ensuite de réduire la taille de ce voisinage de telle sorte qu'il n'intersecte pas les autres courbes périodiques.

Pour construire un tel voisinage V, on considère le morphisme birationnel $\pi_E : X \to X_E$ qui contracte E sur un point y (a priori X_E est singulière en y), et on prend pour V la préimage par π_E d'une petite boule autour de y. Lorsque cette boule est suffisamment petite, on a

$$H^1(V, \mathcal{O}) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E) \tag{2}$$

par [**KM98**, proposition 4.45]. Par ailleurs, cet espace $H^1(E, \mathcal{O}_E)$ est nul lorsque E est constitué d'une ou deux courbes rationnelles lisses, et isomorphe à $\mathbf{C}$ lorsque E est une courbe elliptique lisse (voir par exemple [**BHPVdV04**]).

Dans la suite, on note T le courant T_f^+ restreint à V. Ce courant est localement défini par des potentiels continus u^α sur un recouvrement $(V^\alpha)^\alpha$ de V :

$$T_{|V^\alpha} = \mathrm{dd^c}\, u^\alpha, \tag{3}$$

où le potentiel u^α est uniquement déterminé modulo l'addition d'une fonction pluri-harmonique. Notons $\mathcal{C}^0$ le faisceau des fonctions continues, et $\mathcal{PH}$ celui des fonctions pluri-harmoniques. Alors T peut être vu comme un élément de $H^0(V, \mathcal{C}^0/\mathcal{PH})$. La suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{PH} \longrightarrow \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^0/\mathcal{PH} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

fournit la suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(V,\mathcal{PH}) \arrow[r] & H^0(V,\mathcal{C}^0) \arrow[r] & H^0(V,\mathcal{C}^0/\mathcal{PH}) \arrow[dll, "c_1"] \\ & H^1(V,\mathcal{PH}) \arrow[r, dotted] & {} & \end{tikzcd} \tag{5}$$

où c_1 est le morphisme connectant. Le but est de montrer que

$$T \in H^0(V, \mathcal{C}^0/\mathcal{PH}) \tag{6}$$

provient d'un élément de $H^0(V, \mathcal{C}^0)$, ce qui équivaut à $c_1(T) = 0$.

Pour cela on considère la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{\mathfrak{Re}} \mathcal{PH} \longrightarrow 0\ , \tag{7}$$

où j désigne la multiplication par $2i\pi$. Le fait que cette suite soit exacte correspond au fait que toute fonction pluri-harmonique est localement partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à l'addition près d'une constante imaginaire pure. On obtient la suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(V,\mathbf{R}) \arrow[r, "j_0"] & H^0(V,\mathcal{O}) \arrow[r, "\mathfrak{Re}_0"] & H^0(V,\mathcal{PH}) \arrow[dll, "\delta_1"'] \\
 & H^1(V,\mathbf{R}) \arrow[r, "j_1"] & H^1(V,\mathcal{O}) \arrow[r, "\mathfrak{Re}_1"] & H^1(V,\mathcal{PH}) \arrow[dll, "\delta_2"'] \\
 & H^2(V,\mathbf{R}) \arrow[r, dotted] & {} &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Lemme 1.4. — *Le morphisme $\mathfrak{Re}_0$ est surjectif, quitte à réduire la taille de V.*

Démonstration. — On peut supposer que V est recouvert par des ouverts V^α tels que pour tous α et β :

- V^α est simplement connexe ;
- $E \cap V^\alpha$ est non vide et connexe ;
- Si $V^\alpha \cap V^\beta \neq \emptyset$, alors E rencontre cet ouvert.

Soit u une fonction pluri-harmonique sur V. Cette fonction est harmonique sur E, donc constante, et on peut supposer que cette constante est nulle. Comme V^α est simplement connexe, il existe une fonction $h^\alpha \in \mathcal{O}(V^\alpha)$ telle que $u_{|V^\alpha} = \mathfrak{Re}(h^\alpha)$. Sur $E \cap V^\alpha$, h^α est alors une fonction holomorphe de partie réelle nulle, donc une constante imaginaire pure, que l'on peut choisir nulle. Sur les intersections $V^\alpha \cap V^\beta$ qui sont non vides, la fonction $h^\alpha - h^\beta$ est une fonction pluri-harmonique, de partie réelle $u - u = 0$: c'est donc une constante imaginaire pure, qui est nulle car $h^\alpha = h^\beta = 0$ sur $E \cap V^\alpha \cap V^\beta \neq \emptyset$. On peut donc recoller les fonctions h^α en une fonction holomorphe h définie globalement sur V, et telle que $u = \mathfrak{Re}(h)$. $\square$

On en déduit que δ_1 est le morphisme nul, et que j_1 est injectif. Lorsque E est une courbe elliptique lisse, on a

- $H^1(V,\mathcal{O}) \simeq H^1(E,\mathcal{O}_E) \simeq \mathbf{C}$ par (2),
- $H^1(V,\mathbf{R}) \simeq H^1(E,\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^2$ car V est contractible sur E.

Comme j_1 est injectif, on en déduit qu'il est aussi surjectif, car il s'agit d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels de même dimension. Dans le cas où E est formé d'une ou deux courbes rationnelles, $H^1(V,\mathcal{O}) = 0$, si bien que j_1 est surjectif dans tous les cas.

Ceci montre que $\mathfrak{Re}_1$ est le morphisme nul, donc δ_2 est injectif. Pour montrer que $c_1(T) \in H^1(V,\mathcal{PH})$ est nul, il suffit donc de montrer $\delta_2 \circ c_1(T) = 0$.

Lemme 1.5. — *L'image $\delta_2 \circ c_1(T) \in H^2(V,\mathbf{R})$ correspond à la classe de cohomologie du courant T via l'isomorphisme de De Rham.*

Démonstration. — Commençons par voir comment est construit $\delta_2 \circ c_1(T)$. Le 0-cocycle $T \in H^0(V, \mathcal{C}^0/\mathcal{PH})$ est donné localement par des fonctions continues $u^\alpha \in \mathcal{C}^0(U^\alpha)$, avec $u^{\alpha\beta} := u^\beta - u^\alpha$ pluri-harmonique sur les intersections $U^{\alpha\beta} = U^\alpha \cap U^\beta$. Ces fonctions $u^{\alpha\beta}$ définissent un 1-cocycle qui correspond à $c_1(T) \in H^1(V,\mathcal{PH})$, modulo un cobord.

On peut supposer, quitte à raffiner le recouvrement, que les intersections $U^{\alpha\beta}$ sont simplement connexes, et que les tri-intersections $U^{\alpha\beta\gamma} := U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma$ sont connexes. Ainsi $u^{\alpha\beta} \in \mathcal{PH}(U^{\alpha\beta})$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe $h^{\alpha\beta}$ sur $U^{\alpha\beta}$. Sur les tri-intersections $U^{\alpha\beta\gamma}$, la fonction $h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\gamma} + h^{\alpha\beta}$ est holomorphe de partie réelle nulle, donc il existe une constante réelle $C^{\alpha\beta\gamma}$ telle que

$$h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\gamma} + h^{\alpha\beta} = 2i\pi\, C^{\alpha\beta\gamma}. \tag{9}$$

Par construction, $(C^{\alpha\beta\gamma})_{\alpha\beta\gamma}$ est le 2-cocycle qui correspond à $\delta_2 \circ c_1(T)$.

Voyons maintenant comment ce 2-cocycle est relié à la classe de cohomologie de De Rham du courant T. La première étape dans l'isomorphisme de De Rham est la correspondance

$$H^2_{\mathrm{DR}}(V) \simeq H^1(V, \mathcal{Z}^1), \tag{10}$$

où $\mathcal{Z}^1$ désigne le faisceau des 1-formes différentielles fermées. Comme T est donné localement par la 1-forme exate $\mathrm{dd^c}\, u^\alpha$, le 1-cocycle correspondant à $[T]$ dans $H^1(V, \mathcal{Z}^1)$ est donné par

$$\mathrm{d^c}\, u^\beta - \mathrm{d^c}\, u^\alpha = \mathrm{d^c}\, u^{\alpha\beta} \in \mathcal{Z}^1(U^{\alpha\beta}). \tag{11}$$

Or $u^{\alpha\beta} = \mathfrak{Re}(h^{\alpha\beta})$, donc

$$\mathrm{d^c}\, u^{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi}\,(\partial - \overline{\partial})\, u^{\alpha\beta} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{4i\pi}\left(\partial\, h^{\alpha\beta} - \overline{\partial}\,\overline{h}^{\alpha\beta}\right) \tag{13}$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{Im}(h^{\alpha\beta})\right). \tag{14}$$

Ainsi, le 2-cocycle correspondant dans l'isomorphisme de De Rham

$$H^1(V, \mathcal{Z}^1) \simeq H^2(V, \mathbf{R}) \tag{15}$$

est donné par

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{Im}(h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\gamma} + h^{\alpha\beta}) = C^{\alpha\beta\gamma}. \tag{16}$$

Le lemme est donc démontré. □

Pour terminer la démonstration du théorème 1.2, il s'agit maintenant de montrer que $[T] \in H^2(V, \mathbf{R})$ est nul. Notons $\phi_{[T]}$ la forme linéaire sur $H_2(V, \mathbf{R})$ qui correspond à $[T]$ par dualité. Par construction du voisinage V, $H_2(V, \mathbf{R})$ est engendré par les classes d'homologie $[E_i]$, où les E_i sont les composantes de la courbe E (il y en a une ou deux). Comme les E_i sont des courbes périodiques, on a $f^{*k}[E_i] = [E_i]$ et $f^{*k}[T] = \lambda^k[T]$ pour un certain $k \in \mathbf{N}^*$, ce qui implique

$$\phi_{[T]}([E_i]) = [T] \cdot [E_i] = 0, \tag{17}$$

car la forme d'intersection est préservée par f^{*k}. Ceci montre que la forme linéaire $\phi_{[T]}$ est nulle, et donc $[T] = 0$.

Récapitulons. On a montré que $\delta_2 \circ c_1(T) = 0$, ce qui implique par injectivité que $c_1(T) = 0$. Par exactitude de la suite (5), ceci implique que T est donné par un potentiel continu u globalement défini sur V. De plus, $\mathrm{dd^c}\, u_{|E_i}$ définit une $(1,1)$-forme positive sur E_i, qui est d'intégrale nulle car

$$\int_{E_i} \mathrm{dd^c}\, u = [T] \cdot [E_i] = 0. \tag{18}$$

On en déduit que $\mathrm{dd^c}\, u_{|E_i} = 0$, et $u_{|E_i}$ est une fonction harmonique, donc constante. Comme $E = \cup_i E_i$ est connexe, u est constante sur E. □

2. Hyperbolicité de l'ensemble de Fatou, modulo les courbes périodiques

Lorsque Y est un sous-espace analytique de X, on désigne par kob_Y la pseudo-distance de Kobayashi sur Y (voir [**Lan87**]). On dit que Y est hyperbolique (au sens de Kobayashi) lorsque kob_Y est un distance sur chaque composante connexe de Y.

Théorème 2.1. — *Soit f un automorphisme d'entropie positive d'une surface kählérienne compacte X. On note $\Omega(f) = X \setminus \mathsf{Supp}(T_f^+ + T_f^-)$, et $\mathsf{CP}(f)$ l'union des courbes périodiques de f. Alors :*

(1) *On a les inclusions $\Omega(f)\setminus\mathsf{CP}(f) \subset \mathsf{Fatou}(f) \subset \Omega(f)$.*

(2) *L'ensemble $\Omega(f)$ est hyperbolique modulo les courbes périodiques, i.e. pour tous x et y dans l'ensemble de Fatou :*

$$\mathsf{kob}_{\mathsf{Fatou}(f)}(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \text{ et } y \text{ sont reliés par une} \\ \text{courbe périodique connexe.} \end{cases}$$

En particulier, l'ensemble $\mathsf{Fatou}(f)\setminus\mathsf{CP}(f) = \Omega(f)\setminus\mathsf{CP}(f)$ est hyperbolique.

Démonstration. — On note $T = T_f^+ + T_f^-$, et $\lambda = \exp(\mathsf{h_{top}}(f))$ le rayon spectral de f^* sur $H^{1,1}(X)$.

Montrons dans un premier temps que

$$\mathsf{Fatou}(f) \subset \Omega(f). \tag{19}$$

Pour ceci, soit $x \in \mathsf{Fatou}(f)$, et soit $U \subset \mathsf{Fatou}(f)$ un voisinage ouvert relativement compact de x. On veut montrer que $T^{\pm}_{f\ |U} = 0$. Faisons-le pour T_f^+ (la preuve pour T^- est la même, en remplaçant f par f^{-1}). Comme la famille $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est normale sur $\mathsf{Fatou}(f)$, il existe une sous-suite $(f^{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément sur $\overline{U}$ vers une application h. Quitte à restreindre l'ouvert U et à réextraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un ouvert $V \supset h(U)$ tel que :

(1) $f^{n_k}(U) \subset V$ pour tout $k \in \mathbf{N}$;

(2) $T_f^+ = \mathrm{dd^c}\, u$ sur V, avec u continue (u localement bornée suffit).

Soit θ une $(1,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\langle T_f^+, \theta\rangle = \frac{1}{\lambda^{n_k}}\langle f^{*n_k}T_f^+, \theta\rangle \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n_k}}\langle T_f^+, f^{*-n_k}\theta\rangle \tag{21}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n_k}}\langle \mathrm{dd^c}\, u, f^{*-n_k}\theta\rangle \qquad \text{car } \mathsf{Supp}(f^{*-n_k}\theta) \subset f^{n_k}(U) \subset V \tag{22}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n_k}}\int_K (u\circ f^{n_k})\,\mathrm{dd^c}\,\theta. \tag{23}$$

Par convergence dominée, l'intégrale converge vers $\int_U (u\circ h)\,\mathrm{dd^c}\,\theta$, et on en déduit que $\langle T_f^+, \theta\rangle = 0$ car λ^{n_k} tend vers $+\infty$. Ceci achève la preuve de l'inclusion (19).

Nous allons maintenant montrer que l'ouvert $\Omega(f)$ est hyperbolique modulo les courbes périodiques. Pour ceci, considérons le morphisme $\pi : X \to X_0$ de contraction des courbes périodiques (cf. remarque 1.3), et posons $\Omega_0 = \pi(\Omega(f))$. Par décroissance de la pseudo-distance de Kobayashi, il suffit de montrer que Ω_0 est hyperbolique. Nous allons même montrer qu'il est hyperboliquement plongé dans X_0 (par rapport à une métrique hermitienne quelconque sur X_0).

Supposons le contraire. Cela signifie qu'il existe des disques holomorphes ψ_n : $\mathbb{D} \to \Omega_0$ tels que $\|\psi_n'(0)\| \to +\infty$. La reparamétrisation de Brody (cf. [**Lan87**, §III]) permet alors de construire une courbe de Brody $\varphi_0 : \mathbf{C} \to X_0$ (c'est-à-dire une courbe entière non constante de dérivée bornée) qui est une limite uniforme d'applications $\varphi_{0n} : \mathbb{D}_{R_n} \to \Omega_0$ (qui sont des reparamétrisations des ψ_n). Les applications φ_{0n} et φ_0 se relèvent en des applications holomorphes $\varphi_n : \mathbb{D}_{R_n} \to \Omega(f)$ et $\varphi : \mathbf{C} \to X$ telles que φ_n converge uniformément vers φ (mais φ n'est pas nécessairement une courbe de Brody).

Affirmation 2.2. — *La courbe entière φ vérifie $\varphi^*T = 0$.*

Démonstration de l'affirmation. — Soit U un ouvert sur lequel $T = \mathrm{dd^c}\, u$, avec u continue, et soit θ une fonction à support compact $K \subset \mathbf{C}$ dans $\varphi^{-1}(U)$. Pour n assez grand, φ_n est définie sur K et $\varphi_n(K) \subset U$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\langle \varphi^*T, \theta\rangle = \int_K (u\circ\varphi)\,\mathrm{dd^c}\,\theta = \lim_{n\to+\infty}\int_K (u\circ\varphi_n)\,\mathrm{dd^c}\,\theta. \tag{24}$$

Comme u est pluri-harmonique sur $U \cap \Omega(f)$ et φ_n est à valeurs dans $\Omega(f)$, alors $u\circ\varphi_n$ est harmonique sur K, et la dernière intégrale est donc nulle pour tout n. On en déduit que $\langle \varphi^*T, \theta\rangle = 0$, et comme $\mathbf{C}$ est recouvert par de tels ouverts $\varphi^{-1}(U)$, ceci montre que $\varphi^*T = 0$. □

Le lemme suivant, qui contient l'essentiel de la démonstration, sera démontré à la section 3 :

Lemme 2.3. — *Tout courant d'Ahlfors S associé à φ vérifie $T \wedge S = 0$.*

En termes de classes de cohomologie, ceci implique $[T] \cdot [S] = 0$. Or

$$[T]^2 = 2[T_f^+] \cdot [T_f^-] > 0, \tag{25}$$

et le théorème de l'indice de Hodge implique alors que $[S]^2 < 0$. Ainsi $[S]$ n'est pas une classe nef, donc d'après le théorème de Nevanlinna (voir par exemple [**Bru99**]), l'adhérence de l'image de φ est une courbe (irréductible) C, et S est à une constante près le courant d'intégration sur cette courbe. Comme $[C] \cdot [T_f^+] + [C] \cdot [T_f^-] = 0$ et que les deux membres de la somme sont positifs (en effet, les classes des courants T_f^+ et T_f^- sont nef), on a $[C] \cdot [T_f^\pm] = 0$. On en déduit facilement que C est une courbe périodique (voir par exemple [**Can12**, proposition 4.1]). L'application $\varphi_0 = \pi \circ \varphi$ est alors constante : une contradiction.

Il reste à montrer l'inclusion

$$\Omega(f) \backslash \mathsf{CP}(f) \subset \mathsf{Fatou}(f). \tag{26}$$

Notons $\Omega^* = \Omega(f) \backslash \mathsf{CP}(f)$, et $\Omega_0^* = \pi(\Omega^*)$. Nous venons de voir que Ω_0, et donc Ω_0^*, est hyperboliquement plongé. Montrons que ceci implique l'affirmation suivante :

Affirmation 2.4. — *$\Omega_0^* \subset \mathsf{Fatou}(f_0)$, où f_0 est l'automorphisme induit sur X_0.*

Démonstration de l'affirmation. — Pour ceci, supposons qu'il existe $x \in \Omega_0^* \backslash \mathsf{Fatou}(f_0)$. Comme x n'est pas dans l'ensemble de Fatou, la famille $(f_0^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ n'est pas équicontinue au voisinage de x, d'après le théorème d'Ascoli. Ceci donne l'existence d'un vecteur v tangent à x tel que

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}} \|\mathrm{d}f_0^n(x) \cdot v\| = +\infty. \tag{27}$$

Soit alors $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega_0^*$ une application holomorphe telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi'(0) = v$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\varphi_n = f_0^n \circ \varphi : \mathbb{D} \to \Omega_0^*. \tag{28}$$

On a alors $\varphi_n'(0) = \mathrm{d}f_0^n(x) \cdot v$, donc la suite $(\|\varphi_n'(0)\|)_{n\in\mathbf{Z}}$ n'est pas bornée, ce qui contredit le fait que Ω_0^* soit hyperboliquement plongé. □

En prenant maintenant l'image réciproque par π, on obtient $\Omega^* \subset \mathsf{Fatou}(f)$, car $\mathsf{Fatou}(f_0)$ et $\pi(\mathsf{Fatou}(f))$ coïncident en dehors des valeurs critiques de π. Ceci achève la démonstration du théorème 2.1, sous couvert du lemme 2.3 que l'on a pour l'instant laissé de côté. □

3. Courant d'Ahlfors n'intersectant pas $T_f^+ + T_f^-$

Cette section est dévouée à la démonstration du lemme 2.3, qui est en grande partie due à Dinh et Sibony (voir la première version de [**DS05**] sur `arXiv.org`).

Notations. — On fixe une métrique hermitienne sur X. Pour $r > 0$, on note $\mathbb{D}_r \subset \mathbf{C}$ le disque centré en 0 de rayon r, et on pose

$$\mathsf{a}_\varphi(r) = \int_{\mathbb{D}_r} \|\varphi'\|^2 \,\mathrm{dvol} \quad \text{et} \quad \ell_\varphi(r) = \int_{\partial\mathbb{D}_r} \|\varphi'\| \,\mathrm{d}\sigma_r, \tag{29}$$

où σ_r désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$, puis

$$\mathsf{ma}_\varphi(r) = \int_0^r \mathsf{a}_\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{et} \quad \mathsf{m}\ell_\varphi(r) = \int_0^r \ell_\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{30}$$

Par définition, un courant d'Ahlfors (associé à φ) est une limite fermée des courants positifs $S_{\varphi,r}$ définis par

$$\langle S_{\varphi,r}, \theta\rangle = \frac{1}{\mathsf{ma}_\varphi(r)} \int_0^r \left[\int_{\mathbb{D}_t} \varphi^*\theta\right] \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{31}$$

Le fait que $S = \lim_n S_{\varphi,r_n}$ soit un courant fermé équivaut à (voir par exemple [**Bru99**])

$$\frac{\mathsf{m}\ell_\varphi(r_n)}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{32}$$

et il existe toujours de telles suites (r_n).

3.1. Premier cas : la fonction a_φ est bornée. — On montre que l'image de φ est alors contenue dans une courbe rationnelle, ce qui était déjà connu dans le cas où X est une surface projective (voir [**Dem97**]), mais pas dans le cas général.

Proposition 3.1. — *Soit X une variété complexe munie d'une métrique hermitienne, et soit $\varphi : \mathbf{C} \to X$ une courbe entière telle que*

$$\lim_{r\to+\infty} \mathsf{a}_\varphi(r) < +\infty. \tag{33}$$

Alors φ se prolonge par continuité en une application holomorphe $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{C}} \to X$, où $\widehat{\mathbf{C}}$ désigne la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Démonstration. — L'inégalité d'Ahlfors $\ell_\varphi(r)^2 \leq 2\pi r\, \mathsf{a}'_\varphi(r)$ implique qu'il existe une suite $R_n \to +\infty$ telle que

$$\ell_\varphi(R_n) \to 0. \tag{34}$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tel que $\ell_\varphi(r) > \varepsilon$ pour $r > R$, donc

$$+\infty = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_R^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r} \leq \int_R^{+\infty} \mathsf{a}'_\varphi(r) \leq \lim_{r\to+\infty} \mathsf{a}_\varphi(r) < +\infty. \tag{35}$$

Pour $r > 0$, posons $E_r = \varphi(\mathbf{C}\backslash\mathbb{D}_r)$, où $\mathbb{D}_r$ désigne le disque de rayon r. Les ensembles E_r sont décroissants avec r, et on pose

$$\delta = \lim_{r\to+\infty} \mathsf{diam}(E_r). \tag{36}$$

Il suffit de montrer que $\delta = 0$. En effet : pour tout suite $z_n \to \infty$, la suite $\varphi(z_n)$ sera alors de Cauchy, donc convergente dans X, et toutes ces suites auront la même limite L, que l'on prend comme valeur de $\widehat{\varphi}$ en ∞.

Supposons donc que $\delta > 0$. Pour $r < r'$, on note $\mathcal{C}_{r,r'}$ la couronne

$$\mathcal{C}_{r,r'} = \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, r < |z| < r'\right\}. \tag{37}$$

À r fixé, on a

$$\mathsf{diam}\,\varphi(\mathcal{C}_{r,r'}) \underset{r'\to+\infty}{\longrightarrow} \mathsf{diam}\,\varphi(\mathbf{C}\backslash\mathbb{D}_r) \geq \delta, \tag{38}$$

donc pour r' assez grand, ce diamètre est supérieur à $2\delta/3$. Il existe donc (r_n) et (r'_n) deux suites extraites de (R_n) telles que :

(1) $r_n < r'_n < r_{n+1}$;

(2) $\ell_\varphi(r_n) \leq \frac{\delta}{6}$ et $\ell_\varphi(r'_n) \leq \frac{\delta}{6}$;

(3) $\mathsf{diam}(A_n) \geq \frac{2\delta}{3}$, où $A_n = \varphi(\mathcal{C}_{r_n,r'_n})$.

Affirmation 3.2. — *Il existe* $x_n \in A_n$ *tel que* $\mathsf{dist}(x_n, \partial A_n) \geq \frac{\delta}{12}$.

Démonstration de l'affirmation. — Dans le cas contraire, on aurait $A_n = B_n \cup B'_n$, avec

$$B_n = \left\{ x \in A_n \mid \mathsf{dist}(x, \varphi(\partial \mathbb{D}_{r_n})) < \frac{\delta}{12} \right\} \tag{39}$$

$$\text{et} \quad B'_n = \left\{ x \in A_n \mid \mathsf{dist}(x, \varphi(\partial \mathbb{D}_{r'_n})) < \frac{\delta}{12} \right\}. \tag{40}$$

Comme $\max\left\{\mathsf{diam}(\varphi(\partial\mathbb{D}_{r_n})), \mathsf{diam}(\varphi(\partial\mathbb{D}_{r'_n}))\right\} \leq \frac{\delta}{12}$ d'après la condition (2), cela impliquerait :

$$\max\left\{\mathsf{diam}(B_n), \mathsf{diam}(B'_n)\right\} \leq \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} + \frac{\delta}{12} = \frac{\delta}{4}. \tag{41}$$

Or par connexité de A_n, $B_n \cap B'_n \neq \emptyset$, et donc

$$\mathsf{diam}(A_n) \leq \mathsf{diam}(B_n) + \mathsf{diam}(B'_n) \leq \frac{\delta}{2}, \tag{42}$$

ce qui contredit la condition (3) et termine la preuve de l'affirmation. □

D'après le théorème de Lelong (voir par exemple [**GH94**]), l'affirmation 3.4 implique l'existence d'une constante $\eta > 0$, indépendante de n, telle que

$$\mathsf{aire}(A_n) \geq \eta \tag{43}$$

pour tout n. On en déduit :

$$\mathsf{aire}(\varphi(\mathbf{C})) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{aire}(A_n) = +\infty, \tag{44}$$

ce qui contredit l'hypothèse, et achève ainsi la preuve de la proposition 3.1. □

On pose alors $C = \widehat{\varphi}(\mathbf{C})$. Tout courant d'Ahlfors S associé à φ est alors (à une constante multiplicative près) le courant d'intégration sur C. Pour montrer que $T \wedge S = 0$, on prend θ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans un ouvert U sur lequel $T = \mathrm{dd^c}\, u$, avec u continue. Le fait que $\varphi^* T = 0$ se traduit par $\mathrm{dd^c}(u \circ \varphi) = 0$, et alors

$$\begin{aligned}
\langle T\wedge S,\theta\rangle &= \langle S, u\,\mathrm{dd^c}\,\theta\rangle && (45)\\
&= \frac{1}{\mathsf{aire}(C)}\int_{\mathbf{C}}(u\circ\varphi)\ \mathrm{dd^c}(\theta\circ\varphi) && (46)\\
&= \frac{1}{\mathsf{aire}(C)}\int_{\mathbf{C}}(\theta\circ\varphi)\ \mathrm{dd^c}(u\circ\varphi) && (47)\\
&= 0. && (48)
\end{aligned}$$

Comme X est recouvert par de tels ouverts U, on a bien $T\wedge S = 0$.

3.2. Deuxième cas : la fonction a_φ est non bornée.— On fixe un recouvrement de X par des ouverts V^α sur lesquels $T = \mathrm{dd^c}\,u^\alpha$ avec u^α pluri-sous-harmonique et continue. On peut en outre supposer, quitte à raffiner le recouvrement, que X est recouvert par des ouverts $U^\alpha \Subset V^\alpha$.

D'après le théorème 1.2, le potentiel u^α peut être supposé constant sur $\mathsf{CP}(f)\cap V^\alpha$, donc il provient d'une fonction continue u_0^α sur $V_0^\alpha := \pi(V^\alpha)$ telle que $u^\alpha = u_0^\alpha\circ\pi$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & V^\alpha \arrow[r, "u^\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbf{R} \\
\mathbf{C}\supset\varphi^{-1}(V^\alpha) \arrow[ur, bend left, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi_0"'] & V_0^\alpha \arrow[ur, bend right, "u_0^\alpha"'] &
\end{tikzcd} \quad (49)$$

Pour $r>0$, on introduit la notation suivante :

$$\mathbb{D}_r^\alpha = \mathbb{D}_r\cap\varphi^{-1}(\overline{U}^\alpha) = \left\{ z\in\mathbf{C} \,\middle|\, |z|<r \text{ et } \varphi(z)\in\overline{U}^\alpha \right\}. \quad (50)$$

Soit $S = \lim S_{\varphi,r_n}$ un courant d'Ahlfors associé à φ. Nous allons montrer que $T\wedge S = 0$, ce qu'il suffit de montrer en restriction à chaque ouvert U^α. Pour cela, soit θ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U^α. On a :

$$\langle T\wedge S,\theta\rangle = \langle S, u^\alpha\,\mathrm{dd^c}\,\theta\rangle = \lim_{n\to+\infty} I_n, \quad (51)$$

$$\text{où}\quad I_n := \langle S_{\varphi,n}, u^\alpha\,\mathrm{dd^c}\,\theta\rangle = \frac{1}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_t^\alpha}(u^\alpha\circ\varphi)\,\mathrm{dd^c}(\theta\circ\varphi). \quad (52)$$

Pour alléger les notations, on note $\tilde u = u^\alpha\circ\varphi = u_0^\alpha\circ\varphi_0$, et $\tilde\theta = \theta\circ\varphi$. Le fait que $\varphi^*T = 0$ se traduit par

$$\mathrm{dd^c}\,\tilde u = 0. \quad (53)$$

En particulier, la fonction $\tilde u$ est harmonique, donc $\mathcal{C}^\infty$. On a en outre l'égalité

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tilde\theta\,\mathrm{d^c}\tilde u) + \mathrm{d^c}(\tilde u\,\mathrm{d}\tilde\theta) &= \mathrm{d}\tilde\theta\wedge\mathrm{d^c}\tilde u + \tilde\theta\,\mathrm{dd^c}\tilde u + \mathrm{d^c}\tilde u\wedge\mathrm{d}\tilde\theta + \tilde u\mathrm{d^c}\mathrm{d}\tilde\theta && (54)\\
&= -\tilde u\,\mathrm{dd^c}\tilde\theta, && (55)
\end{aligned}$$

qui donne, en remplaçant dans (52) :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_t^\alpha}\tilde{u}\,\mathrm{dd^c}\tilde{\theta} &(56)\\
&= \frac{-1}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_t^\alpha}\Big(\mathrm{d}(\tilde{\theta}\,\mathrm{d^c}\tilde{u})+\mathrm{d^c}(\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta})\Big) &(57)\\
&= \underbrace{\frac{-1}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\partial\mathbb{D}_t^\alpha}\tilde{\theta}\,\mathrm{d^c}\tilde{u}}_{I_n^1}+\underbrace{\frac{-1}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_t^\alpha}\mathrm{d^c}(\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta})}_{I_n^2}. &(58)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de majorer les deux intégrales I_n^1 et I_n^2. Commençons par la deuxième. Si $\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta}$ s'écrit en coordonnées $v_1\,\mathrm{d}x+v_2\,\mathrm{d}y$, on a

$$\mathrm{d^c}(\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta}) = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y, \tag{59}$$

puis par le théorème de Stokes

$$\int_{\mathbb{D}_{r_n}^\alpha}\mathrm{d^c}(\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta}) = \frac{-1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}_{r_n}^\alpha}(v_1\,\mathrm{d}y - v_2\,\mathrm{d}x). \tag{60}$$

On obtient donc, en notant M le maximum de la fonction u^α sur $\overline{U}^\alpha$,

$$\begin{aligned}
|I_n^2| &\le \frac{1}{2\pi\,\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\partial\mathbb{D}_t^\alpha}\left\|\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{\theta}\right\|\,\mathrm{d}\sigma_t &(61)\\
&\le \frac{M}{2\pi\,\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\partial\mathbb{D}_t^\alpha}|||\mathrm{d}\theta(\varphi(z))|||\,\|\varphi'(z)\|\,\mathrm{d}\sigma_t &(62)\\
&= \frac{M\,|||\mathrm{d}\theta|||_\infty}{2\pi}\,\frac{\mathsf{m}\ell_\varphi(r_n)}{\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0. &(63)
\end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$\mathrm{d^c}\tilde{u} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\mathrm{d}y\right), \tag{64}$$

on a la majoration suivante pour I_n^1 :

$$\left|I_n^1\right| \le \frac{|||\theta|||_\infty}{2\pi\,\mathsf{ma}_\varphi(r_n)}\int_0^{r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\partial\mathbb{D}_t^\alpha}\|\nabla\tilde{u}\|\,\mathrm{d}\sigma_t. \tag{65}$$

Lemme 3.3. — *Il existe $C>0$ telle que pour tout $r\ge 1$, on ait*

$$\int_{\mathbb{D}_r^\alpha}\|\nabla\tilde{u}\|\,\mathrm{dvol}\le C\,r\,\mathsf{a}_{\varphi_0}(2r)^{1/2}. \tag{66}$$

Démonstration du lemme. — On note $\Omega=\varphi^{-1}(V^\alpha)$ le domaine de définition de $\tilde{u}$. Comme $\tilde{u}$ est harmonique sur Ω, l'inégalité de Harnack (voir par exemple [**GM05**, p. 28]) implique l'existence de $K>0$ tel que

$$\forall z\in\varphi^{-1}(\overline{U}^\alpha),\quad \|\nabla\tilde{u}(z)\|\le\frac{K}{\mathsf{dist}(z,\partial\Omega)}. \tag{67}$$

Il suffit donc de majorer l'intégrale

$$I(r) = \int_{\mathbb{D}_r^\alpha} \frac{\mathrm{dvol}(z)}{\mathsf{dist}(z, \partial\Omega)}. \tag{68}$$

Pour $\delta > 0$, posons

$$\mathbb{D}_r^\alpha(\delta) = \{z \in \mathbb{D}_r^\alpha \mid \mathsf{dist}(z, \partial\Omega) < \delta\}. \tag{69}$$

D'après le théorème de Fubini, on a, pour tout $\Delta > 0$,

$$\int_0^\Delta \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)) \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2} = \int_{\mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \mathrm{dvol}(z) \int_{\mathsf{dist}(z,\partial\Omega)}^\Delta \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2} \tag{70}$$

$$= \int_{\mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \left(\frac{1}{\mathsf{dist}(z, \partial\Omega)} - \frac{1}{\Delta} \right) \mathrm{dvol}(z). \tag{71}$$

On en déduit que

$$I(r) = \int_{\mathbb{D}_r^\alpha \setminus \mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \frac{\mathrm{dvol}(z)}{\mathsf{dist}(z, \partial\Omega)} + \int_{\mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \frac{\mathrm{dvol}(z)}{\mathsf{dist}(z, \partial\Omega)} \tag{72}$$

$$\leq \int_{\mathbb{D}_r^\alpha \setminus \mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \frac{\mathrm{dvol}}{\Delta} + \int_{\mathbb{D}_r^\alpha(\Delta)} \frac{\mathrm{dvol}}{\Delta} + \int_0^\Delta \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)) \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha) + \int_0^\Delta \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)) \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2} \tag{74}$$

$$\leq \frac{\pi r^2}{\Delta} + \int_0^\Delta \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)) \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2}. \tag{75}$$

Affirmation 3.4. — *Il existe $M > 0$ tel que*

$$\frac{\mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta))}{\delta^2} \leq M\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r) \qquad \forall \delta > 0,\ \forall r \geq 1. \tag{76}$$

Démonstration de l'affirmation. — Pour tout $r \geq 1$ et $\delta \geq r/4$, on a

$$\frac{\mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta))}{\delta^2} \leq \frac{\pi r^2}{\delta^2} \leq 16\pi \leq \frac{16\pi}{\mathsf{a}_{\varphi_0}(2)} \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r). \tag{77}$$

Dans la suite, on suppose donc $0 < \delta < r/4$. Pour tout $r \geq 1$, on peut trouver un recouvrement de $\mathbb{D}_r$ par un nombre fini de disques $\mathbb{D}(z_i, \delta)$ tel que tout point soit dans au plus 36 disques $\mathbb{D}(z_i, 3\delta)$. Comme chaque z_i est dans $\mathbb{D}_{r+\delta} \subset \mathbb{D}_{5\delta/4}$, on a donc

$$\mathbb{D}(z_i, 3\delta) \subset \mathbb{D}_{2r}. \tag{78}$$

On applique alors un théorème de comparaison aire-diamètre (voir [**BD01**, appendice]) :

***Théorème 3.5* (Briend – Duval)**. — *Soit X un espace analytique complexe, muni d'une métrique riemannienne. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in]0, 1[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout disque holomorphe $\psi : \mathbb{D} \to X$, on ait :*

$$\mathsf{aire}(\psi(\mathbb{D})) < \eta \implies \mathsf{diam}(\psi(\mathbb{D}_a)) < \varepsilon. \tag{79}$$

En prenant ici $a = 2/3$ et $\varepsilon = \mathsf{dist}(\overline{U}_0^\alpha, \partial V_0^\alpha)$, où $U_0^\alpha = \pi(U^\alpha)$ et $V_0^\alpha = \pi(V^\alpha)$, on obtient :

$$\mathsf{aire}(\varphi_0(\mathbb{D}(z_i, 3\delta))) < \eta \implies \mathsf{diam}(\varphi_0(\mathbb{D}(z_i, 2\delta))) < \mathsf{dist}(\overline{U}_0^\alpha, \partial V_0^\alpha). \tag{80}$$

On pose $\{z_i\} = \{a_i\} \cup \{b_i\}$, avec

$$\mathsf{aire}(\varphi_0(\mathbb{D}(a_i, 3\delta))) \geq \eta \quad \text{et} \quad \mathsf{aire}(\varphi_0(\mathbb{D}(b_i, 3\delta))) < \eta. \tag{81}$$

Montrons que les disques $\mathbb{D}(b_i, \delta)$ n'intersectent pas $\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)$. En effet, soit $z \in \mathbb{D}_r^\alpha \cap \mathbb{D}(b_i, \delta)$. Comme $\varphi_0(z) \in \overline{U}_0^\alpha \cap \varphi_0(\mathbb{D}(b_i, 2\delta))$ et $\mathsf{diam}(\varphi_0(\mathbb{D}(b_i, 2\delta))) < \mathsf{dist}(\overline{U}_0^\alpha, \partial V_0^\alpha)$, on a alors $\varphi_0(\mathbb{D}(b_i, 2\delta)) \cap \partial V_0^\alpha = \emptyset$, et donc $\partial\mathbb{D}(b_i, 2\delta) \cap \partial\Omega = \emptyset$. On en déduit que

$$\mathsf{dist}(z, \partial\Omega) > \mathsf{dist}(z, \partial\mathbb{D}(b_i, 2\delta)) > \delta, \tag{82}$$

et donc $z \notin \mathbb{D}_r^\alpha(\delta)$.

Par conséquent, $\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)$ est recouvert par les disques $\mathbb{D}(a_i, \delta)$. Soit N le cardinal des a_i. Comme $\mathbb{D}(a_i, 3\delta) \subset \mathbb{D}_{2r}$ et que chaque point de $\mathbb{D}_{2r}$ est dans au plus 36 de ces disques, on a

$$N\eta \leq \sum_i \mathsf{aire}(\varphi_0(\mathbb{D}(a_i, 3\delta))) \leq 36\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r). \tag{83}$$

On en déduit que

$$\mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta)) \leq \sum_i \mathsf{aire}(\mathbb{D}(a_i, \delta)) = N\pi\delta^2 \leq \frac{36\pi}{\eta}\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r)\, \delta^2. \tag{84}$$

L'affirmation est ainsi démontrée, en prenant $M = \max(16\pi/\mathsf{a}_{\varphi_0}(2), 36\pi/\eta)$. □

Revenons à la preuve du lemme 3.3. On déduit de l'affirmation la majoration suivante :

$$\int_0^\Delta \mathsf{aire}(\mathbb{D}_r^\alpha(\delta))\, \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^2} \leq M\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r)\, \Delta. \tag{85}$$

En reportant dans (75), on obtient

$$I(r) \leq \frac{\pi r^2}{\Delta} + M\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r)\, \Delta, \tag{86}$$

qui est valable pour tout $\Delta > 0$. En prenant $\Delta = r/(\mathsf{a}_{\varphi_0}(2r))^{1/2}$, cette inégalité donne

$$I(r) \leq (\pi + M)\, r\, \mathsf{a}_{\varphi_0}(2r). \tag{87}$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.3. □

Reprenons le cours de la démonstration du théorème 2.3. On voulait montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n^1 = 0$, avec

$$\left|I_n^1\right| \leq \frac{|||\theta|||_\infty}{2\pi\, \mathsf{ma}_\varphi(r_n)} \int_0^{r_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{\partial\mathbb{D}_t^\alpha} \|\nabla\tilde{u}\|\, \mathrm{d}\sigma_t. \tag{88}$$

Posons $K_n = \mathbb{E}(\log_2(r_n))$. Grâce au lemme 3.3, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\int_1^{r_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{\partial \mathbb{D}_t^\alpha} \|\nabla \tilde{u}\| \, \mathrm{d}\sigma_t &\leq \sum_{k=0}^{K_n} \int_{r_n/2^{k+1}}^{r_n/2^k} \frac{\mathrm{d}t}{r_n/2^{k+1}} \int_{\partial \mathbb{D}_t^\alpha} \|\nabla \tilde{u}\| \, \mathrm{d}\sigma_t && (89)\\
&\leq 2 \sum_{k=0}^{K_n} \frac{1}{r_n/2^k} \int_{\mathbb{D}^\alpha_{r_n/2^k}} \|\nabla \tilde{u}\| \, \mathrm{dvol} && (90)\\
&\leq 2C \sum_{k=0}^{K_n} \mathsf{a}_{\varphi_0}(r_n/2^{k-1})^{1/2} && (91)\\
&\leq 2C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{r_n} \int_{r_n/2^{k-1}}^{r_n/2^{k-2}} \mathsf{a}_{\varphi_0}(t)^{1/2} \, \mathrm{d}t && (92)\\
&\leq 4C \int_0^{4r_n} \frac{\mathsf{a}_{\varphi_0}(t)^{1/2}}{t} \, \mathrm{d}t && (93)\\
&= 4C \mathsf{mra}_{\varphi_0}(4r_n), && (94)
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\mathsf{mra}_{\varphi_0} : \mathbf{R}^+ &\to \mathbf{R}^+ \\
r &\to \int_0^r \frac{\mathsf{a}_{\varphi_0}(t)^{1/2}}{t} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{95}$$

Comme φ_0 est une courbe de Brody, sa vitesse est majorée, disons par $V > 0$, et on a alors $\mathsf{a}_{\varphi_0}(r) \leq V^2 \pi r^2$ pour tout $r > 0$. On en déduit que $\mathsf{mra}_{\varphi_0}(r) \leq V \pi^{1/2} r$, et donc

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\mathsf{mra}_{\varphi_0}(4r)}{\mathsf{mra}_{\varphi_0}(r)} \leq 4. \tag{96}$$

Quitte à extraire une suite de $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (ce qui ne change pas le courant d'Ahlfors S), on peut donc supposer que

$$\mathsf{mra}_{\varphi_0}(4r_n) \leq 5 \, \mathsf{mra}_{\varphi_0}(r_n). \tag{97}$$

On en déduit que

$$\int_1^{r_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{\partial \mathbb{D}_t^\alpha} \|\nabla \tilde{u}\| \, \mathrm{d}\sigma_t \leq 20C \, \mathsf{mra}_{\varphi_0}(r_n). \tag{98}$$

Il existe donc une constante $C' > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\int_0^{r_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{\partial \mathbb{D}_t^\alpha} \|\nabla \tilde{u}\| \, \mathrm{d}\sigma_t &\leq C' \, \mathsf{mra}_{\varphi_0}(r_n) && (99)\\
&\leq C' \, \mathsf{mra}_{\varphi}(r_n), && (100)
\end{aligned}$$

en choisissant une métrique hermitienne sur X_0 telle que $\|v\|_X \leq \|\pi^* v\|_{X_0}$ (on peut toujours s'y ramener). D'après (88), on obtient donc :

$$|I_n^1| \leq \frac{C' \, \|\|\theta\|\|_\infty}{2\pi} \frac{\int_0^{r_n} t^{-1} \mathsf{a}_\varphi(t)^{1/2} \, \mathrm{d}t}{\int_0^{r_n} t^{-1} \mathsf{a}_\varphi(t) \, \mathrm{d}t}. \tag{101}$$

Comme
$$\frac{t^{-1}\mathsf{a}_\varphi(t)^{1/2}}{t^{-1}\mathsf{a}_\varphi(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^r t^{-1}\mathsf{a}_\varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{102}$$
le quotient des deux intégrales dans (101) converge vers 0. On en déduit que
$$\langle T\wedge S,\theta\rangle = \lim_{n\to+\infty}(I_n^1+I_n^2) = 0. \tag{103}$$
Ceci montre que $T\wedge S = 0$ et achève ainsi la preuve du théorème 2.3. □

4. Composantes de Fatou récurrentes et domaines de rotation

Soient X une surface kählérienne compacte, et f un automorphisme de X d'entropie positive. On considère une composante de Fatou Ω qui est fixe par f.

Définition 4.1. — On dit que Ω est un *domaine de rotation* (2) lorsqu'il existe une suite $m_k \to \pm\infty$ telle que
$$f^{m_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{id}_\Omega \tag{104}$$
uniformément sur les compacts de Ω.

Un théorème de type Cartan permet de montrer la caractérisation suivante (voir [**BK09b**]) :

Proposition 4.2. — *Soit $\Omega \subset \mathsf{Fatou}(f)$ un ouvert connexe fixe par f. On note $\mathcal{G}(\Omega)$ l'adhérence du sous-groupe engendré par f dans $\mathsf{Aut}(\Omega)$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) *Ω est un domaine de rotation pour f ;*

(2) *le groupe $\mathcal{G}(\Omega)$ est compact.*

Si ces conditions sont vérifiées, $\mathcal{G}(\Omega)$ est alors un groupe de Lie abélien compact, dont la composante connexe de l'identité $\mathcal{G}(\Omega)^0$ est un tore réel $\mathbb{T}^d$, avec $d = 1$ ou 2. L'entier d est appelé rang *du domaine de rotation.*

On pourra se référer à [**McM02, Ogu10, BK09a, McM07**] pour des exemples.

Remarque 4.3. — En dimension 1, les domaines de rotation sont les disques de Siegel et les anneaux de Herman, et le groupe $\mathcal{G}(\Omega)^0$ est un cercle (cf. [**Mil06**]).

Lorsque X est une surface (minimale) de dimension de Kodaira nulle, X possède une forme volume canonique qui est préservée par f, ainsi que par les limites normales de $f^{n_k}_{|\Omega}$, qui sont donc des automorphismes de Ω. Toute composante de Fatou est donc un domaine de rotation, d'après la caractérisation 4.2 (voir aussi [**BK09b**, prop. 1.1]).

En revanche, sur les surfaces rationnelles, il existe des exemples où l'ensemble de Fatou est un bassin d'attraction pour f (voir [**McM07**]) ; mais dans ce cas $\mathsf{Fatou}(f)$ n'est pas récurrent, au sens de la définition suivante.

---

2. Certains auteurs disent plutôt *domaine de Siegel*, comme par exemple dans [**FS94**].

Définition 4.4. — On dit qu'un ouvert $\Omega \subset X$ est *récurrent* s'il existe des points $x_0, y_0 \in \Omega$ et une suite $n_k \to \pm\infty$ tels que

$$f^{n_k}(x_0) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_0. \tag{105}$$

Bien évidemment, les domaines de rotations sont des composantes de Fatou récurrentes. On peut montrer la réciproque grâce à l'hyperbolicité, comme dans [**Ued94**].

Théorème 4.5. — *Soit f un automorphisme loxodromique d'une surface compacte kählérienne X, et soit Ω une composante de Fatou récurrente, telle que $f(\Omega) = \Omega$. Alors Ω est un domaine de rotation.*

Remarque 4.6. — Sans l'hypothèse $f(\Omega) = \Omega$, la composante de Fatou Ω est quand même périodique grâce à l'hypothèse de récurrence, et elle est donc un domaine de rotation pour un itéré de f.

Démonstration. — On note $\Omega^* = \Omega \backslash \mathsf{CP(f)}$, où $\mathsf{CP}(f)$ désigne l'union des courbes périodiques de f. L'ensemble Ω^* est alors un autre ouvert fixé par f, qui est dense dans Ω. Montrons qu'il est récurrent également. Pour cela, soit $x_0 \in \Omega$ vérifiant la condition (105). Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que f^{n_k} converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $h : \Omega \to \overline{\Omega}$, qui est continue. L'ouvert $h^{-1}(\Omega)$ est non vide (il contient x_0), donc il intersecte Ω^* en un point x. Montrons que $y = h(x) \in \Omega^*$. Dans le cas contraire, y est dans $\mathsf{CP}(f)$, qui est un fermé invariant. Quitte à réextraire une sous-suite, f^{-n_k} converge uniformément sur les compacts de Ω, et $f^{-n_k}(y) \to z \in \mathsf{CP(f)}$. Or comme $y \in \Omega$, on a

$$\lim f^{-n_k} \circ f^{n_k}(x) = \lim f^{-n_k}(y) = z, \tag{106}$$

d'où $x = z \in \mathsf{CP}(f)$, ce qui est une contradiction. On a donc

$$f^{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \Omega^* \tag{107}$$

avec x et y dans Ω^*, ce qui montre que Ω^* est récurrent.

De plus, Ω^* est hyperbolique, d'après le théorème 2.1. On montre alors, en suivant [**Ued94**, Theorem 3.1], que Ω est un domaine de rotation. Pour cela, on pose

$$V = \{x' \in \Omega^* \mid \mathsf{kob}_{\Omega^*}(x, x') < \varepsilon\}, \tag{108}$$

$$W = \{y' \in \Omega^* \mid \mathsf{kob}_{\Omega^*}(y, y') < \varepsilon/2\}, \tag{109}$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi de telle sorte que V et W soient relativement compacts dans Ω^*, et tel que $V \subset h^{-1}(\Omega^*)$. Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que $f^{n_k}(x) \in W$ pour tout k. On a alors $W \subset f^{n_k}(V)$. En effet, pour tout $y' \in W$, on a, en utilisant que f est une isométrie pour kob_{Ω^*},

$$\mathsf{kob}_{\Omega^*}(x, f^{-n_k}(y')) = \mathsf{kob}_{\Omega^*}(f^{n_k}(x), y') \tag{110}$$

$$\leq \mathsf{kob}_{\Omega^*}(f^{n_k}(x), y) + \mathsf{kob}_{\Omega^*}(y, y') \tag{111}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \tag{112}$$

Quitte à réextraire, on suppose que $m_k := n_{k+1} - n_k \to \pm\infty$ et que $f^{m_k} \to g$ uniformément sur les compacts de Ω. On a alors, à k fixé,

$$\sup_{y' \in W} \mathsf{kob}_{\Omega^*}(f^{m_k}(y'), y') \leq \sup_{x' \in V} \mathsf{kob}_{\Omega^*}(f^{m_k} \circ f^{n_k}(x'), f^{n_k}(x')) \tag{113}$$

$$= \sup_{x' \in V} \mathsf{kob}_{\Omega^*}(f^{n_{k+1}}(x'), f^{n_k}(x')). \tag{114}$$

Comme la suite f^{n_k} converge uniformément sur V vers $h : V \to \Omega^*$, cette dernière expression converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$. On en déduit que $f^{m_k} \to \mathrm{id}_W$ uniformément sur W, et par prolongement analytique $g = \mathrm{id}_\Omega$. Ceci montre que Ω est un domaine de rotation. □

Références

[BD01] J.-Y. Briend & J. Duval – ≪ Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathrm{P}^k(\mathbf{C})$ ≫, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2001), no. 93, p. 145–159.

[BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters & A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BK09a] E. Bedford & K. Kim – ≪ Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences ≫, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), no. 3, p. 553–583.

[BK09b] ______, ≪ Dynamics of rational surface automorphisms: rotation domains ≫, à paraître dans *Amer. J. Math.*, 2009.

[Bru99] M. Brunella – ≪ Courbes entières et feuilletages holomorphes ≫, *Enseign. Math. (2)* **45** (1999), no. 1-2, p. 195–216.

[Can01] S. Cantat – ≪ Dynamique des automorphismes des surfaces K3 ≫, *Acta Math.* **187** (2001), no. 1, p. 1–57.

[Can12] ______, ≪ Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces (a survey) ≫, à paraître dans *Frontiers in Complex Dynamics: a volume in honor of John Milnor's 80th birthday*, 2012.

[Dem97] J.-P. Demailly – ≪ Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques ≫, *Gaz. Math.* (1997), no. 73, p. 3–23.

[DJS07] J. Diller, D. Jackson & A. Sommese – ≪ Invariant curves for birational surface maps ≫, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 6, p. 2793–2991.

[DS05] T.-C. Dinh & N. Sibony – ≪ Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds ≫, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 2, p. 291–312, voir aussi la version préliminaire `http://arxiv.org/abs/math/0311322v1`.

[DS10] ______, ≪ Super-potentials for currents on compact Kähler manifolds and dynamics of automorphisms ≫, *J. Algebraic Geom.* **19** (2010), no. 3, p. 473–529.

[FS94] J. E. Fornæss & N. Sibony – ≪ Complex dynamics in higher dimension. I ≫, Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992), Astérisque, no. 222, Société Mathématique de France, 1994, p. 201–231.

[GH94] P. Griffiths & J. Harris – *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.

[GM05] J. B. Garnett & D. E. Marshall – *Harmonic measure*, New Mathematical Monographs, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[KM98] J. Kollár & S. Mori – *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, with the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, translated from the 1998 Japanese original.

[Lan87] S. Lang – *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[McM02] C. T. McMullen – ≪ Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks ≫, *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002), p. 201–233.

[McM07] ______, ≪ Dynamics on blowups of the projective plane ≫, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **105** (2007), p. 49–89.

[Mil06] J. Milnor – *Dynamics in one complex variable*, third ed., Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[Mon12] A. Moncet – ≪ Géométrie et dynamique sur les surfaces algébriques réelles ≫, Ph.D. Thesis, Université de Rennes 1, 2012.

[Ogu10] K. Oguiso – ≪ The third smallest Salem number in automorphisms of $K3$ surfaces ≫, Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008, Adv. Stud. Pure Math., vol. 60, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, p. 331–360.

[Ued94] T. Ueda – ≪ Fatou sets in complex dynamics on projective spaces ≫, *J. Math. Soc. Japan* **46** (1994), no. 3, p. 545–555.

---

8 juin 2012

Arnaud Moncet, Université de Rennes 1, IRMAR, campus de Beaulieu, bâtiment 22–23, 263 avenue du général Leclerc, CS 74205, 35042 Rennes cedex • *E-mail :* `moncet.arnaud@gmail.com`