

Un exemple de groupe d'automorphismes d'une
surface $K3$ réelle

Arnaud Moncet

Mémoire de M2

directeur de stage : Serge Cantat

Université de Rennes 1

Avril - Juin 2008

Table des matières

Introduction	2
1 Généralités sur les surfaces de degré $(2, 2, 2)$	5
1.1 Homologie et diviseurs sur $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^r$	5
1.2 Degré d'une hypersurface	6
1.3 Surfaces de degré $(2, 2, 2)$ et surfaces $K3$	7
1.4 Groupe des automorphismes d'une surface de degré $(2, 2, 2)$	8
2 Surfaces de Kummer	11
2.1 Surfaces de Kummer	11
2.2 Surfaces de Kummer données par le produit de deux courbes elliptiques	11
2.3 Surfaces de Kummer données par le produit de deux courbes elliptiques réelles	14
2.3.1 Cas de 1 ovale	15
2.3.2 Cas de 2 ovales	16
2.4 Mapping Class Group de la partie réelle	17
3 Déformation d'une surface de Kummer réelle	21
3.1 Topologie des surfaces déformées	21
3.2 Déformation de genre 3	24
3.3 Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer	24
3.4 Démonstration du théorème 5	25
3.5 Algorithme de Dehn et démonstration du lemme 3	26
3.6 Fin de la démonstration du théorème 5	28

Introduction

Lorsque l'on se donne une surface projective lisse X définie sur \mathbb{R} (on supposera implicitement que $X(\mathbb{R})$ est non vide), on a plusieurs groupes attachés à X :

1. Le groupe des automorphismes algébriques de $X(\mathbb{C})$ dans $X(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire définis par des formules polynomiales), qui coïncide avec le groupe des applications biholomorphes. Ce groupe est appelé *groupe d'automorphismes* de X , il sera noté $Aut(X)$.
2. Le sous-groupe de $Aut(X)$ qui stabilise la partie réelle $X(\mathbb{R})$. Il contient exactement les automorphismes algébriques qui peuvent être définis par des formules polynomiales à coefficients réels. On le notera $Aut_{\mathbb{R}}(X)$, et on parlera du *groupe d'automorphismes réels*.
3. $X(\mathbb{R})$ étant une variété réelle de dimension 2, on peut aussi regarder le groupe des difféomorphismes de $X(\mathbb{R})$ dans $X(\mathbb{R})$, que l'on notera $Diff(X(\mathbb{R}))$.
4. On peut aussi regarder le groupe des difféomorphismes de $X(\mathbb{R})$ dans $X(\mathbb{R})$ à isotopie près. Ce groupe est appelé *mapping class group*, et il est noté $MCG(X(\mathbb{R}))$. Lorsque $X(\mathbb{R})$ est orientée, on sera parfois amené à considérer son sous-groupe d'indice 2 constitué des classes d'isotopie des difféomorphismes qui préservent l'orientation. Ce sous-groupe sera noté $MCG^+(X(\mathbb{R}))$.

Notons que l'on a une inclusion de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ dans $Diff(X(\mathbb{R}))$. On peut se demander comment se comporte cette inclusion : est-ce que $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ est dense dans $Diff(X(\mathbb{R}))$? est-ce qu'il est discret ? etc. Les réponses seront de nature différente selon le type de surface que l'on considère :

1. Lorsque la dimension de Kodaira est 2, $Aut(X)$ est fini.
2. Lorsque la dimension de Kodaira est 1, $Aut(X)$ est virtuellement abélien (c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe abélien d'indice fini).

3. Lorsque la dimension de Kodaira est 0, X est un tore, une surface $K3$, ou un quotient de telles surfaces. Dans le cas où X est un tore, le problème est assez facile (voir plus bas). Le cas des surfaces $K3$ est celui qui va être étudié.
4. Lorsque la dimension de Kodaira est $-\infty$, alors le problème est plus difficile, du fait que l'on connaît peu d'exemples, et encore moins d'exemples où la surface X est réelle.

On va donc s'intéresser au cas des surfaces $K3$ réelles. Commençons par définir ce qu'on va appeler une surface $K3$:

Définition 1 : Une *surface $K3$* est une surface projective complexe X telle que

1. Le premier nombre de Betti $b_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} H^1(X, \mathbb{Q})$ est nul ;
2. Le fibré canonique de X (c'est-à-dire le fibré en droites dont les sections sont les 2-formes holomorphes) est trivial, ou, de manière équivalente, il existe une 2-forme holomorphe qui ne s'annule pas.

Un fait général sur les surfaces $K3$ est qu'elles sont simplement connexes (ce qui est non trivial) et que ce sont des variétés kählériennes. On sait aussi que pour une surface $K3$ générique, le groupe d'automorphismes est trivial. Cependant, pour des surfaces $K3$ particulières comme celles que l'on va regarder (les surfaces de degré $(2, 2, 2)$ dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$), le groupe d'automorphismes est *gros*, c'est-à-dire qu'il contient un groupe libre à deux générateurs (en particulier, il n'est pas virtuellement abélien). C'est justement lorsque le groupe d'automorphismes réels est gros que la comparaison entre $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ et $Diff(X(\mathbb{R}))$ devient intéressante.

Le type de questions que l'on peut se poser est, par exemple, de savoir s'il existe des exemples tels que l'image de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ dans $Diff(X(\mathbb{R}))$ soit discrète. Le mieux que l'on puisse demander est que $Diff(X(\mathbb{R}))$ ait au plus un élément de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ dans chaque composante connexe, ce qui revient à dire que la classe d'isotopie de $f \in Aut_{\mathbb{R}}(X)$ détermine de manière unique cet automorphisme. Une autre manière de le dire est que la flèche naturelle de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ dans $MCG(X(\mathbb{R}))$ (qui à un automorphisme réel associe sa classe d'isotopie en tant que difféomorphisme de $X(\mathbb{R})$) est injective. On va construire explicitement un tel exemple. Plus précisément, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 1 : *Il existe une surface K3 réelle X dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$, telle que la partie réelle $X(\mathbb{R})$ soit homéomorphe à une surface connexe orientable de genre 3, et telle que le groupe $Aut_{\mathbb{R}}(X)$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et s'injecte dans $MCG(X(\mathbb{R}))$.*

Autrement dit, un sous-groupe du mapping class group de $X(\mathbb{R})$ est réalisé par le groupe d'automorphismes réels de la surface. Cette formulation du problème fait apparaître un autre type de questions : étant donné une surface topologique S et un sous-groupe G de $MCG(S)$, quand existe-t-il une surface algébrique réelle X telle que $X(\mathbb{R})$ soit difféomorphe à S et le groupe G soit réalisé par un sous-groupe de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$?

1. Le cas traité dans ce texte sera celui d'une surface connexe orientable de genre 3.
2. Lorsque S est un tore topologique, la question est facile, et peut être résolue de la manière suivante. On prend comme surface algébrique $X = E \times E$, où E est une courbe elliptique réelle dont la partie réelle a une seule composante connexe. La partie réelle $X(\mathbb{R})$ est alors un tore, qui correspond, si l'on écrit E comme $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$, à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Or $GL_2(\mathbb{Z})$ agit linéairement sur $E \times E$, et peut ainsi être considéré comme un sous-groupe du groupe d'automorphismes de X . De plus, l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $X(\mathbb{R})$ correspond à l'action usuelle sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, qui est une réalisation du mapping class group de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Ainsi, $MCG(X(\mathbb{R}))$ peut être réalisé par un sous-groupe de $Aut_{\mathbb{R}}(X)$, qui correspond à l'action linéaire de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $E \times E$.

Remarque : Le mot *surface* est ambigu : tantôt il désigne une variété complexe de dimension complexe 2 (donc de dimension réelle 4), tantôt il désigne une variété réelle de dimension réelle 2. Il devient encore plus ambigu lorsque l'on parle d'une *surface réelle* : ce terme peut désigner aussi bien une variété réelle de dimension 2 qu'une variété complexe de dimension 2 munie d'une structure réelle. Le sens donné à ce terme sera toutefois rendu clair (du moins je l'espère) par le contexte.

Chapitre 1

Généralités sur les surfaces de degré $(2, 2, 2)$

1.1 Homologie et diviseurs sur $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^r$

Soit $M = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^r$, où r est un entier strictement positif. On notera $x_1 = [s_1 : t_1], \dots, x_r = [s_r : t_r]$ les coordonnées dans M .

Calcul des groupes d'homologie : Comme les groupes d'homologie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont sans torsion, alors la formule de Künneth s'applique :

$$H_p(M, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{p_1 + \dots + p_r = p} H_{p_1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \dots \otimes H_{p_r}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Or on a $H_p(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ pour $p \notin \{0, 2\}$, $H_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma]$ (où σ est la 0-chaîne correspondant à un point), et $H_2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau]$ (où τ est la 2-chaîne correspondant à la somme de tous les 2-simplexes orientés). On en déduit que $H_p(M, \mathbb{Z}) = 0$ si p est impair, et $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$ est de rang $\binom{r}{k}$, engendré par les $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_r$, où exactement k des α_i valent τ , et les autres valent σ . Autrement dit, $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$ est engendré par les $\binom{r}{k}$ classes d'homologie des sous-variétés de M du type $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{cste\} \times \dots$, où $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ apparaît k fois (les valeurs des constantes ne changent pas la classe d'homologie).

Cas particulier : $k = r - 1$. On note $[x_i]$ la chaîne $\tau \otimes \dots \otimes \tau \otimes \sigma \otimes \tau \otimes \dots \otimes \tau$, où le seul σ qui intervient est en i -ième position. En fait, $[x_i]$ correspond à la classe d'homologie de l'hypersurface $\{x_i = cste\}$. $H_{2r-2}(M, \mathbb{Z})$ est alors de rang r , engendré par $[x_1], \dots, [x_r]$.

Remarque : Lorsque les coordonnées seront notées x, y, z, \dots , alors les générateurs correspondant de $H_{2r-2}(M, \mathbb{C})$ seront notés $[x], [y], [z], \dots$.

Groupes de cohomologie : Grâce à la dualité de Poincaré, on a un isomorphisme $H_p(M, \mathbb{Z}) \simeq H^{2r-p}(M, \mathbb{Z})$. Pour $\alpha \in H_p(M, \mathbb{Z})$, on notera η_α l'élément correspondant dans $H^{2r-p}(M, \mathbb{Z})$. Par exemple, $H^2(M, \mathbb{Z})$ est de rang r , engendré par $\eta_{[x_1]}, \dots, \eta_{[x_r]}$.

Groupe de Picard : Comme $H^1(M, \mathcal{O}) = 0$, alors un fibré en droites $L \in \text{Pic}(M)$ est déterminé, à isomorphisme près, par sa première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. De plus, comme chaque générateur $\eta_{[x_i]}$ de $H^2(M, \mathbb{Z})$ est la classe de Chern d'un diviseur $\{x_i = cste\}$, alors l'application c_1 est surjective. Ainsi, c_1 est un isomorphisme entre $\text{Pic}(M)$ et $H^2(M, \mathbb{Z})$. On en déduit que $\text{Pic}(M)$ est le groupe abélien libre engendré par les r classes d'équivalence linéaire des diviseurs $\{x_i = cste\}$.

Notation : On note $\mathcal{O}(a_1, \dots, a_r)$ la classe des fibrés en droites correspondant à $a_1\eta_{[x_1]} + \dots + a_r\eta_{[x_r]}$. Si X est une sous-variété de M , on note $\mathcal{O}_X(a_1, \dots, a_r) = \mathcal{O}(a_1, \dots, a_r)|_X$.

1.2 Degré d'une hypersurface

Définition 2 : Soit $X \subset M$ une hypersurface analytique irréductible. On note $[X]$ sa classe dans $\text{Pic}(M)$. On dit que X est une *hypersurface de degré* (a_1, \dots, a_r) si $[X] = \mathcal{O}(a_1, \dots, a_r)$. Lorsque $r = 2$, on parle de *courbe de degré* (a, b) , et lorsque $r = 3$, on parle de *surface de degré* (a, b, c) .

Remarque : Une hypersurface irréductible $X \subset M$ est de degré (a_1, \dots, a_r) si, et seulement si, pour tout i , l'intersection homologique de X avec la courbe $\{x_1 = cste, \dots, x_{i-1} = cste, x_{i+1} = cste, \dots, x_r = cste\}$ vaut a_i .

Notation : On note $\pi_{x_i} : X \rightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^{r-1}$ la projection qui consiste à oublier la coordonnée x_i .

La remarque ci-dessus se traduit alors ainsi : une hypersurface irréductible $X \subset M$ est de degré (a_1, \dots, a_r) si, et seulement si, pour tout i , l'application π_{x_i} est un revêtement (ramifié) de degré a_i .

La proposition ci-dessous donne une autre caractérisation du degré :

Proposition 1 : Soit $X \subset M$ une hypersurface irréductible. Alors X est de degré (a_1, \dots, a_r) si, et seulement si, il existe un polynôme $f \in \mathbb{C}[s_1, t_1, \dots, s_r, t_r]$ qui, pour tout i , est homogène de degré a_i en tant que polynôme en (s_i, t_i) , et tel que X est le lieu des zéros de ce polynôme, c'est-à-dire :

$$X = \{([s_1 : t_1], \dots, [s_r : t_r]) \in M \mid f(s_1, t_1, \dots, s_r, t_r) = 0\}.$$

Démonstration : Comme X est une hypersurface analytique, on sait, d'après le théorème de Chow, que X coïncide avec les zéros d'un polynôme irréductible $f \in \mathbb{C}[s_1, t_1, \dots, s_r, t_r]$ homogène en les couples de variables (s_i, t_i) . Le cardinal de la fibre $\pi_{x_i}^{-1}(x_1^0, \dots, \widehat{x_i^0}, \dots, x_r^0)$, avec $x_j^0 = [s_j^0 : t_j^0]$, correspond au nombre de zéros dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ du polynôme homogène $f^0(s_i, t_i) := f(s_1^0, t_1^0, \dots, s_i, t_i, \dots, s_r^0, t_r^0)$. Mais pour un choix générique de $(x_1^0, \dots, \widehat{x_i^0}, \dots, x_r^0)$ (pour des valeurs n'annulant pas le discriminant, par rapport à la variable x , de $f(\dots, t_{i-1}, x, 1, s_{i+1}, \dots)$), ce nombre de zéros est égal au degré de f^0 . Le résultat s'en suit. \square

Remarque : Voici une manière équivalente de voir les choses. Dans la partie affine \mathbb{C}^r de M , X est donnée par les zéros d'un polynôme irréductible (qui est simplement le polynôme déshomogénéisé $f(x_1, 1, x_2, 1, \dots, x_r, 1)$). Si pour tout i on note a_i le degré de ce polynôme en x_i , alors le degré de X est simplement (a_1, \dots, a_r) .

1.3 Surfaces de degré $(2, 2, 2)$ et surfaces $K3$

À partir de maintenant, on travaille dans $M = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$, et on note x, y et z les coordonnées.

Proposition 2 : Les surfaces lisses de degré $(2, 2, 2)$ sont exactement les surfaces $K3$ plongées dans M .

Démonstration : Soit $X \subset M$ une surface irréductible lisse. Comme M se plonge dans un espace projectif, alors X est projective. Notons (a, b, c) son degré.

Calculons le fibré canonique de X , grâce à la formule d'adjonction : $K_X = (K_M + [X])|_X$. Par définition, $[X] = \mathcal{O}(a, b, c)$. Pour calculer K_M , il suffit de remarquer que la 3-forme holomorphe $dx \wedge dy \wedge dz$, définie sur \mathbb{C}^3 , se prolonge en une 3-forme méromorphe sur M , qui ne s'annule pas et qui a des pôles d'ordre 2 sur les hypersurfaces $\{x = \infty\}$, $\{y = \infty\}$ et $\{z = \infty\}$.

La classe de Chern de son diviseur vaut donc $-2\eta_{[x]} - 2\eta_{[y]} - 2\eta_{[z]}$. On en déduit que $K_M = \mathcal{O}(-2, -2, -2)$. Ainsi, $K_X = \mathcal{O}_X(a - 2, b - 2, c - 2)$ est trivial si, et seulement si, $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.

Il reste à montrer que lorsque $(a, b, c) = (2, 2, 2)$, $b_1(X)$ est nul. Pour cela, on applique le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes ($[X]$ est un fibré en droites positif, car $a, b, c > 0$). Ce théorème nous dit que l'inclusion i de X dans M induit un isomorphisme i^* entre les groupes de cohomologie $H^1(M, \mathbb{Q})$ et $H^1(X, \mathbb{Q})$. Comme le premier groupe est nul, il en va de même du second. \square

1.4 Groupe des automorphismes d'une surface de degré $(2, 2, 2)$

Soit $X \subset M$ une surface de degré $(2, 2, 2)$. On dispose de trois revêtements doubles π_x, π_y et $\pi_z : X \rightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$, qui consistent à oublier respectivement la coordonnée x, y et z . Le revêtement π_x nous fournit une involution holomorphe de X , notée s_x , qui consiste à permuter les points dans chaque fibre du revêtement. De même, on a des involutions s_y et s_z , correspondant respectivement aux revêtements π_y et π_z . On note G le sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ qu'elles engendrent.

Théorème 2 (Lan Wang [14]) : *Le groupe G est le produit libre des trois involutions s_x, s_y et s_z , c'est-à-dire qu'il admet la présentation suivante :*

$$G = \langle s_x, s_y, s_z \mid s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Remarque : En particulier, le groupe G (donc $\text{Aut}(X)$) est gros, car il contient un groupe libre à deux générateurs, par exemple celui engendré par $s_x s_y$ et $s_x s_z$. Lorsque la surface X est réelle (c'est-à-dire que l'équation qui la définit est à coefficients réels), alors les trois involutions s_x, s_y et s_z sont des automorphismes réels, donc le groupe $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(X)$, qui contient G , est lui aussi gros.

Démonstration : Je reprends ici l'idée de la preuve faite par Serge Cantat dans [4, §1.5].

Les classes d'homologie, dans $H_2(X, \mathbb{Z})$, de $\{x = cste\}$, $\{y = cste\}$ et $\{z = cste\}$, seront encore notées $[x]$, $[y]$ et $[z]$ respectivement. On s'intéresse à l'action induite par G sur ces classes d'homologie. Regardons d'abord

celle de s_x . Les courbes $\{y = cste\}$ et $\{z = cste\}$ étant globalement inchangées par cette involution, on a $(s_x)_\star([y]) = [y]$ et $(s_x)_\star([z]) = [z]$. Pour calculer $(s_x)_\star([x])$, on utilise le fait que $(\pi_x)^\star \circ (\pi_x)_\star = \text{id} + (s_x)_\star$ sur $H_2(X, \mathbb{Z})$ (car s_x est l'involution du revêtement π_x). On note y' et z' les coordonnées dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$. Soit x_0 un point générique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et soit $\Gamma = \pi_x(\{x = x_0\}) \subset (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$. Comme l'intersection de $\{x = x_0\}$ avec $\{y = cste\}$ (resp. avec $\{z = cste\}$) est de cardinal 2, alors l'intersection de Γ avec $\{y' = cste\}$ (resp. avec $\{z' = cste\}$) est également de cardinal 2, donc Γ est une courbe de degré $(2, 2)$ dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$. Ainsi, si l'on note $[\Gamma]$ sa classe d'homologie dans $H_2((\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2, \mathbb{Z})$, alors $[\Gamma] = 2[y'] + 2[z']$. On en déduit que $(\pi_x)^\star([\Gamma]) = 2[y] + 2[z]$. Mais d'autre part, $[\Gamma] = (\pi_x)_\star([x])$, donc $(\pi_x)^\star([\Gamma]) = (\pi_x)^\star \circ (\pi_x)_\star([x]) = [x] + (s_x)_\star([x])$. De ces deux égalités, on tire $(s_x)_\star([x]) = -[x] + 2[y] + 2[z]$. En faisant une permutation cyclique des variables, on obtient des relations semblables pour $(s_y)_\star$ et $(s_z)_\star$.

Soit V le sous-espace vectoriel de $H_2(X, \mathbb{R})$ engendré par $[x]$, $[y]$ et $[z]$. On vient de montrer que ce sous-espace est stable par l'action de G , et que les matrices de $(s_x)_\star$, $(s_y)_\star$ et $(s_z)_\star$ dans la base $([x], [y], [z])$ de V sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On regarde le cône C des isotropes de V pour la forme d'intersection. Les classes d'homologie $[x]$, $[y]$ et $[z]$ sont sur ce cône, car elles sont d'auto-intersection nulle. Par ailleurs, C est stable par l'action de G , car les automorphismes de X préservent la forme d'intersection. On regarde maintenant le projectivisé C' de C , qui topologiquement est un cercle, sur lequel on a trois points P_x , P_y et P_z correspondant respectivement à $[x]$, $[y]$ et $[z]$. Ces trois points découpent ce cercle en trois arcs de cercle fermés : $\gamma_x = P_y P_z$, $\gamma_y = P_z P_x$ et $\gamma_z = P_x P_y$ (voir la figure 1.1).

Rappelons que $(s_x)_\star$ fixe les deux points P_y et P_z . Comme $(s_x)_\star$ est continue, ou bien elle échange les deux arcs ouverts $\overset{\circ}{\gamma}_x$ et $C' \setminus \gamma_x$, ou bien elle les stabilise. Mais dans le deuxième cas, $(s_x)_\star$ serait une involution continue sur chacun des deux arcs fermés γ_x et $\gamma_y \cup \gamma_z$, donc serait égale à l'identité, ce qui est impossible, car $[x]$ et $-[x] + 2[y] + 2[z]$ ne sont pas colinéaires. Ainsi $(s_x)_\star$ échange les deux arcs ouverts $\overset{\circ}{\gamma}_x$ et $C' \setminus \gamma_x$. De manière symétrique, on obtient que $(s_y)_\star$ échange $\overset{\circ}{\gamma}_y$ et $C' \setminus \gamma_y$, et que $(s_z)_\star$ échange $\overset{\circ}{\gamma}_z$ et $C' \setminus \gamma_z$.

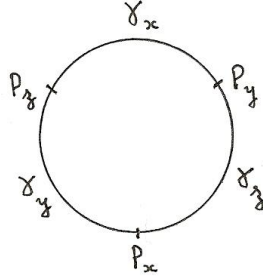


FIG. 1.1 – Le cercle C'

Soit $g \in G$ que l'on écrit $g = s_{t_1} \dots s_{t_n}$, avec $t_i \in \{x, y, z\}$ et $t_i \neq t_{i+1}$. On suppose que $n \geq 1$, et on va montrer que $g \neq \text{id}$. Comme $P_{t_n} \in C' \setminus \gamma_{t_n}$, alors $(s_{t_n})_*(P_{t_n}) \in \gamma_{t_n}^\circ \subset C' \setminus \gamma_{t_{n-1}}$, puis $(s_{t_{n-1}} \circ s_{t_n})_*(P_{t_n}) \in \gamma_{t_{n-1}}^\circ, \dots, g_*(P_{t_n}) \in \gamma_{t_1}^\circ$. Comme le point P_{t_n} n'est dans l'intérieur d'aucun des trois arcs γ_x, γ_y et γ_z , alors $g_*(P_{t_n}) \neq P_{t_n}$. On a ainsi montré que $g \neq \text{id}$. \square

Théorème 3 (admis) : *Pour une équation générique de degré $(2, 2, 2)$, on a $G = \text{Aut}(X)$.*

Ce théorème, que je ne démontrerai pas ici, dépend de propriétés plus fines des surfaces $K3$, et notamment du fait que $\text{Aut}(X)$ s'injecte dans $GL(H^2(X, \mathbb{Z}))$ (cf [1, proposition VIII.11.3]).

Remarque : Lorsque X est une surface de degré $(2, 2, 2)$ réelle, alors les trois involutions s_x, s_y et s_z sont en fait des automorphismes réels. Ainsi, pour X une surface de degré $(2, 2, 2)$ réelle générique, les groupes $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(X)$ et $\text{Aut}(X)$ coïncident avec le groupe G , et ils sont gros.

Chapitre 2

Surfaces de Kummer

2.1 Surfaces de Kummer

Soit Λ un réseau de \mathbb{C}^2 , et soit $\mathbb{T} = \mathbb{C}^2/\Lambda$ le tore complexe associé. On note σ l'involution de \mathbb{T} induite par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ sur \mathbb{C}^2 . J'appellerai *surface de Kummer* la surface (singulière) $X = \mathbb{T}/\sigma$.

Notons $p : \mathbb{T} \rightarrow X$ l'application de passage au quotient. C'est un revêtement double, ramifié en les 16 points fixes de σ (qui correspondent aux points demi-entiers sur le réseau Λ). Ces ramifications sont les points singuliers de la surface X .

Remarque : Dans la terminologie habituelle, ce qu'on appelle une surface de Kummer est plutôt la surface X désingularisée par un éclatement des 16 points singuliers.

2.2 Surfaces de Kummer données par le produit de deux courbes elliptiques

Les résultats développés ici sont inspirés de [3, exemple 8.3].

On va s'intéresser à un cas particulier de surfaces de Kummer : celles pour lesquelles le réseau Λ s'écrit $\Gamma \times \Gamma$, où Γ est un réseau de \mathbb{C} , de la forme $\mathbb{R} \oplus \tau\mathbb{R}$, avec $\Im(\tau) > 0$. Dans ce cas, si on note E la courbe elliptique \mathbb{C}/Γ , le tore \mathbb{T} s'écrit $E \times E$, et la surface de Kummer associée est $X = (E \times E)/\sigma$.

L'intérêt d'une telle surface de Kummer est que l'on peut la plonger dans $M = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$, et que la surface obtenue est alors de degré $(2, 2, 2)$. Voici comment on construit le plongement.

Supposons que E est donnée, avec sa loi de groupe $+$, sous la forme d'une cubique lisse dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, d'équation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ (avec $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$). On note O l'élément neutre de E , qui correspond à l'unique point à l'infini $(0 : 1 : 0)$. Pour $P \in E \cap \mathbb{C}^2$, on note x_P son abscisse, et on pose également $x_O = \infty$. Ceci nous définit une application $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit ϕ l'application (holomorphe) de $E \times E$ dans $M = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$ définie par $\phi(P, Q) = (x_P, x_Q, x_{P+Q})$. Alors les points de $\mathbb{T} = E \times E$ qui ont la même image par ϕ correspondent aux orbites de σ , d'où une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\phi} & M \\ p \downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\ X & & \end{array}$$

L'application $\bar{\phi}$ est alors un plongement de X dans M , ce qui nous permet d'identifier la surface de Kummer X avec l'image de ϕ dans M , et d'identifier l'application ϕ avec l'application de passage au quotient par σ . Dans tout ce qui suit, cette identification sera faite implicitement.

On peut alors décrire explicitement les points de ramification du revêtement double $p : \mathbb{T} \rightarrow X$ dans M : si l'on note α_1, α_2 et α_3 les racines (distinctes) de $4x^3 - g_2x - g_3$, alors ce sont les 16 points $(\infty, \infty, \infty), (\infty, \alpha_1, \alpha_1), (\alpha_1, \infty, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_1, \infty), (\infty, \alpha_2, \alpha_2), (\alpha_2, \infty, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_2, \infty), (\infty, \alpha_3, \alpha_3), (\alpha_3, \infty, \alpha_3), (\alpha_3, \alpha_3, \infty), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3), (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1), (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$.

Proposition 3 : X est une surface de degré $(2, 2, 2)$.

Démonstration : On va montrer que $\pi_z : X \rightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$ est un revêtement double (la démonstration est similaire pour π_x et π_y). Soit $(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Soient P et Q sur E tels que $x = x_P$ et $y = x_Q$. Comme les seuls couples de points de E ayant comme abscisses x et y sont $(P, Q), (P, -Q), (-P, Q)$ et $(-P, -Q)$, alors $(x, y, z) \in X$ si, et seulement si, $z = x_{P+Q} = x_{-P-Q}$ ou $z = x_{P-Q} = x_{-P+Q}$. On en déduit que la fibre $\pi_z^{-1}(x, y)$ est de cardinal 2, sauf si x ou y prend l'une des valeurs $\infty, \alpha_1, \alpha_2$ ou α_3 . \square

On peut aussi donner une équation explicite de la surface $X \subset M$, en utilisant les formules d'addition sur une courbe elliptique. On trouve l'équation suivante, pour la partie affine $X \cap \mathbb{C}^3$:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \frac{g_2}{2}(xy + yz + zx) + g_3(x + y + z) + \frac{g_2^2}{16} = 2xyz(x + y + z). \quad (2.1)$$

On retrouve ainsi le fait qu'il s'agit d'une surface de degré $(2, 2, 2)$.

Un autre intérêt de ce cas particulier de surface de Kummer est le suivant : le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{C}^2 , en préservant le réseau $\Lambda = (\Gamma \times \Gamma)$, donc il agit linéairement sur $\mathbb{T} = \mathbb{C}^2/\Lambda$. En outre, l'involution σ commute avec l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$, donc cette action passe au quotient en une action linéaire sur $X = \mathbb{T}/\sigma$.

Regardons maintenant les trois involutions s_x , s_y et s_z de la surface X (correspondant respectivement aux trois revêtements doubles π_x , π_y et π_z). On va montrer qu'elles correspondent à une action linéaire sur X , c'est-à-dire qu'elles sont induites par des involutions linéaires de \mathbb{C}^2 .

Commençons par s_z . Si on prend $(x_P, x_Q) \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$, et que l'on cherche les préimages par π_z , on trouve (x_P, x_Q, x_{P+Q}) et (x_P, x_{-Q}, x_{P-Q}) , qui correspondent aux points (P, Q) et $(P, -Q)$ sur le tore \mathbb{T} , donc s_z est induite par la matrice involutive :

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Regardons maintenant s_x . Prenons $(x_Q, x_R) \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^2$. Ses préimages par π_x sont (x_{R-Q}, x_Q, x_R) et (x_{-R-Q}, x_Q, x_R) , qui correspondent respectivement aux points $(R - Q, Q)$ et $(-R - Q, Q)$ de \mathbb{T} . Comme $-R - Q = -(R - Q) - 2Q$, alors s_x est induite par la matrice suivante :

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De manière symétrique, on obtient que s_y est induite par :

$$S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Surfaces de Kummer données par le produit de deux courbes elliptiques réelles

On va s'intéresser maintenant au cas où la courbe elliptique E est donnée par une équation à coefficients réels (c'est-à-dire g_2 et g_3 sont réels). Dans ce cas, l'équation (2.1) de X est alors elle aussi à coefficients réels. Ainsi, la surface X est définie sur \mathbb{R} , et on peut s'intéresser à l'ensemble de ses points réels $X(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des points dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^3$ qui vérifient cette équation.

La topologie de cet ensemble va dépendre fortement du nombre de racines réelles (1 ou 3) du polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$, c'est-à-dire du nombre d'ovales (resp. 1 ou 2) dans la courbe elliptique réelle $E(\mathbb{R})$. Néanmoins, dans les deux cas, $X(\mathbb{R})$ va se décomposer comme suit :

Proposition 4 : *Notons $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ l'ensemble des couples de points réels de E ($\mathbb{T}(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}) \times E(\mathbb{R})$), et notons $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des couples de points de E qui ont une abscisse réelle et une ordonnée imaginaire pure. Alors $X(\mathbb{R}) = X_1 \cup X_2$, avec $X_1 = \mathbb{T}(\mathbb{R})/\sigma$ et $X_2 = \mathbb{T}'(\mathbb{R})/\sigma$. De plus, X_1 et X_2 n'ont en commun que les points de ramification réels.*

Démonstration : On s'intéresse à l'image réciproque de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^3$ par l'application $\phi : E \times E \rightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$. Un couple de points (P, Q) est dans cette image réciproque si, et seulement si, les abscisses de P , de Q et de $-P - Q$ (qui est le troisième point d'intersection de E avec la droite contenant P et Q) sont réelles. Les ordonnées de ces points sont alors soit réelles, soit imaginaires pures. Mais si, parmi ces trois ordonnées, deux sont réelles, alors la troisième l'est également (car une droite réelle coupe une cubique réelle en 1 ou 3 points). De même lorsque deux de ces ordonnées sont imaginaires pures, la troisième l'est également. On en déduit la description donnée dans la proposition.

De plus, un point de $X(\mathbb{R})$ est à la fois dans X_1 et dans X_2 si c'est l'image par ϕ d'un couple de points (P, Q) , avec P et Q d'ordonnées à la fois réelles et imaginaires pures, c'est-à-dire que ces ordonnées valent soit 0, soit ∞ . Cela correspond exactement aux points de ramification sur \mathbb{T} . \square

2.3.1 Cas de 1 ovale

C'est le cas où le polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$ n'a qu'une seule racine réelle, que l'on notera α . Dans ce cas, la surface réelle $X(\mathbb{R})$ ne conserve que 4 des 16 points de ramification : les points (∞, ∞, ∞) , (∞, α, α) , (α, ∞, α) et (α, α, ∞) .

Comme l'application restreinte $\phi : \mathbb{T}(\mathbb{R}) \rightarrow X_1$ est un revêtement double ramifié en ces quatre points, la formule de Riemann-Hurwitz nous donne $\chi(X_1) = 2$, donc X_1 est une sphère.

De manière similaire, on a un revêtement double $\phi : \mathbb{T}'(\mathbb{R}) \rightarrow X_2$ ramifié en quatre points. Notons E' la courbe elliptique correspondant au polynôme $4x^3 - g_2x + g_3$. Comme ce polynôme a le même discriminant Δ que $4x^3 - g_2x - g_3$, alors ils ont tous les deux une seule racine réelle (discriminant négatif), donc $E(\mathbb{R})$ et $E'(\mathbb{R})$ ont tous les deux un seul ovale. On a de plus un homéomorphisme entre $E'(\mathbb{R}) \times E'(\mathbb{R})$ et $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$, donné par $((x, y), (x', y')) \mapsto ((-x, iy), (-x', iy'))$, donc $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$ est également un tore. On en déduit, par la formule de Riemann-Hurwitz, que X_2 est une sphère.

On en déduit la topologie de $X(\mathbb{R})$:

Proposition 5 : $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à une union de deux sphères X_1 et X_2 , qui se recollent en quatre points.

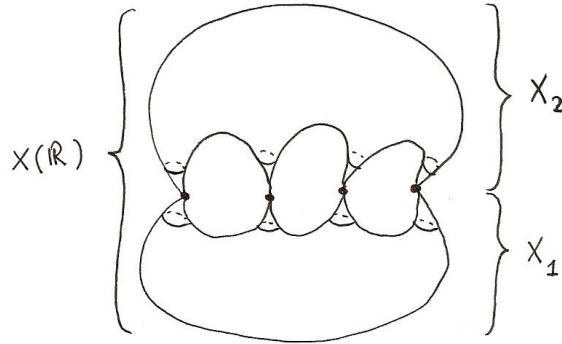


FIG. 2.1 – La topologie de $X(\mathbb{R})$, dans le cas où $E(\mathbb{R})$ a un seul ovale (voir figure 3.1 pour un exemple explicite)

2.3.2 Cas de 2 ovales

Penchons-nous maintenant sur le cas où le polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$ possède trois racines réelles. La partie réelle de la courbe elliptique E est alors constituée de deux ovales. Dans ce cas, les 16 points singuliers de X sont des points réels.

Pour comprendre la topologie de X_1 , on regarde le revêtement double $\phi : \mathbb{T}(\mathbb{R}) \rightarrow X_1$. Cette fois, comme $E(\mathbb{R})$ est une union disjointe de deux cercles, alors $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ est lui une union disjointe de quatre tores. En fait, ϕ possède quatre ramifications par composante connexe de $\mathbb{T}(\mathbb{R})$. Pour le voir, donnons un nom à chacun des deux ovales : on appelle C_1 celui qui est borné dans la partie affine, et C_2 celui qui contient le point O . On suppose que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, et on note, pour $1 \leq i \leq 3$, A_i le point $(\alpha_i, 0)$ de $E(\mathbb{R})$. Alors $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ se décompose en l'union disjointe de $C_1 \times C_1$, $C_1 \times C_2$, $C_2 \times C_1$ et $C_2 \times C_2$, et chacune de ces composantes connexes contient quatre ramifications :

1. $C_1 \times C_1$ contient (A_1, A_1) , (A_2, A_2) , (A_1, A_2) et (A_2, A_1) ;
2. $C_1 \times C_2$ contient (A_1, O) , (A_1, A_3) , (A_2, O) et (A_2, A_3) ;
3. $C_2 \times C_1$ contient (O, A_1) , (O, A_2) , (A_3, A_1) et (A_3, A_2) ;
4. $C_2 \times C_2$ contient (O, O) , (A_3, A_3) , (O, A_3) et (A_3, O) .

On remarque également que chaque fibre de ϕ reste dans une même composante connexe de $\mathbb{T}(\mathbb{R})$. Ainsi, ϕ se décompose en quatre revêtements doubles, un par composante connexe de $\mathbb{T}(\mathbb{R})$, chacun étant ramifié en quatre points. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, l'espace d'arrivée d'un tel revêtement est une sphère. On en déduit que X_1 est une union disjointe de quatre sphères.

Par le même argument que pour le cas d'un ovale, on montre que $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$ possède lui aussi deux ovales, et que X_2 a la même topologie que X_1 , à savoir une union disjointe de quatre sphères. Il reste maintenant à voir comment X_1 et X_2 se recollent. Pour cela, notons C'_1 l'ovale de $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$ qui contient le point O , notons C'_2 l'autre ovale, et donnons, composante par composante, les ramifications de ϕ dans $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$:

1. $C'_1 \times C'_1$ contient (O, O) , (A_1, A_1) , (O, A_1) et (A_1, O) ;
2. $C'_1 \times C'_2$ contient (O, A_2) , (O, A_3) , (A_1, A_2) et (A_1, A_3) ;
3. $C'_2 \times C'_1$ contient (A_2, O) , (A_2, A_1) , (A_3, O) et (A_3, A_1) ;
4. $C'_2 \times C'_2$ contient (A_2, A_2) , (A_3, A_3) , (A_2, A_3) et (A_3, A_2) .

Si l'on compare maintenant cette liste avec celle ci-dessus, on remarque que chaque composante de $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ a exactement une ramification en commun avec chaque composante de $\mathbb{T}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la topologie de $X(\mathbb{R})$:

Proposition 6 : *$X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont chacun une union disjointe de quatre sphères, et chacune des quatre sphères de X_1 se recolle en un point avec chacune des quatre sphères de X_2 .*

(voir figure 3.2 pour un exemple explicite)

2.4 Mapping Class Group de la partie réelle

Les résultats de cette section s'inspirent très largement du manuscrit [6, §1.2 et §2.2] de Serge Cantat et Frank Loray.

On revient sur le cas où la partie réelle de la courbe elliptique $E(\mathbb{R})$ ne possède qu'un seul ovale. On rappelle que $X(\mathbb{R})$ est alors la réunion de deux sphères X_1 et X_2 , recollées en quatre points, que l'on va noter P_1, P_2, P_3 et P_4 . Notons \mathbb{S}_4^2 la sphère X_1 privée de ces quatre points. On s'intéresse au mapping class group de \mathbb{S}_4^2 , c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes de X_1 qui permutent les points P_1, P_2, P_3 et P_4 , à isotopie fixe sur ces quatre points près. Pour cela, on va regarder comment certains difféomorphismes de $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ passent au quotient en des difféomorphismes de \mathbb{S}_4^2 .

Tout d'abord, notons que $\mathbb{T}(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}) \times E(\mathbb{R})$ correspond, dans l'identification $\mathbb{T} \simeq \mathbb{C}^2/\Gamma^2$, à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et que l'involution σ restreinte à $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ correspond à l'involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Ces identifications seront faites implicitement dans ce qui suit. On va noter $Q_1 = (1/2, 0)$, $Q_2 = (0, 0)$, $Q_3 = (1/2, 0)$ et $Q_4 = (1/2, 1/2)$ les quatre points de ramification de σ sur $\mathbb{T}(\mathbb{R})$, et on va supposer, quitte à permuter les indices dans $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, que $P_i = p(Q_i)$, où $p : \mathbb{T}(\mathbb{R}) \rightarrow X_1$ est l'application de passage au quotient par σ (voir figure 2.2).

Notons H le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ constitué des translations de vecteurs demi-entiers de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (qui sont les vecteurs Q_i). On a $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On notera t_v la translation de vecteur v .

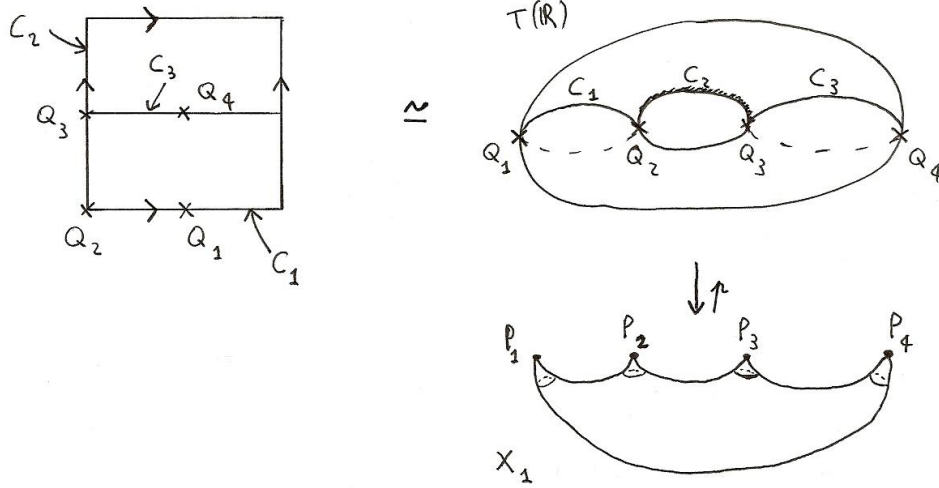


FIG. 2.2 – Le tore $\mathbb{T}(\mathbb{R})$ et la sphère X_1

Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit de manière fidèle sur $\mathbb{T}(\mathbb{R})$, si bien que l'on peut le considérer comme un sous-groupe de $Diff(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$. Ce sous-groupe est engendré par les matrices suivantes :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux difféomorphismes sont des twists de Dehn par rapport, respectivement, aux cercles $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (voir figure 2.2).

Si l'on regarde maintenant le sous-groupe de $Diff(\mathbb{T}(\mathbb{R}))$ engendré par les deux sous-groupes H et $SL_2(\mathbb{R})$, il s'agit alors d'un produit semi-direct $H \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$, qui est engendré par les éléments g_1 , g_2 et g_3 , où

$$g_3 \stackrel{\text{def}}{=} t_{(0,1/2)} \circ g_1 \circ t_{(0,1/2)}$$

est un twist de Dehn autour du cercle $C_3 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{1/2\}$ (voir figure 2.2).

Remarque : Pour voir que ces éléments engendrent bien $H \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$, il suffit de remarquer que

$$g_3 = g_1 \circ t_{g_1^{-1}(0,1/2)} \circ t_{(0,1/2)} = g_1 \circ t_{(1/2,1/2)} \circ t_{(0,1/2)} = g_1 \circ t_{(1/2,0)},$$

donc que $t_{(1/2,0)} \in \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$, puis que

$$g_2 \circ t_{(1/2,0)} \circ g_2^{-1} = t_{g_2(1/2,0)} = t_{(1/2,1/2)},$$

donc que $t_{(1/2,1/2)} \in \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$, et enfin $t_{(0,1/2)} = t_{(1/2,0)} \circ t_{(1/2,1/2)}$, donc $t_{(0,1/2)} \in \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$.

Remarquons que les éléments de $H \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ permutent les orbites de σ et fixent l'ensemble de ses points fixes, donc ils passent au quotient en des difféomorphismes de \mathbb{S}_4^2 . Cela détermine un sous-groupe de $Diff(\mathbb{S}_4^2)$, qui est isomorphe à $H \rtimes PSL_2(\mathbb{Z})$. Notons ω_1, ω_2 et ω_3 les images respectives de g_1, g_2 et g_3 dans ce groupe.

Théorème 4 (Joan S. Birman, [2] §4.4) : *Les classes d'isotopie de ω_1, ω_2 et ω_3 engendrent $MCG^+(\mathbb{S}_4^2)$.*

Corollaire 1 : *On a des isomorphismes $MCG^+(\mathbb{S}_4^2) \simeq H \rtimes PSL_2(\mathbb{Z})$, et $MCG(\mathbb{S}_4^2) \simeq H \rtimes PGL_2(\mathbb{Z})$, qui correspondent à des réalisations du mapping class group par des sous-groupes de difféomorphismes.*

On s'intéresse maintenant au sous-groupe $MCG_0(\mathbb{S}_4^2)$ de $MCG(\mathbb{S}_4^2)$, qui correspond aux classes d'isotopie de difféomorphismes qui fixent les quatre points P_1, P_2, P_3 et P_4 (pour des isotopies fixant elles aussi ces quatre points). Alors, via l'isomorphisme ci-dessus, $MCG_0(\mathbb{S}_4^2)$ correspond à un sous-groupe de $PGL_2(\mathbb{Z})$, plus précisément le sous-groupe Γ_2 constitué des matrices congrues à l'identité modulo 2.

Lemme 1 : *Le groupe Γ_2 est engendré par les matrices*

$$S_x = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit M une matrice de Γ_2 . Elle s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 + 2a & 2b \\ 2c & 1 + 2d \end{pmatrix},$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Notons Γ'_2 le sous-groupe de Γ_2 engendré par les matrices S_x, S_y et S_z . Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}$$

sont dans Γ'_2 . Or

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} 1 + 2(a + kc) & * \\ & 2c \quad * \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} & 1 + 2a \quad * \\ 2(c + k(2a + 1)) & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant M à gauche par une de ces deux matrices, on peut faire diminuer strictement ou bien la valeur absolue de $|a|$, ou bien celle de $|c|$:

1. si $|c| \leq |a|$, on multiplie à gauche par la première matrice avec un k adapté, et a est remplacé par $a + kc$ (on choisit k pour que $|a + kc| < |a|$);
2. sinon, on a $|2a + 1| \leq 2|c|$, donc en multipliant à gauche par la seconde matrice avec $k = \pm 1$, on remplace c par $c \pm (2a + 1)$, en choisissant le signe de telle manière que $|c \pm (2a + 1)| < |c|$.

Finalement, au bout d'un nombre fini d'étapes, on se ramène à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 2c & 1 + 2d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 + 2a & 2b \\ 0 & 1 + 2d \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, en multipliant à gauche par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2c & 1 \end{pmatrix},$$

on se ramène au deuxième cas. Comme le déterminant vaut ± 1 , alors on a des 1 ou des -1 sur la diagonale, donc en multipliant éventuellement par S_z , on a une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est dans Γ'_2 . On a ainsi montré que $M \in \Gamma'_2$. □

Rappelons-nous maintenant que les trois involutions s_x , s_y et s_z de $X = \mathbb{T}/\sigma$ sont respectivement induites par l'action linéaire des trois matrices S_x , S_y et S_z sur \mathbb{T} (cf section 2.2). Donc si l'on considère maintenant s_x , s_y et s_z comme des involutions de $X_1 = \mathbb{T}(\mathbb{R})/\sigma$, alors elles sont induites par l'action de S_x , S_y et S_z sur $\mathbb{T}(\mathbb{R})$. Autrement dit, le groupe G engendré par ces trois involutions correspond exactement au sous-groupe Γ_2 de $Diff(\mathbb{S}_4^2)$. On a ainsi montré le résultat suivant :

Proposition 7 : *Le morphisme $G \rightarrow MCG(\mathbb{S}_4^2)$, qui à un élément de G fait correspondre sa classe d'isotopie dans \mathbb{S}_4^2 , est injectif, d'image $MCG_0(\mathbb{S}_4^2)$.*

Chapitre 3

Déformation d'une surface de Kummer réelle

3.1 Topologie des surfaces déformées

Soit X une surface de Kummer réelle obtenue, comme ci-dessus, à partir d'une courbe elliptique réelle dont la partie réelle ne possède qu'un seul ovale. On s'intéresse aux petites déformations lisses de cette surface, parmi les déformations réelles de degré $(2, 2, 2)$ (autrement dit, si X est donnée par l'équation $f = 0$, on regarde les surfaces lisses définies par des équations de type $f + \varepsilon d = 0$, où d est un polynôme réel de degré $(2, 2, 2)$, et $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit pour que les surfaces définies par $f + \eta d = 0$ soient lisses pour $0 < \eta \leq \varepsilon$). La topologie de la partie réelle $X'(\mathbb{R})$ peut avoir 5 types différents, selon ce qui se passe au voisinage de chacune des 4 singularités : ou bien ce voisinage devient une union disjointe de deux disques (dans ce cas-là, on parlera de *split*), ou bien il devient un cylindre.

1. Si on a 4 splits, alors $X'(\mathbb{R})$ est une union disjointe de deux sphères.
2. Sinon, $X'(\mathbb{R})$ est une surface connexe orientable de genre $(3 - \#\text{splits})$.

Chacun de ces cas peut être réalisé par une déformation explicite. La figure 3.1 représente différentes déformations d'une telle surface, où tous les types topologiques indiqués ci-dessus sont réalisés. Le polynôme f est le polynôme qui définit la surface X dans la carte affine $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})^3$, dont voici l'expression (on la déduit de l'équation (2.1) de X dans la carte affine \mathbb{C}^3) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{g_2}{2}xyz(x+y+z) + g_3xyz(xy+yz+zx) + \frac{g_2^2}{16}x^2y^2z^2 - 2(xy+yz+zx).$$

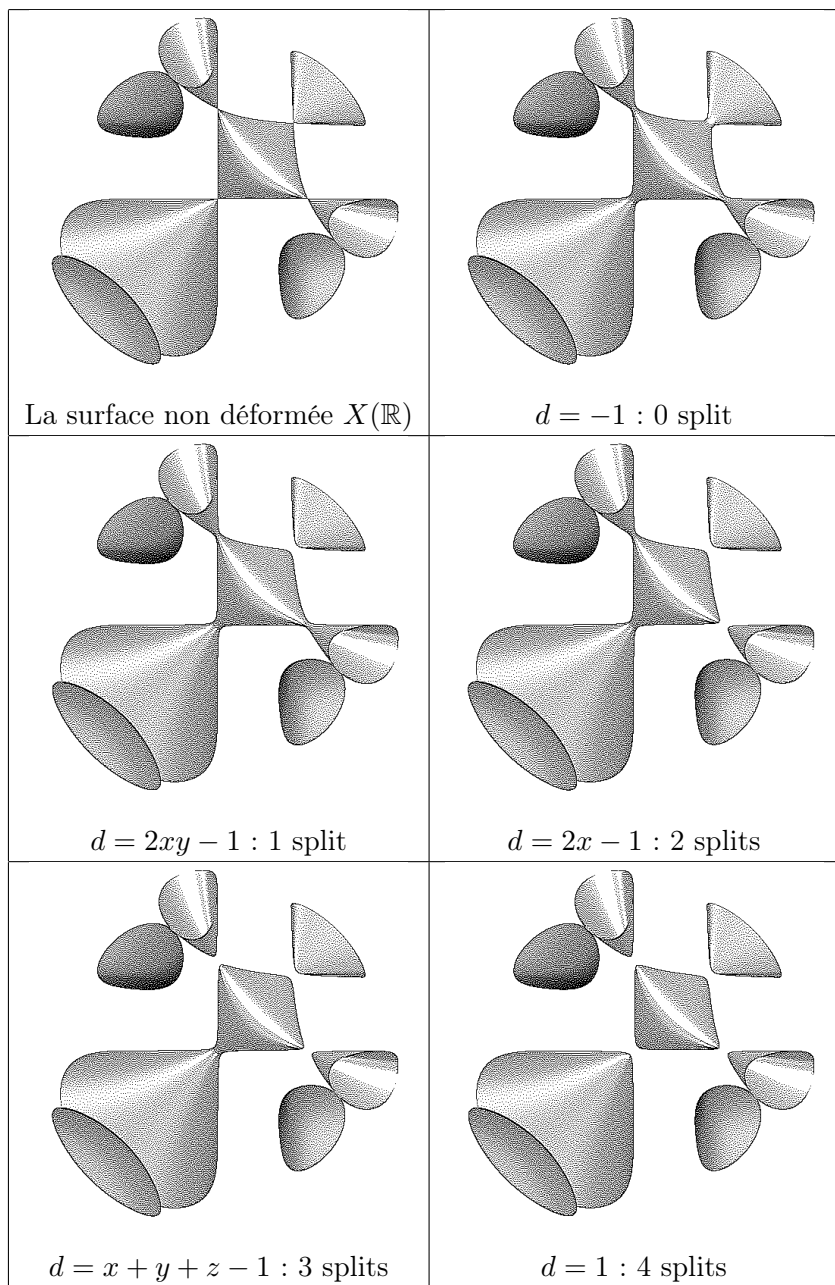


FIG. 3.1 – Déformations de la surface réelle $X(\mathbb{R})$, de paramètres $g_2 = 1$ et $g_3 = 3$ (cas où $E(\mathbb{R})$ ne possède qu'un seul ovale), vues dans la carte affine $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^3$. Les déformations ci-dessous sont données par des équations du type $f + \varepsilon d = 0$, avec $\varepsilon = 0,01$, et les polynômes d indiqués en-dessous de chacune des surfaces. Ces tracés ont été réalisés avec le logiciel *Surf*.

Remarque : Si on avait construit X avec une courbe elliptique réelle possédant deux ovales, alors le genre maximal de la surface obtenue par déformation (lorsque l'on a zéro split) serait 9. La figure 3.2 montre une telle déformation.

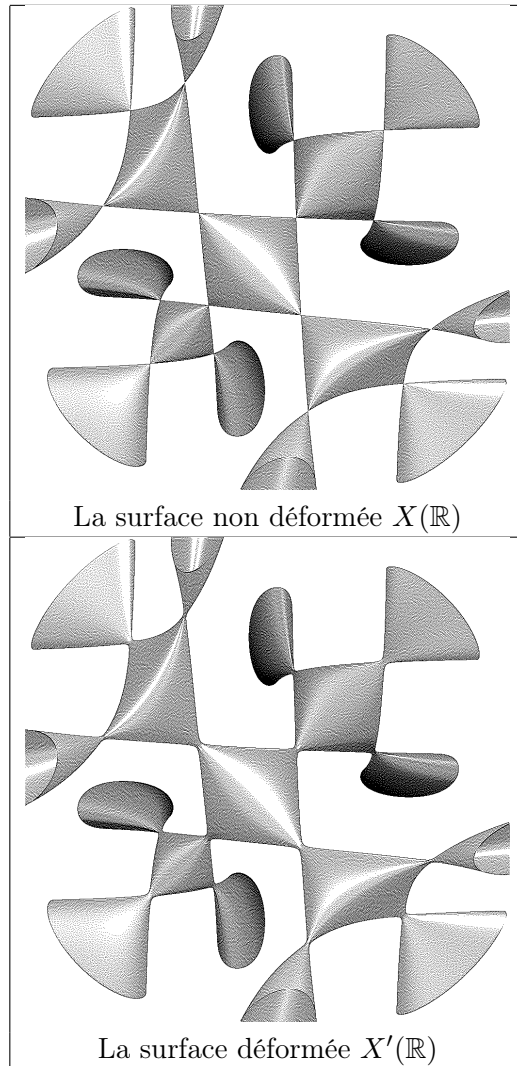


FIG. 3.2 – Déformation de la surface réelle $X(\mathbb{R})$, de paramètres $g_2 = 7/9$ et $g_3 = -1/9$ (cas où $E(\mathbb{R})$ possède deux ovales), vue dans la carte affine $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^3$. La déformation ci-dessous est donnée par l'équation $f = \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0,02$. Ces tracés ont été réalisés avec le logiciel *Surf*.

3.2 Déformation de genre 3

On va s'intéresser, dans le cas où l'on n'a pas de splits ($X'(\mathbb{R})$ est alors une surface de genre 3), à l'action du groupe G sur $X'(\mathbb{R})$. Plus précisément, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 5 : *Le morphisme $G \rightarrow MCG(X'(\mathbb{R}))$, qui à $g \in G$ associe sa classe d'isotopie, est injectif.*

Remarque : Le groupe G désignera à la fois le groupe engendré par les trois involutions s_x, s_y et s_z sur X , et celui engendré par les trois involutions s_x, s_y et s_z sur X' (notées pareil, mais qui ne sont pas les mêmes). Comme ces deux groupes sont des produits libres de ces trois involutions, ils sont isomorphes, ce qui légitime cet abus de notation.

Traçons, sur $X'(\mathbb{R})$, un cercle dans le voisinage de chaque singularité de $X(\mathbb{R})$, de telle manière que les quatre cercles séparent la surface $X'(\mathbb{R})$ en deux sphères privées de quatre disques, notées X'_1 et X'_2 , indicées de telle sorte que X'_1 soit proche de X_1 et X'_2 soit proche de X_2 (cf figure 3.3). On va chercher à ramener l'action de G sur $X'(\mathbb{R})$ tout entier à celle sur la partie X'_1 , qui est proche (en un sens que l'on précisera) de l'action de G sur \mathbb{S}_4^2 , que l'on a déjà étudiée (cf section 2.4).

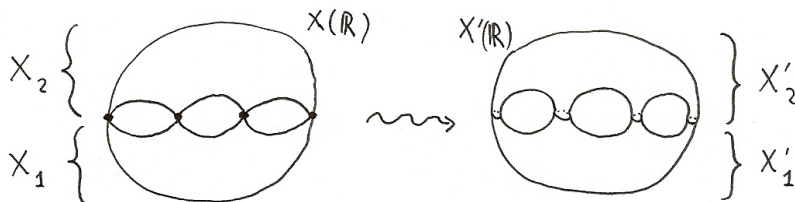


FIG. 3.3 – La déformation de $X(\mathbb{R})$ en $X'(\mathbb{R})$

3.3 Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer

Soit S une surface (réelle) orientable, éventuellement à bord. On a un morphisme naturel

$$\Phi : MCG(S) \rightarrow Ext(\pi_1(S, x_0)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Aut(\pi_1(S, x_0))}{Int(\pi_1(S, x_0))},$$

défini comme suit : pour $g \in MCG(S)$, on choisit, dans la classe d'isotopie g , un difféomorphisme \tilde{g} de S qui fixe le point base x_0 ; ce difféomorphisme induit un élément $\tilde{g}_* \in Aut(\pi_1(S, x_0))$, et $\Phi(g)$ est par définition la classe de \tilde{g}_* dans $Ext(\pi_1(S, x_0))$ (qui ne dépend pas du choix de \tilde{g}). On a alors le résultat suivant ([9, théorème 2.9.A.]) :

Théorème 6 (Dehn-Nielsen-Baer) : *Le morphisme Φ est injectif. Si de plus S est sans bord, alors Φ est un isomorphisme.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [17, théorèmes 3.3.11 (surjectivité pour les surfaces sans bord) et 5.13.1 (injectivité)].

On va chercher à exploiter ce résultat pour interpréter le morphisme $G \rightarrow MCG(X'(\mathbb{R}))$ en terme d'action de G sur les lacets de $X'(\mathbb{R})$.

3.4 Démonstration du théorème 5

Démonstration (du théorème 5) : Soit g un élément de G . Soit \tilde{g} un difféomorphisme isotope à g , qui fixe un point x_0 sur X'_1 , et qui préserve X'_1 (c'est possible, car avant déformation, les éléments de G préservent chacune des deux parties X_1 et X_2). On suppose que \tilde{g} induit un automorphisme intérieur de $\pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$: il existe donc $\alpha \in \pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$, on ait $\tilde{g}_*(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}$. Le but est de montrer que $g = \text{id}$.

Lemme 2 : *α peut être repr esent e par un lacet dans X'_1 .*

Démonstration : $\pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$ est engendré par les lacets a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 dessin es dans la figure 3.4.

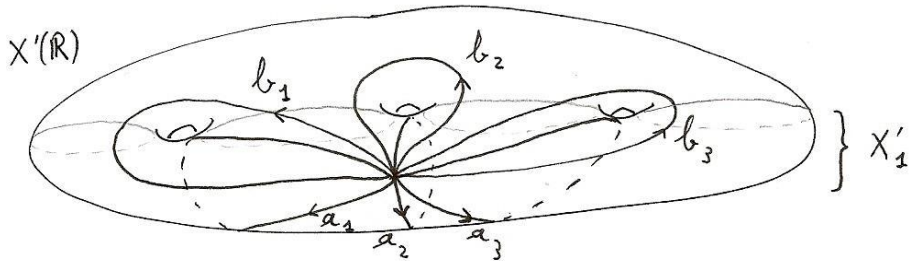


FIG. 3.4 – Générateurs de $\pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$

Notation : On notera $\pi = \pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$, et A le sous-groupe de π engendré par les lacets a_1 , a_2 et a_3 .

Puisque a_1 , a_2 et a_3 sont des lacets dans X'_1 (cf figure 3.4), il suffit de montrer que α est dans le sous-groupe A . Comme \tilde{g} stabilise la partie X'_1 , alors on a $\alpha A \alpha^{-1} = \tilde{g}_*(A) = A$. Il suffit donc de démontrer le résultat ci-dessous. \square

Lemme 3 : *Soit $\alpha \in \pi$ tel que $\alpha A \alpha^{-1} = A$. Alors $\alpha \in A$.*

Remarque : Le sous-groupe A est exactement l'image de $\pi_1(X'_1, x_0)$ dans $\pi_1(X(\mathbb{R}), x_0)$ par l'application i_* induite par l'inclusion. Il est de plus isomorphe à $\pi_1(X'_1, x_0)$ via cette application. (cf section 3.6)

3.5 Algorithme de Dehn et démonstration du lemme 3

Pour démontrer le lemme 3, on aura besoin d'un résultat de théorie combinatoire des groupes, concernant l'annulation d'un mot dans un groupe décrit par générateurs et relations (*problème du mot*). Dans le cas du groupe fondamental d'une surface, ce problème se résout facilement grâce à l'algorithme de Dehn ([13, §6.1]), que je vais expliciter.

Soit S une surface fermée, obtenue en identifiant deux-à-deux les côtés d'un $2n$ -gone, dans lequel tous les sommets sont identifiés en un seul point x_0 . On note $\pi = \pi_1(S, x_0)$, et $\{c_1, \dots, c_n\}$ les éléments de π correspondant aux côtés orientés du polygone. Le groupe π admet alors la présentation suivante :

$$\pi = \langle c_1, \dots, c_n \mid R = 1 \rangle,$$

où R est un des mots obtenus en tournant une fois autour du polygone (pour un exemple, voir ci-dessous la démonstration du lemme 3). Le théorème suivant nous donne une manière effective de savoir si un élément de π , donné en fonction de ses générateurs, est trivial.

Théorème 7 (Algorithme de Dehn) : *Soit α est un mot réduit en les $c_i^{\pm 1}$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de simplification triviale du type $c_i c_i^{-1}$ ou $c_i^{-1} c_i$. Supposons que $\alpha = 1$ dans π . Alors α contient un sous-mot de longueur au moins $2n - 2$ d'une permutation cyclique de R ou R^{-1} .*

Remarque : Ce théorème est énoncé sous une forme plus faible dans [13, §6.1] (α contient un sous-mot de longueur $> \frac{|R|}{2}$), mais la démonstration qui en est faite, via la construction du revêtement universel de S , implique clairement la forme forte énoncée ci-dessus.

Démonstration (du lemme 3) : Les lacets $\{a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$ de la surface X'_1 peuvent être obtenus comme les côtés d'un dodécagone sur lequel on a fait les identifications suivantes (pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème de Van Kampen) :

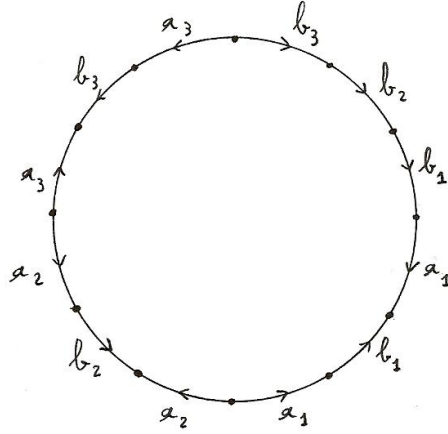


FIG. 3.5 – La surface $X'(\mathbb{R})$ vue comme le quotient d'un polygone

Ainsi le groupe π admet la présentation suivante :

$$\pi = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid R = 1 \rangle$$

où $R = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} b_2^{-1} b_3^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1}$.

Soit $\alpha \in \pi$ tel que $\alpha A \alpha^{-1} = A$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\alpha \notin A$. On écrit α comme un mot en les $a_i^{\pm 1}$ et $b_i^{\pm 1}$, qui est réduit. On suppose que ce mot est de longueur minimale parmi toutes les écritures réduites possibles. Quitte à lui enlever des $a_i^{\pm 1}$ au début et à la fin (ce qui ne change en rien l'hypothèse $\alpha A \alpha^{-1} = A$), on va également supposer qu'il commence et qu'il termine par un $b_i^{\pm 1}$ (pas forcément le même).

Notons i_0 l'indice du $b_i^{\pm 1}$ par lequel il termine. Soit $j_0 \neq i_0$. Comme $\alpha A \alpha^{-1} = A$, il existe $w \in A$ tel que $w \alpha a_{j_0} \alpha^{-1} = 1$. On considère w comme

un mot en les $a_i^{\pm 1}$, écrit de manière réduite. Le mot $w\alpha a_{j_0}\alpha^{-1}$ est alors lui aussi réduit, donc d'après l'algorithme de Dehn, il existe un sous-mot β de $w\alpha a_{j_0}\alpha^{-1}$, facteur de longueur au moins 10 d'une permutation cyclique de R ou R^{-1} .

Comme la dernière lettre de α est $b_{i_0}^{\pm 1}$ et que cette lettre n'est jamais à côté de a_{j_0} dans les permutations cycliques de R ou R^{-1} , alors β ne peut pas être à cheval sur α et a_{j_0} , ni sur a_{j_0} et α^{-1} .

Ainsi, β est ou bien un facteur de $w\alpha$, ou bien un facteur de α^{-1} . Quitte à changer β en β^{-1} , on peut supposer que β est un facteur de $w\alpha$. On écrit alors $\beta = w'\alpha'$, où w' est un facteur (éventuellement vide) de w et α' un facteur (éventuellement vide) de α . Puisque au plus deux $a_i^{\pm 1}$ se suivent dans les permutations cycliques de R ou R^{-1} , alors $|w'| \leq 2$, donc $|\alpha'| \geq 8$. α' est lui aussi un facteur d'une certaine permutation cyclique r de R ou R^{-1} : il existe donc δ , de longueur inférieure à 4, tel que $\delta\alpha' = r$. Dans α , on peut alors remplacer α' par δ^{-1} , qui est de longueur strictement inférieure : ceci contredit l'hypothèse de minimalité de $|\alpha|$. \square

3.6 Fin de la démonstration du théorème 5

Revenons maintenant à notre problème : on a un difféomorphisme \tilde{g} , qui induit sur $\pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$ un automorphisme intérieur. On a montré que l'élément α par lequel on conjugue peut en fait être représenté par un lacet dans X'_1 .

Regardons l'application $i : X'_1 \rightarrow X'(\mathbb{R})$ définie par l'inclusion. Cette application induit un morphisme au niveau des groupes fondamentaux

$$i_* : \pi_1(X'_1, x_0) \rightarrow \pi = \pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0).$$

Lemme 4 : *Le morphisme i_* est injectif.*

Démonstration : $\pi_1(X'_1, x_0)$ est le groupe libre engendré par les lacets γ_1 , γ_2 et γ_3 dessinés sur la figure 3.6. Le morphisme i_* envoie γ_1 sur a_1 , γ_2 sur $a_1^{-1}a_2$ et γ_3 sur $a_2^{-1}a_3$. Le sous-groupe de π engendré par ces trois éléments est le sous-groupe $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, qui est un groupe libre à trois générateurs : en effet, d'après l'algorithme de Dehn, le seul mot réduit en les $a_i^{\pm 1}$ qui est trivial est le mot vide. On en déduit que $i_*(\gamma_1)$, $i_*(\gamma_2)$ et $i_*(\gamma_3)$ sont sans relation non triviale dans π , et donc le morphisme i_* est injectif. \square

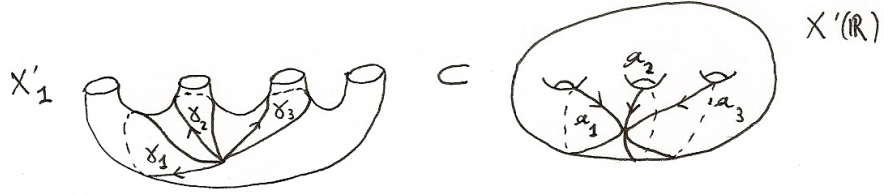


FIG. 3.6 – Les lacets γ_1 , γ_2 et γ_3 de X'_1 sont envoyés sur les lacets a_1 , $a_1^{-1}a_2$ et $a_2^{-1}a_3$ de $X'(\mathbb{R})$

Soit $\gamma \in \pi_1(X'_1, x_0)$. Dans $\pi_1(X'(\mathbb{R}), x_0)$, on a la relation $\tilde{g}_*(\gamma) = \alpha\gamma\alpha^{-1}$. Comme i_* est injectif, cette relation est également vraie dans $\pi_1(X'_1, x_0)$. Ainsi, \tilde{g} induit un automorphisme intérieur sur $\pi_1(X'_1, x_0)$. D'après le théorème de Dehn-Nielsen-Baer, g induit donc l'élément neutre dans $MCG(X'_1)$.

On en déduit, par déformation, que g est envoyé sur l'élément neutre de $MCG(\mathbb{S}_4^2)$ (car on peut suivre la déformation pour transporter une isotopie de X'_1 dans \mathbb{S}_4^2). Mais comme $G \rightarrow MCG(\mathbb{S}_4^2)$ est injectif (cf proposition 7), alors $g = 1$. On a ainsi montré que le morphisme $G \rightarrow MCG(X'(\mathbb{R}))$ est injectif. \square

Pour une petite déformation réelle générique, le groupe G est égal à celui des automorphismes réels de X' (théorème 3). On en déduit que le morphisme $Aut_{\mathbb{R}}(X') \rightarrow MCG(X'(\mathbb{R}))$ est injectif. Ceci prouve le théorème 1.

Bibliographie

- [1] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A.M. Peters, and Antonius Van De Ven. *Compact Complex Surfaces*. Springer, 2003.
- [2] Joan S. Birman. *Links, Braids and Mapping Class Groups*. Princeton University Press, University of Tokyo Press, 1975.
- [3] Serge Cantat. Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux. Existence, exemples, rigidité. http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Articles/etats_cantat.pdf.
- [4] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces K3. *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.
- [5] Serge Cantat. Sur la dynamique du groupe d’automorphismes des surfaces K3. *Transform. Groups*, 6(3) :201–214, 2001.
- [6] Serge Cantat and Frank Loray. Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and Character Varieties. Prépublication, novembre 2007.
- [7] A. Degtyarev, Ilia V. Itenberg, and Viatcheslav Kharlamov. *Real Enriques Surfaces*. Number 1746 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2000.
- [8] Philip A. Griffiths and Joseph Daniel Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, 1978.
- [9] Nikolai V. Ivanov. Mapping Class Groups. In R. J. Daverman and R. B. Sher, editors, *Handbook of Geometric Topology*, chapter 12, pages 523–633. North-Holland, 2002.
- [10] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, 1977.
- [11] Curtis McMullen. Algebra and Dynamics. <http://www.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/class/harvard/275/pn/pn.pdf>, 2004.
- [12] Robert Silhol. *Real Algebraic Surfaces*. Number 1392 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.

- [13] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [14] Lan Wang. *Rational Points and Canonical Heights on Varieties with many Elliptic Fibrations*. PhD thesis, Harvard University, 1994.
- [15] Lan Wang. Rational Points and Canonical Heights on K3-surfaces in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. *Contemporary Mathematics*, 186 :273–289, 1995.
- [16] Heiner Zieschang. *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*. Number 875 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1981.
- [17] Heiner Zieschang, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*. Number 835 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.