

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE  
MASTER DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
MENTION MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

**Bornes sur les degrés dynamiques  
d'automorphismes de variétés  
kähleriennes : généralités et  
analyse du cas de la dimension 3**

23 septembre 2013

MÉMOIRE FINAL DE MASTER 2  
"MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES"

**Federico Lo Bianco**

Directeur de stage  
**Serge Cantat**  
École Normale Supérieure,  
rue d'Ulm



# Préface

Le but de ce mémoire est une étude de l'action des automorphismes  $f$  d'une variété compacte de Kähler  $X$  sur les espaces de cohomologie de  $X$  ; en particulier on s'intéresse aux degrés dynamiques des automorphismes, qui fournissent une description cohomologique de l'entropie topologique de ces automorphismes.

On rappelle que, pour une variété de Kähler, on a la décomposition de Hodge

$$H^n(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X, \mathbb{C}),$$

où  $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$  est l'ensemble des classes de cohomologie de type  $(p, q)$ .

**Définition.** *Si  $X$  est une variété compacte de Kähler et  $f \in \text{Aut}(X)$ , le  $p$ -ième degré dynamique  $\lambda_p(f)$  de  $f$  est le rayon spectral de l'application linéaire induite en cohomologie*

$$f_{p,p}^* : H^{p,p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{p,p}(X, \mathbb{R}),$$

où  $H^{p,p}(X, \mathbb{R}) := H^{p,p}(X, \mathbb{C}) \cap H^{2p}(X, \mathbb{R})$ .

Grâce à l'invariance par  $f^*$  des cônes des classes positives et fortement positives, on montre que le degré dynamique  $\lambda_p(f)$  est une valeur propre pour  $f_{p,p}^*$ . On montre aussi que  $\lambda_p(f)$  est le rayon spectral de l'application

$$f_p^* : H^{2p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{R}),$$

ce qui nous permet d'exploiter la structure entière des espaces de cohomologie.

On cherche en particulier des contraintes sur le premier degré dynamique non trivial  $\lambda_1(f)$  qui soient dépendentes de la dimension de la variété  $X$  mais pas de la dimension de l'espace de cohomologie  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

Le cas où  $X$  est de dimension 2 est bien connu, et sera traité dans le chapitre 5. La partie originale de ce mémoire consiste en l'analyse du cas de la dimension 3 (chapitres 6, 7 et 8).

Les outils fondamentaux sont

- le Théorème de l'indice de Hodge (Théorème 1.1.1), qui permet de conclure que, si  $u, v \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$  ne sont pas colinéaires, alors les éléments  $u \wedge \bar{u}, u \wedge \bar{v}$  et  $v \wedge \bar{v}$  de  $H^{2,2}(X, \mathbb{C})$  ne peuvent pas être tous nuls (Corollaire 1.1.2);
- la dualité de Serre (Théorème 1.2.1), qui nous dit que les valeurs propres de

$$f_{2,2}^* : H^{2,2}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{2,2}(X, \mathbb{C})$$

sont exactement les inverses des valeurs propres de

$$f_{1,1}^* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{C}).$$

On a d'abord un résultat sur les automorphismes  $f$  tels que  $f^*$  (ou l'un de ses itérés) soit unipotent : dans ce cas on montre que le bloc de Jordan de dimension maximale est unique et de dimension au plus 5 (Corollaire 6.2.3 et Proposition 6.2.4).

Pour traiter le cas de  $f^*$  semi-simple, on définit d'abord le rang  $r(f)$  du groupe algébrique  $A$  engendré par  $f^*$  dans  $GL(H^2(X, \mathbb{R}))$  : on montre que, à un sous-groupe d'indice fini près, on a un isomorphisme de groupes de Lie

$$A \cong (\mathbb{R}^+)^{r(f)} \times (S^1)^{s(f)}$$

pour des entiers  $r(f), s(f) \geq 0$ . Le rang  $r(f)$  est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire les modules des valeurs propres de  $f^*$ .

On développe ensuite une théorie des caractères : les modules des valeurs propres induisent des applications  $A \rightarrow \mathbb{R}^+$ . On peut ignorer la partie de torsion  $(S^1)^{s(f)}$  et appliquer l'isomorphisme exponentiel pour obtenir des applications linéaires  $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , qu'on va appeler les poids de  $f^*$ , et on arrive à montrer le Théorème suivant (Théorème 7.0.9).

**Théorème.** *Si  $X$  est une variété compacte de Kähler de dimension 3 et  $f \in \text{Aut}(X)$ , alors  $r(f) \leq 2$ .*

Via une analyse séparée des deux cas on arrive à décrire d'un côté la structure de l'ensemble des modules des valeurs propres de  $f^*$  et, de l'autre côté, les propriétés des conjugués sur  $\mathbb{Q}$  de  $\lambda_1(f)$ . Les deux résultats principaux sont les Théorèmes suivants (voir les Théorèmes 7.2.1 et 7.2.2 pour une analyse plus précise des situations possibles).

**Théorème.** *Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $f^*: H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que*

$$|\lambda|^{(-2)^n} \in \{1, \lambda_1(f), \lambda_2(f)^{-1}, \lambda_1(f)^{-1}\lambda_2(f)\}.$$

**Théorème.** *Les conjugués sur  $\mathbb{Q}$  de  $\lambda_1(f)$  ont tous pour module l'un des six nombres listés ci-dessous :*

$$\begin{aligned} &\lambda_1(f), \quad \lambda_2(f)^{-1}, \quad \lambda_1(f)^{-1}\lambda_2(f), \\ &\sqrt{\lambda_1(f)^{-1}}, \quad \sqrt{\lambda_2(f)}, \quad \sqrt{\lambda_1(f)\lambda_2(f)^{-1}}. \end{aligned}$$

L'esprit étant que les situations les plus compliquées peuvent se rencontrer sur les tores complexes, on cherche des exemples qui montrent l'optimalité de ces deux énoncés. L'analyse de ces exemples n'est pas encore complète.

## Détail des chapitres

Le chapitre 1 est dédié à la présentation des différents outils qu'on va utiliser dans les autres chapitres : d'abord on énonce le théorème de l'indice de Hodge, qu'on va utiliser principalement pour montrer que le produit extérieur ne peut pas s'annuler sur un sous espace de dimension au moins 2 de  $H^2(X, \mathbb{C})$  ; on discute la dualité de Serre pour les espaces de cohomologie ; on analyse le comportement asymptotique d'automorphismes linéaire ; on présente des résultats sur les automorphismes linéaires de  $\mathbb{R}^n$  qui préservent un cône fermé saillant d'intérieur non vide, et on va les appliquer aux applications linéaires induites à niveau de  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  par un automorphisme de  $X$ , qui préservent l'adhérence du cône de formes de Kähler ; finalement on définit et présente les premières propriétés des formes positives et fortement positives, qui généralisent les formes de Kähler dans  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ , avec  $p$  générique. La plus part des résultats dans ce chapitre sont sans preuve.

Dans le chapitre 2 on traite les degrés dynamiques : on donne la définition, un lien avec l'entropie topologique de  $f$  (sans preuve) et les premières propriétés, en particulier que, pour analyser le comportement asymptotique de l'action de  $f^*$  sur  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ , il suffit de regarder son comportement sur les puissances d'une classe de Kähler quelconque ; on continue en montrant une propriété de concavité des degrés asymptotiques, qui a été montrée par Gromov ; finalement on montre que, si le premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  est

égal à 1, alors tous les autres degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$  sont égaux à 1, et donc l'entropie topologique de  $f$  est nulle.

Dans le chapitre 3 on présente les résultats de Dinh et Sibony dans [8] sur les groupes commutatifs d'automorphismes de  $X$  : on arrive à montrer qu'un tel groupe peut être décomposé en le produit d'une partie à entropie nulle avec une partie à entropie strictement positive, que cette dernière est un groupe libre, et on donne une borne supérieure à son rang qui ne dépend que de la dimension de  $X$ .

À partir du chapitre 4 on se concentre sur l'action d'un seul automorphisme de  $X$  sur la cohomologie. On définit le groupe algébrique  $A$  engendré par  $f^*$ , et on donne ses propriétés fondamentales ; en particulier on énonce un théorème classique qui affirme que  $A$  se décompose en le produit de sa partie semi-simple avec sa partie unipotente ; ensuite on analyse la partie semi-simple  $A_s$ , qu'on va regarder comme groupe de Lie réel pour donner une décomposition

$$A_s \equiv (\mathbb{R}^+)^r \times (S^1)^s.$$

On définit ainsi le rang  $r(f)$  de l'application  $f^*$ .

Dans le chapitre 5 on traite le cas bien connu des surfaces complexes : on suppose que  $X$  soit de dimension 2. On montre que, si  $f^*$  est unipotent, alors soit  $f^*$  est périodique soit la croissance de la norme de  $(f^*)^n$  est du type  $c^{te}n^2$  ; si  $f^*$  est semi-simple, on montre que le degré dynamique  $\lambda_1(f)$  est soit un nombre quadratique soit un nombre de Salem, et que les seules valeurs propres de  $f^*$  de module différent de 1 sont  $\lambda_1(f)$  et  $\lambda_1(f^{-1})^{-1}$  ; finalement, on exclut le cas mixte, où  $f^*$  n'est ni unipotente ni semi-simple.

Les derniers trois chapitres constituent la partie originale de ce mémoire : l'analyse du cas où  $X$  est de dimension 3.

Dans le chapitre 6 on introduit le problème et on traite le cas de  $f^*$  unipotente : on arrive à montrer que  $f^*$  possède un unique bloc de Jordan de dimension maximale  $k$ , que  $k \leq 5$ , et que tous les autres blocs de Jordan sont de dimension au plus  $(k+1)/2$  (donc au plus 3). Des exemples sur les tores complexes garantissent l'optimalité des ces énoncés.

Dans le chapitre 7 on traite le cas de  $f^*$  semi-simple : on introduit une théorie des caractères, on montre que les modules des valeurs propres de  $f^*$  peuvent être décrits par  $r \leq 2$  paramètres, et on traite les deux cas  $r = 2$  et  $r = 1$  séparément. Dans les deux cas, on se concentre d'abord sur la description de toutes les valeurs propres de la restriction de  $f^*$  à  $H^2(X, \mathbb{C})$  ; ensuite on utilise des applications basiques de théorie de Galois pour montrer

des propriétés arithmétiques des diverses valeurs propres, en particulier de  $\lambda_1(f)$  (et donc, par dualité, de  $\lambda_1(f^{-1})^{-1} = \lambda_2(f)^{-1}$ ).

D'un côté on arrive à montrer (Théorème 7.2.1) que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f^* : H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$  de module différent de 1, alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$|\lambda|^{(-2)^n} \in \{\lambda_1(f), \lambda_2(f)^{-1}, \lambda_1(f)^{-1}\lambda_2(f)\}.$$

Du côté algébrique, on montre que  $\lambda_1(f)$  possède conjugués ayant au plus 6 modules distincts (dont trois sont supérieurs à 1 et trois inférieurs à 1), et on peut ultérieurement préciser les situations possibles (voir le Théorème 7.2.2); en particulier, si  $r(f) = 2$ , toute valeur propre de  $f^*$  a conjugués ayant au plus 6 modules distincts.

On conclut le chapitre avec des exemples sur les tores, qui montrent que (presque) toutes les situations possibles décrites par le Théorème 7.2.2 sont effectivement réalisées.

Dans le chapitre 8 on traite le cas de  $f^*$  mixte (ni semi-simple ni unipotente). À différence ducas de la dimension 2, on n'arrive pas à exclure complètement cette situation; cependant, on montre que pour que  $f^*$  soit dans le cas mixte, il faut que  $r(f) = 1$  et que  $\lambda_1(f) \in \{\lambda_2(f)^2, \lambda_2(f)^{1/2}\}$ . On montre aussi que, si par exemple  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$  les valeurs propres qui peuvent avoir blocs de Jordan non triviaux sont  $\lambda_2(f)^{-1}$  est ceux de module  $\lambda_1(f)^{1/4}$  (voir le Théorème 8.0.5).





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et outils</b>	<b>11</b>
1.1	Théorème de l'indice de Hodge . . . . .	11
1.2	Dualité de Serre . . . . .	12
1.3	Croissance asymptotique d'applications linéaires . . . . .	13
1.4	Automorphismes et cônes invariants . . . . .	16
1.5	Formes positives . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Degrés dynamiques</b>	<b>23</b>
2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	23
2.2	Concavité et conséquences sur $\lambda_1(f)$ . . . . .	26
2.3	Automorphismes d'entropie nulle . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Groupes commutatifs d'automorphismes</b>	<b>33</b>
3.1	Théorème de l'indice de Hodge généralisé . . . . .	34
3.2	Groupes commutatifs d'entropie positive . . . . .	37
3.3	Preuve du cas général . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Le groupe algébrique engendré par <math>f^*</math></b>	<b>45</b>
4.1	Partie semi-simple . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Dimension 2</b>	<b>51</b>
5.1	Cas unipotent . . . . .	52
5.2	Cas semi-simple . . . . .	53
5.3	Cas mixte . . . . .	54
5.4	Exemples sur les tores . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Dimension 3 : introduction et cas unipotent</b>	<b>59</b>
6.1	Introduction . . . . .	59

6.2	Cas unipotent . . . . .	60
6.2.1	Borne sur le degré dynamique polynômial . . . . .	60
6.2.2	Borne sur la dimension des blocs non maximaux . . . . .	63
6.2.3	Exemples unipotents sur les tores . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Dimension 3 : cas semi-simple</b>	<b>67</b>
7.1	Les poids de $f^*$ : définition, premières propriétés et poids maximaux . . . . .	68
7.2	Résultats principaux . . . . .	73
7.3	Introduction à l'arithmétique de $f^*$ . . . . .	75
7.4	Le cas $r(f) = 2$ . . . . .	77
7.4.1	La structure de $L$ . . . . .	77
7.4.2	Propriétés algébriques de $\Lambda$ . . . . .	80
7.4.3	Propriétés arithmétiques de $\lambda_1(f)$ . . . . .	83
7.5	Le cas $r(f) = 1$ . . . . .	90
7.5.1	La structure de $L$ . . . . .	90
7.5.2	Propriétés arithmétiques de $\lambda_1(f)$ . . . . .	91
7.6	Exemples semi-simples sur les tores . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Dimension 3 : cas mixte</b>	<b>99</b>

# Chapitre 1

## Introduction et outils

On considère une variété complexe compacte de Kähler  $(X, \omega)$  de dimension  $d$  et un automorphisme  $f: X \rightarrow X$ . En cohomologie de de Rham,  $f$  induit une transformation linéaire  $f^*: H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$ , qui préserve la décomposition de Hodge

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \quad H^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \overline{H^{q,p}(X, \mathbb{C})}.$$

On s'intéresse à la croissance asymptotique (une norme matricielle étant fixée) de la restriction de  $f^*$  à  $H^{p,p}(X, \mathbb{C}) \cap H^{2p}(X, \mathbb{R}) =: H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  (les éléments de  $H^{p,p}(X, \mathbb{C})$  fixés par conjugaison complexe), et en particulier à sa restriction à  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

Dans ce chapitre on va voir les outils fondamentaux qu'on va utiliser dans les chapitres suivants.

### 1.1 Théorème de l'indice de Hodge

On rappelle la définition du produit d'intersection sur  $H^2(X, \mathbb{R})$  :

$$Q: H^2(X, \mathbb{R}) \times H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{d-2}.$$

On note encore  $Q$  le produit hermitien induit sur  $H^2(X, \mathbb{C})$  :

$$Q: H^2(X, \mathbb{C}) \times H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{d-2}.$$

**Théorème 1.1.1** (de l'indice de Hodge). *La restriction du produit  $Q$  à  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$  est de signature  $(1, N - 1)$ , où  $N = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ , et sa restriction à  $H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C})$  est définie négative.*

*En particulier, comme la décomposition de Hodge*

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C})$$

*est orthogonale par rapport au produit  $Q$ , la signature du produit scalaire  $Q$  sur  $H^2(X, \mathbb{R})$  (et du produit hermitien  $Q$  sur  $H^2(X, \mathbb{C})$ ) est  $(1, N' - 1)$ , où  $N' = \dim_{\mathbb{R}}(H^2(X, \mathbb{R}))$ .*

La plus part des fois on ne va utiliser le Théorème de l'indice de Hodge que par le Corollaire suivant.

**Corollaire 1.1.2.** *Le produit scalaire  $Q$  est différent de 0 sur chaque sous-espace vectoriel  $V \subseteq H^2(X, \mathbb{R})$  de dimension réelle au moins 2 ; en particulier, si  $u, v \in H^2(X, \mathbb{R})$  sont linéairement indépendants et  $u \wedge v = 0$ , alors  $v \wedge v \neq 0$ .*

*De la même façon, le produit hermitien  $Q$  est différent de 0 sur chaque sous-espace vectoriel  $W \subseteq H^2(X, \mathbb{C})$  de dimension complexe au moins 2 ; en particulier, si  $u, v \in H^2(X, \mathbb{C})$  sont linéairement indépendants et  $u \wedge \bar{u} = u \wedge \bar{v} = 0$ , alors  $v \wedge \bar{v} \neq 0$ .*

## 1.2 Dualité de Serre

Dans ce paragraphe on énonce le Théorème de dualité de Serre, qui implique des contraintes fortes sur l'action de  $f^*$  sur  $H^*(X, \mathbb{R})$  : en particulier, on peut déduire l'action de  $f^*$  sur  $H^n(X, \mathbb{R})$  à partir de celle sur  $H^{2d-n}(X, \mathbb{R})$ .

**Théorème 1.2.1** (dualité de Serre). *Soit  $X$  une variété complexe compacte de dimension  $d$ ,  $0 \leq p, q \leq n$ . Alors l'accouplement*

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \times H^{d-p, d-q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

### 1.3. CROISSANCE ASYMPTOTIQUE D'APPLICATIONS LINÉAIRES 13

induit un isomorphisme  $H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H^{d-p,d-q}(X, \mathbb{C})^\vee$ .

En particulier le même accouplement induit des isomorphismes

$$H^n(X, \mathbb{C}) \cong H^{2d-n}(X, \mathbb{C})^\vee \quad H^n(X, \mathbb{R}) \cong H^{2d-n}(X, \mathbb{R})^\vee.$$

**Corollaire 1.2.2.** *Si  $X$  est comme dans le Théorème 1.2.1 et  $f: X \rightarrow X$  est un automorphisme de  $X$ , alors, pour tout  $0 \leq p \leq n$ , la restriction*

$$f_{d-p,d-q}^*: H^{d-p,d-q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{d-p,d-q}(X, \mathbb{C})$$

est duale (via dualité de Serre) de la restriction

$$(f_{p,q}^*)^{-1}: H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

En particulier la restriction

$$f_{2d-n}^*: H^{2d-n}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2d-n}(X, \mathbb{R})$$

est la duale (par dualité de Serre) de la restriction

$$(f_n^*)^{-1}: H^n(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{R}).$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha \in H^{p,q}(X)$  et  $\beta \in H^{n-p,n-q}(X) \cong H^{p,q}(X)^\vee$ ; on note encore  $\beta$  l'application linéaire induite par  $\beta$  sur  $H^{p,q}(X)$ . Alors on a

$$f^*(\beta)(\alpha) = \int_X f^*\beta \wedge \alpha = \int_X \beta \wedge (f^*)^{-1}\alpha = \beta((f^*)^{-1}\alpha),$$

et donc  $f_{d-p,d-q}^* = ((f_{p,q}^*)^{-1})^\vee$ . □

## 1.3 Croissance asymptotique d'applications linéaires

Dans ce paragraphe on analyse le comportement asymptotique des itérés d'une application linéaire  $T \in \text{GL}(V)$ , où  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie.

Pour cela on fixe une norme matricielle  $\|\cdot\|$  sur  $\text{GL}(V)$ . Il suffit de considérer le cas où la forme de Jordan de  $T$  est constituée par un unique bloc :

autrement dit, pour une base adéquate  $v_1 \dots v_k$  de  $V$ ,  $T$  est représenté par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à  $T^n$  est

$$M^n = \begin{pmatrix} Q_0(n) & Q_1(n) & Q_2(n) & \dots & Q_{k-1}(n) \\ 0 & Q_0(n) & Q_1(n) & \dots & Q_{k-2}(n) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q_0(n) & Q_1(n) \\ 0 & \dots & & 0 & Q_0(n) \end{pmatrix},$$

où les  $Q_i$  respectent la formule réursive

$$Q_{i+1}(n+1) = \lambda Q_{i+1}(n) + Q_i(n) \quad \text{pour } i = 0, \dots, k-2$$

$$Q_0(0) = 1, \quad Q_1(0) = \dots = Q_{k-1}(0) = 0.$$

Notons  $P_i(n) = Q_i(n)/\lambda^{n-i}$ ; alors

$$P_{i+1}(n+1) = P_{i+1}(n) + P_i(n), \quad \text{pour } i = 0, \dots, k-2 \quad (1.1)$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = \dots = P_{k-1}(0) = 0.$$

**Proposition 1.3.1.** 1. Pour tout  $i$ ,  $P_i$  est un polynôme de degré  $i$ ;

2. si  $a_i$  est le coefficient dominant de  $P_i$ , on a

$$a_i = \frac{1}{i!}.$$

En particulier pour  $n \rightarrow +\infty$  on a

$$Q_i(n) \sim \frac{1}{i!} \lambda^{n-i} n^i$$

et donc

$$\|T^n\| \sim c^{te} |\lambda|^n n^{k-1}.$$

### 1.3. CROISSANCE ASYMPTOTIQUE D'APPLICATIONS LINÉAIRES 15

*Démonstration.* L'égalité (1.1) appliquée  $n$  fois donne

$$P_{i+1}(n) = \sum_{h=0}^{n-1} P_i(h).$$

Pour conclure on va raisonner par récurrence en utilisant le Lemme suivant.

**Lemme 1.3.2.** *Pour tout nombre naturel  $m$ ,*

$$\sum_{h=0}^{n-1} h^m = p_m(n),$$

où  $p_m$  est un polynôme de degré  $m+1$  dont le coefficient dominant est  $1/m+1$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $m$ .

$$\begin{aligned} n^{m+1} &= \sum_{h=0}^{n-1} ((h+1)^{m+1} - h^{m+1}) = \\ &= (m+1)p_m(n) + \binom{m+1}{2} p_{m-1}(n) + \dots + (m+1)p_1(n) + p_0(n), \end{aligned}$$

et on conclut aisément.  $\square$

On montre les énoncés par récurrence. Partons du cas  $i = 1$  :  $P_1$  satisfait la récurrence

$$P_1(n+1) = P_1(n) + 1,$$

et donc, comme  $P_1(0) = 0$ , on a  $P_1(n) = n$ .

Maintenant, supposons qu'on ait montré que  $P_i(n)$  est un polynôme de degré  $i$  en  $n$ , avec coefficient dominant  $a_i = 1/i!$  :  $P_i(n) = \sum_{j=0}^i \alpha_j n^j$  avec  $\alpha_i = a_i$ .

Alors

$$P_{i+1}(n) = \sum_{h=0}^{n-1} P_i(h) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \alpha_j h^j = \sum_{j=0}^i \alpha_j \sum_{h=0}^{n-1} h^j = \sum_{j=0}^i \alpha_j p_j(n).$$

Or, d'après le Lemme 1.3.2, les  $p_j$  sont polynômes de degré  $j+1$ ; donc  $P_{i+1}$  est la somme d'un polynôme de degré  $i+1$  avec des polynômes de degré inférieur; donc  $P_{i+1}$  est un polynôme de degré  $i+1$ , et son coefficient dominant est  $a_i$  fois le coefficient dominant de  $p_i$ , c'est-à-dire

$$a_{i+1} = \frac{a_i}{i+1} = \frac{1}{(i+1)!}.$$

.

$\square$

**Corollaire 1.3.3.** *Pour  $n \rightarrow +\infty$  on a*

$$Q_i(n) \sim \frac{1}{i!} \lambda^{n-i} n^i$$

et donc

$$\|T^n\| \sim e^{te} |\lambda|^n n^{k-1}.$$

## 1.4 Automorphismes et cônes invariants

On présente un résultat sur le comportement de cônes convexes invariants par un isomorphisme de  $\mathbb{R}^N$  dû à Birkhoff. On est intéressé en particulier au cas où  $C$  est l'adhérence du cône des formes de Kähler, invariant par  $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ , ou, plus généralement, l'adhérence dans  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  du cône des  $(p, p)$ -formes strictement positives.

La preuve du Théorème 1.4.1 est prise de [3].

**Théorème 1.4.1** (Birkhoff). *Fixons une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $T$  un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^N$  de rayon spectral  $\lambda$ , et soit  $C \subset V$  un cône convexe saillant (i.e.  $C \cap -C = \{0\}$ ) fermé d'intérieur non vide tel que  $f(C) \subset C$ . Alors*

1. *il existe  $c_0 \in C$  tel que  $Tc_0 = \lambda c_0$ ; de plus, on peut choisir  $c_0$  de telle façon que son bloc de Jordan pour la valeur propre  $\lambda$  soit de dimension maximale parmi les blocs des valeurs propres de  $T$  ayant module  $\lambda$ ;*
2. *pour tout  $c \in \text{Int}(C)$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n c\|^{\frac{1}{n}} = \lambda;$$

3. *si  $\lambda = 1$ , alors pour tout  $c \in \text{Int}(C)$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|T^n c\|}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|T^n\|}{\log(n)} = h - 1,$$

où  $h$  est la dimension maximale des blocs de Jordan pour les valeurs propres de  $T$  de module 1.

*Démonstration.* On montre d'abord l'énoncé 1 : on construit un vecteur propre  $c_0 \in C$  de valeur propre  $\lambda$  et tel que le bloc de Jordan de  $c$  est maximal parmi les blocs des valeurs propres de module  $\lambda$ .



Fixons une base de Jordan  $v_1, \dots, v_N$  de  $\mathbb{C}^N$  : pour des indices  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N$  et des  $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  on a, pour tout  $k = 1, \dots, m$ ,

$$Tv_{i_k} = \lambda_k v_{i_k}, \quad Tv_{i_k+h} = \lambda_k v_{i_k+h} + v_{i_k+h-1} \quad h = 1, \dots, i_{k+1} - i_k - 1.$$

Les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $T$ , tous de module au plus  $\lambda$ .

Par le Corollaire 1.3.3 on a, pour tout  $k = 1, \dots, m$  et pour tout  $h = 0, \dots, i_{k+1} - i_k - 1$ ,

$$T^n v_{i_k+h} \sim \frac{1}{h! \lambda_k^h} \lambda_k^n n^h v_{i_k}. \quad (1.2)$$

Considérons un élément  $c$  de  $C$  tel que toutes les coordonnées de  $c$  dans la base  $v_1, \dots, v_N$  soient non nulles (un tel élément existe car  $C$  est d'intérieur non vide). Par la formule (1.2), la norme de  $T^n c$  n'est pas nulle, donc on peut considérer la suite  $w_n := T^n c / \|T^n c\|$ ; les  $w_n$  étant contenus dans l'ensemble compact  $S^{N-1} = \{v \in \mathbb{R}^N; \|v\| = 1\}$ , la suite doit admettre un point limite

$$c = \sum_{i=1}^m a_i v_i,$$

qui est contenu dans le cône  $C$  car  $C$  est invariant et fermé.

Grâce à la formule (1.2), on peut montrer facilement que les seuls coefficients de  $c$  non nuls sont les  $a_{i_k}$  tels que  $|\lambda_k| = \lambda$  et tels que la dimension du  $k$ -ième bloc de Jordan de  $T$  (c'est-à-dire  $i_{k+1} - i_k$ ) soit maximale parmi les dimensions des blocs pour valeurs propres de module  $\lambda$ .

Supposons maintenant que  $a_{i_k} \neq 0$  et  $\lambda_k \neq \lambda$ .

**Lemme 1.4.2.** *Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ , alors il existe  $r > 0$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0$  non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i z^i = 0.$$

Fixons, comme dans le Lemme,  $\alpha_1 \dots \alpha_r \geq 0$  non tous nuls tels que  $\sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$ , et soit

$$c' := \sum_{i=1}^r \alpha_i T^i c.$$

Alors  $c' \in C$  par invariance de  $C$ ,  $c' \neq 0$  car il est la somme d'éléments non tous nuls d'un cône convexe saillant, et la composante le long de  $v_{i_k}$  de  $c'$  est nulle.

En appliquant cet argument récursivement pour toutes les valeurs propres de module  $\lambda$  différents de  $\lambda$ , on obtient un vecteur  $c_0$  dont les seules composantes non nulles sont le long des  $v_{i_k}$  de valeur propre  $\lambda$  et correspondant à blocs de Jordan maximaux, et l'énoncé est ainsi prouvé.

Montrons maintenant l'énoncé 2.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $c \in \text{Int}(C)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n c\|^{\frac{1}{n}} \neq \lambda,$$

et soit  $c' \in C$  un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$ . Alors, pour  $\epsilon \ll 1$ ,  $c'' := c - \epsilon c'$  est un élément de  $C$  et, par la formule (1.2),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^n c''}{\|T^n c''\|} = -\frac{c'}{\|c'\|},$$

donc en particulier  $-c' \in C$ . C'est une contradiction car  $c'$  aussi est contenu dans  $C$  et  $C \cap -C = \{0\}$ .

Pour montrer l'énoncé 3, on prend  $T$  tel que  $\lambda = 1$  et on suppose par l'absurde qu'il existe  $c \in C$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T^n c\|}{\log(n)} \neq h - 1.$$

Par la formule (1.2) on a plus précisément

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T^n c\|}{\log(n)} < h - 1.$$

Soit  $v_1, \dots, v_h$  la base d'un bloc de Jordan pour la valeur propre 1 de dimension maximale  $h$  tel que  $v_1 \in C$  (un tel  $v_1$  existe par l'énoncé 1). Pour  $\epsilon \ll 1$  on a  $c' := c - \epsilon v_h \in C$ , et, par la formule (1.2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^n c'}{\|T^n c'\|} = -\frac{v_1}{\|v_1\|} \neq 0,$$

donc en particulier  $-v_1 \in C$ , ce qui est absurde car  $v_1 \in C$ . □

Si on est dans la situation du Théorème 1.4.1 et si de plus  $T$  est unipotent, on peut préciser la structure des blocs de Jordan de  $T$ . La preuve est prise de [11].

**Proposition 1.4.3.** *Soient  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $C \subset V$  un cône convexe saillant fermé d'intérieur non vide,  $T \in \text{GL}(V)$  un automorphisme unipotent tel que  $T(C) = C$ .*

*Alors le polynôme minimal de  $T$  est de la forme*

$$p(X) = (X - 1)^k$$

*avec  $k$  impair ; autrement dit, le bloc de Jordan maximal pour la valeur propre 1 est de taille impaire.*

*Démonstration.* Pour  $c \in \text{Int}(C)$  on a, par le Théorème 1.4.1,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T^n c\|}{\log n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\|T^n c\|}{\log |n|} = h - 1,$$

où  $h$  est la dimension du bloc de Jordan maximal de  $T$ .

Si  $h$  était pair, on aurait

$$c' := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^n c}{n^{h-1}} = - \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{T^n c}{|n|^{h-1}}.$$

En particulier  $c', -c' \in C$ , donc  $c' = 0$  car  $C$  est saillant, ce qui est absurde ; ainsi  $h$  est impair.  $\square$

## 1.5 Formes positives

On présente une introduction à la théorie des formes différentielles positives, qui peuvent être vues comme une généralisation des formes de Kähler. Pour une présentation complète avec les preuves des énoncés on renvoie à [6].

Considérons un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , et notons  $V^*$  son dual. On note  $\bigwedge^{p,q} V^* \subset \bigwedge^{p+q} V^*$  l'ensemble des  $(p, q)$ -formes.

Finalement, pour toute forme  $\alpha \in \bigwedge^{2n} V^*$  on écrit  $\alpha \geq 0$  si  $\alpha = k \cdot \text{vol}$ , où  $k$  est une constante positive et  $\text{vol}$  est la forme volume déterminée par l'orientation complexe.

**Définition 1.5.1.** *Une  $(p, p)$ -forme  $u \in \bigwedge^{p,p} V^*$  est dite*

*– positive si pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$*

$$u \wedge \alpha_1 \wedge i\bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-p} \wedge i\bar{\alpha}_{n-p} \geq 0.$$

– fortement positive si c'est une combinaison convexe

$$u = \sum_{s=1}^N \gamma_s \alpha_{s,1} \wedge i\bar{\alpha}_{s,1} \wedge \dots \wedge \alpha_{s,p} \wedge i\bar{\alpha}_{s,p} \quad \gamma_s \geq 0, \alpha_{s,i} \in V^*.$$

On énonce, sans les montrer, des propriétés basiques des formes positives et fortement positives.

**Proposition 1.5.2.** 1. *Toute forme fortement positive est positive ;*

2. *toute forme positive est réelle ;*

3.  $\bigwedge^{p,p} V^*$  *admet une base de formes fortement positives ;*

4.  $u \in \bigwedge^{p,p} V^*$  *est positive si et seulement si sa restriction à tout sous-espace*  $W \subset V$  *de dimension*  $p$  *est une forme volume non négative ;*

5. *pour*  $p = 0, 1, n-1, n$ , *les*  $(p, p)$ -*formes fortement positives coïncident avec les*  $(p, p)$ -*formes positives ;*

6. *une*  $(1, 1)$ -*forme réelle*  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  *est positive si et seulement si le produit scalaire associé sur l'espace tangent à*  $X$

$$(u, v) \mapsto \omega(u, iv)$$

*est semi-positif en tout point ;*

7. *un produit de formes fortement positives est une forme fortement positive ;*

8. *si*  $u \in \bigwedge^{p,p} V^*$  *est une forme fortement positive et*  $v \in \bigwedge^{q,q} V^*$  *est une forme positive, alors*  $u \wedge v \in \bigwedge^{p+q,p+q} V^*$  *est une forme positive ;*

9. *si*  $\phi: W \rightarrow V$  *est une application*  $\mathbb{C}$ -*linéaire et*  $u \in \bigwedge^{p,p} V^*$  *est une forme (fortement) positive, alors*  $\phi^*u \in \bigwedge^{p,p} W^*$  *est une forme (fortement) positive.*

Les  $(p, p)$ -formes positives et les  $(n-p, n-p)$ -formes strictement positives constituent des cônes convexes saillants  $C_p^+ \subset \bigwedge^{p,p} V^*(\mathbb{R})$  et  $C_{n-p}^\oplus \subset \bigwedge^{n-p,n-p} V^*(\mathbb{R})$ , où on note  $\bigwedge^{p,p} V^*(\mathbb{R})$  les éléments de  $\bigwedge^{p,p} V^*$  fixés par conjugaison complexe.

Ces cônes sont duaux l'un l'autre, c'est-à-dire

$$u \in C_p^+ \quad \Leftrightarrow \quad \forall v \in C_{n-p}^\oplus, u \wedge v \geq 0.$$

Il est facile de montrer que le bidual d'un cône convexe saillant  $C$  est  $\bar{C}$ , donc en effet

$$v \in C_{n-p}^\oplus \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in C_p^+, u \wedge v \geq 0.$$

**Lemme 1.5.3.** *Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $V'$  l'espace dual,  $C \subset V$  un cône convexe saillant d'intérieur non vide et  $C' \subset V'$  son cône dual.*

*Alors, pour tout  $c \in \text{Int}(C)$  et pour tout  $c' \in C'$ ,  $\langle c, c' \rangle > 0$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\langle c, c' \rangle = 0$  pour un  $c \in \text{Int}(C)$  et un  $c' \in C'$ . Soit  $v \in V$  tel que  $\langle v, c' \rangle > 0$ ; comme  $c \in \text{Int}(C)$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $c - \epsilon v \in C$ , mais

$$\langle c - \epsilon v, c' \rangle < 0,$$

ce qui est absurde par dualité.  $\square$

Vu le cas vectoriel, on va généraliser les notions qu'on a introduites aux variétés complexes; on ne va considérer par simplicité que les variétés de Kähler.

**Définition 1.5.4.** *Soit  $X$  une variété complexe de Kähler de dimension  $d$ . On dit qu'une  $(p, p)$ -forme  $\alpha$  est*

- positive si, pour toute  $(d - p, d - p)$ -forme  $\beta$  telle que la  $(d - p, d - p)$ -forme induite par  $\beta$  en tout point  $x \in X$  sur  $T_x X$  est strictement positive, on a  $\alpha \wedge \beta \geq 0$ ;
- fortement positive si, pour toute  $(d - p, d - p)$ -forme  $\beta$  telle que la  $(d - p, d - p)$ -forme induite par  $\beta$  en tout point  $x \in X$  sur  $T_x X$  est positive, on a  $\alpha \wedge \beta \geq 0$ .

*On dit qu'une classe  $\omega \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  est positive (respectivement, fortement positive) si elle peut être représentée par une forme positive (respectivement, fortement positive); on note  $\mathcal{K}_p^+$  et  $\mathcal{K}_p^\oplus$  le cône convexe saillant des classes positives et fortement positives respectivement.*

On peut traduire la Proposition 1.5.2 en la Proposition suivante.

**Proposition 1.5.5.** *1. Toute classe fortement positive est positive; autrement dit,*

$$\mathcal{K}_p^\oplus \subseteq \mathcal{K}_p^+;$$

- 2.  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  admet une base de classes strictement positives; autrement dit, le cône  $\mathcal{K}_p^\oplus$  a intérieur non vide. En particulier, si  $\omega_1, \dots, \omega_p \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  sont des formes de Kähler, alors*

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in \text{Int}(\mathcal{K}_p^\oplus);$$

3. pour  $p = 0, 1, d - 1, d$ , les classes fortement positives coïncident avec les classes positives ; autrement dit,

$$\mathcal{K}_p^\oplus = \mathcal{K}_p^+ \quad p = 0, 1, d - 1, d;$$

4.  $C_1^+ = C_1^\oplus$  est l'adhérence dans  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  du cône convexe des formes de Kähler ;
5. un produit de classes fortement positives est une classe fortement positive ;
6. si  $u \in C_p^\oplus$  et  $v \in C_q^+$ , alors  $u \wedge v \in C_{p+q}^+$  ;
7. si  $\phi: X \rightarrow Y$  est une application holomorphe entre variétés complexes et  $u \in H^{p,p}(Y, \mathbb{R})$  est une classe (fortement) positive, alors  $\phi^*u \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  est une classe (fortement) positive ;
8. les cônes convexes saillants  $C_p^+$  et  $C_{d-p}^\oplus$  sont duaux l'un de l'autre.

# Chapitre 2

## Degrés dynamiques

Dans ce chapitre on présente l'objet principal de notre étude : les degrés dynamiques d'un automorphisme  $f$  de  $X$ , qui décrivent, d'un point de vue cohomologique, les propriétés dynamiques (à voire l'entropie topologique) de  $f$ .

Après avoir défini les degrés dynamiques et avoir montré que, pour les calculer, il suffit de considérer l'action de  $f^*$  sur les puissances d'une forme de Kähler quelconque, on montre un résultat de concavité qui descend d'une inégalité due à Teissier et Khovanskii (Théorème 2.2.2), et des corollaires spécifiques au premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$ , sur lequel on va se concentrer dans la suite ; dans le dernier paragraphe on explore la situation où  $\lambda_1(f) = 1$  : on montre que alors  $\lambda_p(f) = 1$  pour tout  $p$ , et on définit les degrés dynamiques polynômiaux, qui décrivent le type de croissance polynômiale de la norme de  $(f^n)^*$ .

Pour une analyse plus générale, où  $f: X \rightarrow X$  peut être une application birationnelle quelconque, on renvoie à [5].

### 2.1 Définition et premières propriétés

On va introduire les degrés dynamiques d'un automorphisme.

**Définition 2.1.1.** *Le degré dynamique d'ordre  $p$  d'un automorphisme  $f$  d'une variété complexe est le rayon spectral de l'application induite*

$$f_{p,p}^*: H^{p,p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{p,p}(X, \mathbb{R}).$$

*Remarque 2.1.2.* Comme l'action de  $f^*$  sur  $H^0(X, \mathbb{R})$  et  $H^{2d}(X, \mathbb{R})$  est triviale, on a  $\lambda_0(f) = \lambda_d(f) = 1$ .

L'adjectif "dynamique" est motivé par le résultat suivant, qui lie l'entropie topologique de l'automorphisme  $f$  à son action sur la cohomologie.

**Théorème 2.1.3** (Yomdin-Gromov). *Si  $f$  est un automorphisme holomorphe d'une variété complexe  $X$  de dimension  $d$  et  $h(f)$  dénote l'entropie topologique de  $f$ , alors*

$$h(f) = \max\{\log(\lambda_p); p = 0, \dots, d\}.$$

*Remarque 2.1.4.* Le Corollaire 1.2.2 implique directement que

$$\lambda_p(f) = \lambda_{d-p}(f^{-1}).$$

En considérant une base de Jordan de  $f_{p,p}^* : H^{p,p}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,p}(X, \mathbb{C})$ , par le Corollaire 1.3.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f_{p,p}^n)^*\|^{\frac{1}{n}} = \lambda_p(f)$$

et plus précisément que

$$\|(f_{p,p}^n)^*\| \sim c^{te} n^{h-1} \lambda_p(f)^n,$$

où  $h$  est la dimension d'un bloc de Jordan pour une valeur propre de module  $\lambda_1(f)$  de dimension maximale. Pour les calculs précis, voir le paragraphe ?? et le Lemme 8.0.6.

Le premier résultat de ce paragraphe est que pour trouver les degrés dynamiques d'un automorphisme d'une variété kählérienne il suffit de regarder son action sur les formes de Kähler et leurs puissances.

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $f : X \rightarrow X$  un automorphisme holomorphe d'une variété complexe de Kähler.*

*Pour toute forme de Kähler  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  et pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ , on a*

$$\lambda_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(f^n)^* \omega^p\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X (f^n)^*(\omega^p) \wedge \omega^{d-p} \right)^{\frac{1}{n}}.$$



*Démonstration.* Soit  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  une forme de Kähler, et soit  $p \in \{0, \dots, d\}$ . On note

$$\delta_p(f) := \int_X f^* \omega^p \wedge \omega^{d-p}$$

et

$$\rho_p(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_X (f^n)^* \omega^p \wedge \omega^{d-p} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

On va montrer que  $\rho_p(f) = \lambda_p(f)$ ; la dernière égalité suit du fait que, a priori,

$$\lambda_p(f) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^* \omega^p\|^{\frac{1}{n}} \geq \rho_p(f).$$

Il suffit de montrer que, notée  $f^*$  l'application induite par  $f$  sur  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ , il existe deux constantes  $C, C'$  telles que pour tout  $n$

$$C \|(f^n)^*\| \leq \delta_p(f^n) \leq C' \|(f^n)^*\|.$$

Par la Proposition 1.5.5, on peut choisir une base  $(\alpha_i)$  de  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  de sorte que les  $\alpha_i$  soient des classes fortement positives et  $\alpha_1 = \omega^p$ . Comme le cône  $\mathcal{K}_p^+$  est d'intérieur non vide, il existe une constante positive  $C_1$  telle que  $C_1 \alpha_1 \geq \alpha_i$  (c'est-à-dire  $C_1 \alpha_1 - \alpha_i \in \mathcal{K}_p^+$ ) pour tout  $i \geq 1$ . Soit  $(\beta_j)$  la base de  $H^{d-p, d-p}(X, \mathbb{R})$  duale à  $(\alpha_i)$  par dualité de Serre. On a, pour tout  $n$ ,

$$\langle (f^n)^* \alpha_i, \beta_j \rangle = a_{i,j}^{(n)},$$

où les  $a_{i,j}^{(n)}$  sont les coefficients de la matrice qui représente  $(f^n)^*$  dans la base  $(\alpha_i)$ . Comme  $\omega^{d-p} \in \text{Int}(\mathcal{K}_{d-p}^+)$ , on peut trouver une constante  $C_2$  telle que  $C_2 \omega^{d-p} \geq \pm \beta_j$  pour tout  $j$ .

Alors on a

$$|a_{i,j}^{(n)}| = \langle (f^n)^* \alpha_i, \pm \beta_j \rangle \leq C_2 \langle (f^n)^* \alpha_i, \omega^{d-p} \rangle \leq C_1 C_2 \langle (f^n)^* \omega^p, \omega^{d-p} \rangle = C_1 C_2 \delta_p(f^n),$$

où la première inégalité est vraie car  $C_2 \omega^{d-p} \geq \pm \beta_j$  et  $(f^n)^* \alpha_i$  est fortement positive, alors que la deuxième inégalité est vraie car  $\omega^{d-p}$  est fortement positive et, comme  $C_1 \omega^p \geq \alpha_i$ , on a  $C_1 (f^n)^* \omega^p \geq (f^n)^* \alpha_i$ .

On a donc

$$C \|(f^n)^*\| \leq \delta_p(f^n) \quad C = \frac{1}{C_1 C_2}.$$

Pour l'inégalité réciproque, on observe que, comme  $\alpha_1 = \omega^p$ ,

$$\delta_p(f^n) = \sum_j a_{1j}^{(n)} \langle \alpha_j, \omega^{d-p} \rangle \leq \sum_j |a_{1j}^{(n)}| \cdot |\langle \alpha_j, \omega^{d-p} \rangle| \leq C' \|(f^n)^*\|$$

pour  $C' = \sum_j |a_{1j}^{(n)}|$ .

On a donc montré que

$$C\|(f^n)^*\| \leq \delta_p(f^n) \leq C'\|(f^n)^*\|,$$

ce qui montre la Proposition par passage à la limite.  $\square$

## 2.2 Concavité et conséquences sur $\lambda_1(f)$

Grâce à la Proposition 2.1.5, on peut utiliser une inégalité sur les produits de formes de Kähler due à Teissier et Khovanskii pour montrer un résultat de concavité sur les degrés dynamiques.

**Proposition 2.2.1.** *La fonction  $p \mapsto \log(\lambda_p(f))$  est concave sur  $\{0, \dots, d\}$ .*

*Démonstration.* On utilise, sans la montrer, une inégalité due à Teissier et Khovanskii (voir [9]).

**Théorème 2.2.2** (Teissier-Khovanskii). *Soit  $X$  une variété complexe compacte kählérienne de dimension  $d$ , et soit  $\Omega := (\omega_1, \dots, \omega_k)$  une  $k$ -uple de formes de Kähler sur  $X$ . Pour tout multi-indice  $I = (i_1, \dots, i_k)$  on note  $\Omega^I = \omega_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{i_k}$ .*

*Alors,  $i_3, \dots, i_k$  étant fixés de telle façon que  $i := \sum_{h \geq 3} i_h \leq d$ , et noté  $I_n = (n, d - i - n, i_3, \dots, i_k)$ , la fonction*

$$n \mapsto \log \left( \int_X \Omega^{I_n} \right)$$

*est concave sur l'ensemble  $\{0, 1, \dots, d - i\}$ .*

Pour terminer la preuve, on choisit  $k = 2$ ,  $\omega_2 = \omega$  une forme de Kähler quelconque et  $\omega_1 = f^*(\omega)$ . Par le Lemme, la fonction

$$p \mapsto \log \left( \int_X (f^*)^n(\omega)^p \wedge \omega^{d-p} \right)$$

est concave sur l'ensemble  $\{0, \dots, d\}$  pour tout  $n$ . Par la Proposition 2.1.5 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \int_X (f^*)^n(\omega)^p \wedge \omega^{d-p} \right) = \log(\lambda_p(f)),$$

et donc on montre l'énoncé par passage à la limite.  $\square$

**Corollaire 2.2.3.** *Si  $f$  est un automorphisme d'une variété kählérienne  $X$ , alors*

$$\lambda_1(f) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_p(f) = 1 \text{ pour } p = 1, \dots, d-1.$$

*En particulier, l'entropie de  $f$  est nulle si et seulement si  $\lambda_1(f) = 1$ .*

*Démonstration.* Si  $\lambda_1(f)$ , alors, par concavité,

$$0 = \log \lambda_1(f) \geq \frac{p-1}{p} \log \lambda_0(f) + \frac{1}{p} \log \lambda_p(f) = \frac{1}{p} \log \lambda_p(f),$$

donc  $\lambda_p(f) \leq 1$ .

De l'autre côté, par concavité,

$$\log \lambda_p \geq \frac{p}{d} \log \lambda_d + \frac{d-p}{d} \log \lambda_0 = 0,$$

donc  $\lambda_p(f) \geq 1$ .

On conclut que  $\lambda_p(f) = 1$  pour tout  $p = 0, \dots, d$ .  $\square$

*Démonstration alternative.* Sans utiliser de façon explicite l'inégalité de concavité, il suffit d'utiliser la Proposition 2.1.5 et le Lemme 1.5.3 : si  $\lambda_1(f) = 1$  et  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  est une forme de Kähler, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^* \omega\|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Comme l'application

$$\begin{aligned} \bigwedge : H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \times \dots \times H^{1,1}(X, \mathbb{R}) &\rightarrow H^{p,p}(X, \mathbb{R}) \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) &\mapsto \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \end{aligned}$$

est continue et l'ensemble  $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (H^{1,1}(X, \mathbb{R}))^p, \|\alpha_1\| = \dots = \|\alpha_p\| = 1\}$  est compact, pour tout choix de la norme  $\|\cdot\|$  il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p\| \leq C \cdot \|\alpha_1\| \cdot \dots \cdot \|\alpha_p\|$  pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  de norme 1, donc pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

En particulier

$$\lambda_p(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(f^n)^* \omega^p\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} C^{\frac{1}{n}} \cdot \|(f^n)^* \omega\|^{\frac{p}{n}} = 1.$$

Pour l'inégalité réciproque, supposons par l'absurde que  $\lambda_p(f) < 1$ . Soit  $\omega$  une forme de Kähler quelconque ; comme l'action de  $f^*$  sur  $H^{d,d}(X, \mathbb{R})$  est triviale, on a

$$0 \neq \omega^d = (f^*)^n \omega^d = (f^*)^n \omega^p (f^*)^n \omega^{d-p},$$

et on obtient une contradiction grâce au fait que le terme à droite tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  car  $\lambda_p(f) < 1$  et  $\lambda_{d-p}(f) \leq 1$ .  $\square$

On va s'intéresser en particulier au premier degré dynamique non trivial  $\lambda_1(f)$ , et donc à l'action de  $f^*$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Grâce au Lemme suivant il sera équivalent d'analyser la restriction de  $f^*$  à  $H^2(X, \mathbb{R})$ . L'avantage est que, comme  $H^2(X, \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , on peut exploiter la structure entière pour donner des contraintes de type arithmétique sur le degré dynamique.

**Lemme 2.2.4.** *Soit  $r_{p,q}(f)$  le rayon spectral de l'application linéaire induite*

$$f_{p,q}^* : H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

1. *Si  $p + q = 2k$  est pair, alors*

$$r_{p,q}(f) \leq \lambda_k(f);$$

2. *si  $p + q = 2k + 1$  est impair, alors*

$$r_{p,q}(f) \leq \sqrt{\lambda_k(f)\lambda_{k+1}(f)}$$

*Démonstration.* Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : H^{p,q}(X, \mathbb{C}) &\rightarrow H^{p+q,p+q}(X \times X, \mathbb{C}) \\ u &\mapsto \pi_1^* u \wedge \pi_2^* \bar{u}, \end{aligned}$$

où  $\pi_1, \pi_2 : X \times X \rightarrow X$  sont les deux projections.

Notons que, si  $u \neq 0$ , alors  $\phi(u) \neq 0$ ; en particulier, si  $u$  est un vecteur propre non nul de valeur propre  $\lambda$ , alors  $\phi(u)$  est un vecteur propre (non nul) de valeur propre  $|\lambda|^2$  pour l'application linéaire induite par  $(f, f) : X \times X \rightarrow X \times X$  sur  $H^{p+q,p+q}(X, \mathbb{C})$ . En particulier on a

$$r_{p,q}(f) \leq \lambda_{p+q}(f \times f).$$

Si  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  est une forme de Kähler, alors  $\pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega =: \tilde{\omega} \in H^{1,1}(X \times X, \mathbb{R})$  est une forme de Kähler aussi.

Par la Proposition 2.1.5 on a donc

$$\begin{aligned}
r_{p,q}(f) &\leq \lambda_{p+q}(f \times f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| ((f \times f)^n)^* \tilde{\omega}^{p+q} \right\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| ((f \times f)^n)^* (\pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega)^{p+q} \right\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| ((f \times f)^n)^* \sum_{h=0}^{p+q} \binom{p+q}{h} (\pi_1^* \omega)^h \wedge (\pi_2^* \omega)^{p+q-h} \right\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{h=0}^{p+q} \binom{p+q}{h} \pi_1^*(f^n)^* \omega^h \wedge \pi_2^*(f^n)^* \omega^{p+q-h} \right\|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \max\{\lambda_h(f) \lambda_{p+q-h}(f)\}.
\end{aligned}$$

Si  $p+q = 2k$  est pair, par concavité on a

$$\lambda_h(f) \lambda_{p+q-h}(f) \leq \lambda_k(f)^2,$$

ce qui montre le premier énoncé.

Si  $p+q = 2k+1$  est impair, par concavité on a

$$\lambda_h(f) \lambda_{p+q-h}(f) \leq \lambda_k(f) \lambda_{k+1}(f),$$

ce qui montre le deuxième énoncé.  $\square$

**Corollaire 2.2.5.** *Si  $X$  est une variété complexe compacte de Kähler et  $f: X \rightarrow X$  est un automorphisme holomorphe, alors  $\lambda_p(f)$  est une valeur propre de module maximal pour*

$$f^*: H^{2p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{R}).$$

*Démonstration.* Par le Lemme 2.2.4, pour tout  $h = 0, \dots, 2p$  on a  $r_{h,2p-h} \leq \lambda_p(f)$ . Par conséquent, le rayon spectral de la restriction de  $f^*$  à  $H^{2p}(X, \mathbb{C})$  est au plus  $\lambda_p(f)$ , ce qui montre le Corollaire.  $\square$

**Corollaire 2.2.6.** *Pour toute variété compacte kählérienne  $X$ , l'image de l'application*

$$\lambda_1: \text{Aut}(X) \rightarrow [1, +\infty)$$

*est discrète.*

*Plus précisément, pour tout  $M > 0$  les automorphismes  $f \in \text{Aut}(X)$  tels que  $\lambda_1(f) < M$  induisent sur  $H^2(X, \mathbb{R})$  des applications linéaires qui ne peuvent avoir qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques.*

*Démonstration.* Fixons  $M > 1$ ; on doit montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de degré dynamiques  $\lambda_1(f) < M$ .

Par le Corollaire 2.2.5, si  $\lambda_1(f) < M$ , alors  $|\lambda| < M$  pour tout  $\lambda$  valeur propre de

$$f^*: H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique  $p$  de  $f^*$  est unitaire et à coefficient entiers car  $H^2(X, \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ; comme ses racines sont bornées par  $M$ , ses coefficients sont bornés par  $M^D$ , où  $D = \deg p = \dim H^2(X, \mathbb{R})$ . On n'a donc qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles, et en particulier  $\lambda_1(f)$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.  $\square$

## 2.3 Automorphismes d'entropie nulle

On analyse maintenant en détail le cas où  $f$  est d'entropie nulle, c'est-à-dire, par le Corollaire 2.2.3,

$$\lambda_1(f) = \lambda_p(f) = 1 \quad \text{pour } p = 0, \dots, d.$$

Toutes les valeurs propres de  $f^*: H^*(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$  doivent avoir norme  $\leq 1$ . Grâce à la structure entière de  $H^*(X, \mathbb{R})$ , on montre qu'en fait les seules valeurs propres possibles sont les racines de l'unité. Cela nous permettra, quitte à considérer un itéré  $f^N$  de  $f$  (dont la norme va avoir le même type de croissance que celle de  $f$ ), de se réduire au cas où la seule valeur propre est 1, c'est-à-dire  $f^*$  unipotente.

**Proposition 2.3.1.** *Si la norme de  $(f_{1,1}^*)^n$  ne croît pas exponentiellement vite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , ou, de manière équivalente,  $\lambda_1(f) = 1$ , alors toutes les valeurs propres de  $f^*: H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$  ont module  $\leq 1$ .*

*Démonstration.* On sait par le Corollaire 2.2.3 que, comme  $\lambda_1(f) = 1$ , on a  $\lambda_p(f) = 1$  pour tout  $p = 0, \dots, d$ .

Par le Lemme 2.2.4, on a

$$r_{p,q} \leq \begin{cases} \lambda_k(f) & \text{si } p+q = 2k \\ \sqrt{\lambda_k(f)\lambda_{k+1}(f)} & \text{si } p+q = 2k+1 \end{cases}.$$

Dans les deux cas, on obtient  $r_{p,q} \leq 1$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.3.2.** *Si  $\lambda_1(f) = 1$ , alors les valeurs propres de  $f^*: H^*(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$  sont racines de l'unité. En particulier il existe  $N \geq 1$  tel que  $(f^*)^N$  est unipotente.*

*Démonstration.* Considérons l'application  $f^*$  induite par  $f$  au niveau de  $H^*(X, \mathbb{R})$ . Son polynôme caractéristique  $P$  est à coefficient entiers car  $H^*(X, \mathbb{R}) = H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ .

On vient de montrer que toutes les racines de  $P$  sont de module  $\leq 1$ ; on conclut grâce à un Théorème de Kronecker, qui dit précisément que si les racines d'un polynôme à coefficients entiers sont toutes de module  $\leq 1$ , alors elles sont racines de l'unité.  $\square$

On a montré que si  $\lambda_1(f) = 1$ , alors  $\lambda_p(f) = 1$  et, quitte à considérer un itéré de  $f$ ,  $f^*$  est unipotente. Dans cette situation on peut s'intéresser en une variante des degrés de croissance : si les degrés dynamiques  $\lambda_p$  décrivent la croissance (au moins) exponentielle de la norme de  $(f^n)^*$ , les degrés dynamiques polynomiaux  $\tau_p$  qu'on va introduire prennent plutôt en considération le type de croissance polynomiale de la norme de  $(f^n)^*$ .

**Définition 2.3.3.** *Si  $\lambda_1(f) = 1$ , on définit le degré dynamique polynomial d'ordre  $p$  de  $f$  comme*

$$\tau_p(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|(f_{p,p}^n)^*\|}{\log n}.$$

*Remarque 2.3.4.* Par le Corollaire 1.3.3,  $\tau_p(f) = h - 1$ , où  $h$  est la dimension du bloc de Jordan maximal de  $f_{p,p}^*$ .

**Proposition 2.3.5.** *Si  $\lambda_1(f) = 1$ , alors les  $\tau_p(f)$  sont des nombres pairs tels que la fonction*

$$p \mapsto \log \tau_p(f)$$

*est concave sur  $\{0, \dots, d\}$ .*

*Démonstration.* Pour prouver que les  $\tau_p(f)$  sont pairs il suffit d'appliquer la Proposition 1.4.3 à un itéré unipotent  $(f^*)^N \in \text{GL}(V)$  de  $f^*$ , où  $V = H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ , le cône invariant étant  $C = \mathcal{K}_p^+$ .

Maintenant montrons que la fonction  $p \mapsto \log \tau_p(f)$  est concave sur  $\{0, \dots, d\}$ . Fixons une forme de Kähler  $\omega$ ; la preuve de la Proposition 2.1.5 montre que

$$\tau_p(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|(f^n)^* \omega^p\|}{\log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \int_X (f^n)^* \omega^p \wedge \omega^{d-p} \right)}{\log n}.$$

Soit maintenant pour tout  $n$   $\omega_1 := (f^n)^*\omega$ ,  $\omega_2 := \omega$ . Ce sont deux formes de Kähler, et, par le Théorème 2.2.2, on a que, pour tout  $n$ , l'application

$$p \mapsto \log \left( \int_X ((f^n)^*\omega)^p \wedge \omega^{d-p} \right) = \log \left( \int_X (f^n)^*\omega^p \wedge \omega^{d-p} \right)$$

est concave. On conclut par passage à la limite. □



# Chapitre 3

## Groupes commutatifs d'automorphismes

Dans ce chapitre on présente un résultat dû à Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony sur les sous-groupes commutatifs de  $Aut(X)$ , où  $X$  est une variété kählerienne compacte, comme dans [8].

Le résultat principal de Dinh et Sibony est le Théorème suivant. L'intérêt de ce chapitre est aussi de présenter des techniques qu'on pourra appliquer oar la suite à des problèmes similaires.

**Définition 3.0.6.** *Soit  $X$  une variété kählerienne compacte. On rappelle qu'un élément  $f \in Aut(X)$  est d'entropie nulle si et seulement si  $\lambda_1(f) = 1$ . On dit qu'un sous-groupe  $H \leq Aut(X)$  est d'entropie positive si, pour tout  $h \in H - \{id\}$ ,  $\lambda_1(h) > 1$ .*

**Théorème 3.0.7** (Dinh-Sibony). *Soit  $G'$  un groupe commutatif d'automorphismes d'une variété kählerienne compacte  $X$  de dimension  $d \geq 2$ . Alors l'ensemble  $U$  des éléments d'entropie nulle de  $G'$  est un sous-groupe de  $G'$ . De plus, il existe un sous-groupe  $G \leq G'$  commutatif libre, d'entropie positive, de rang*

$$r \leq d - 1$$

*tel que  $G' \cong U \times G$ .*

*Si  $r = d - 1$ , le groupe  $U^* := \{u^* | u \in U\}$  est fini.*

*Remarque 3.0.8.* Dans leur article, Dinh et Sibony arrivent à montrer que, si  $r = d - 1$ , alors  $U$  est fini. Pour cela on aurait besoin de plus de théorie, donc j'ai choisi de ne prouver que la version plus faible.

Pendant ce chapitre on va noter  $\mathcal{K} \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  le cône des classes de Kähler et  $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_1^+ = \mathcal{K}_1^\oplus$  son adhérence dans  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

### 3.1 Théorème de l'indice de Hodge généralisé

L'outil principal pour montrer le Théorème 3.0.7 est le Théorème de l'indice de Hodge (Théorème 1.1.1), avec des généralisations et des corollaires.

**Lemme 3.1.1.** *Soient  $c$  et  $c'$  deux classes de  $\overline{\mathcal{K}}$ . Si  $c \wedge c' = 0$ , alors  $c$  et  $c'$  sont colinéaires.*

*Démonstration.* Soit  $V \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  l'espace engendré par  $c$  et  $c'$ . Fixons une classe de Kähler  $\omega \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  qui définit un produit d'intersection  $Q$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  (pour la définition voir le paragraphe 1.1). Alors  $Q(c, c), Q(c', c') \geq 0$ , donc la restriction de  $Q$  à  $V$  est semi-définie positive. Par le Théorème 1.1.1 on doit avoir  $\dim(V) \leq 1$ , sinon la signature du produit  $Q$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  ne pourrait pas être  $(1, \dim(H^{1,1}(X, \mathbb{R})) - 1)$ ; donc  $c$  et  $c'$  sont colinéaires.  $\square$

Pour montrer le prochain Corollaire nous utiliserons une généralisation du Théorème de l'indice de Hodge, qui a été montrée par Tien-Cuong Dinh et Viêt-Anh Nguyễn dans [7].

**Théorème 3.1.2.** *Soient  $c_1, \dots, c_{d-1}$  des classes de  $\overline{\mathcal{K}}$ . Si  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} \neq 0$  (par exemple si  $c_1, \dots, c_{d-1}$  sont des classes de Kähler), alors la forme bilinéaire*

$$q: H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \times H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-2}$$

*est semi-négative sur l'hyperplan*

$$\mathcal{P}(c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1}) := \{c \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \mid c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} = 0\}.$$

**Corollaire 3.1.3.** *Soient  $c_1, \dots, c_m, c$  et  $c'$  des classes dans  $\overline{\mathcal{K}}$ ,  $0 \leq m \leq k-2$ . Supposons que  $c \wedge c' \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m = 0$ . Alors il existe  $a, b$  réels,  $(a, b) \neq (0, 0)$ , tels que*

$$(ac + bc') \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0$$

pour toutes classes  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

Si  $c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \neq 0$ , alors le couple  $(a, b)$  est unique à une constante multiplicative près.

*Démonstration.* On peut supposer que  $c$  et  $c'$  ne soient pas colinéaires et que  $c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \neq 0$ , sinon le résultat est évident. Soit  $F$  le plan de  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  engendré par  $c$  et  $c'$ .

Fixons des classes de Kähler  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in \mathcal{K}$ . On va montrer d'abord qu'il existe une classe  $\tilde{c} \in F$ ,  $\tilde{c} \neq 0$ , unique à multiplication près, telle que

$$\tilde{c} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0;$$

ensuite on montre que la classe  $\tilde{c}$  est indépendante du choix des classes  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2}$ , et on conclut grâce au fait que les classes de Kähler engendrent  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

Fixons une classe de Kähler  $c'_{d-1}$ ; comme  $c_1, \dots, c_m \in \overline{\mathcal{K}}$  et  $\gamma := c_1 \wedge \dots \wedge c_m \neq 0$ , par la Proposition 1.5.5  $\gamma$  est une classe positive; en particulier, pour toute forme fortement positive  $\delta \in H^{d-m, d-m}(X, \mathbb{R})$ ,  $\gamma \wedge \delta \geq 0$ . Par l'énoncé 2 de la Proposition 1.5.5,  $\delta := c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-1} \wedge c'_d \in H^{d-m, d-m}(X, \mathbb{R})$  est dans l'intérieur du cône des classes fortement positives, donc par le Lemme 1.5.3 on ne peut pas avoir  $\gamma \wedge \delta = 0$ . En particulier

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-1} \neq 0.$$

Maintenant, notons  $q$  la forme symétrique sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  définie par les  $d-2$  classes  $c_1, \dots, c_m, c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2}$ . D'après le Théorème 3.1.2,  $q$  est semi-négative sur

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-1}),$$

qui, comme on vient de le montrer, est un hyperplan de  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Soit  $\tilde{c}$  une classe non nulle dans  $\mathcal{P} \cap F$  (qui existe car  $F$  est de dimension 2); montrons que

$$\tilde{c} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0.$$

On a d'abord  $q(\tilde{c}, \tilde{c}) = 0$  : en effet  $q(c, c) \geq 0$  et  $q(c', c') \geq 0$ , alors que  $q(c, c') = 0$ , donc la restriction de  $q$  à  $F$  est semi-positive; en même temps la restriction de  $q$  à  $\mathcal{P}$  est semi-négative, donc, comme  $\tilde{c} \in F \cap \mathcal{P}$ ,  $q(\tilde{c}, \tilde{c}) = 0$ . Soit  $\gamma \in \mathcal{P}$ ; comme  $q$  est semi-négative sur  $\mathcal{P}$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|q(\tilde{c}, \gamma)|^2 \leq q(\tilde{c}, \tilde{c})q(\gamma, \gamma) = 0,$$

donc  $q(\tilde{c}, \gamma) = 0$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{P}$ ; de plus on a  $q(\tilde{c}, c'_{d-1}) = 0$  car  $\tilde{c} \in \mathcal{P}$ , et on a  $c'_{d-1} \notin \mathcal{P}$ . Comme  $\mathcal{P}$  est un hyperplan, on conclut que  $q(\tilde{c}, \gamma) = 0$  pour tout  $\gamma \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Par dualité de Poincaré on déduit

$$\tilde{c} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0.$$

Montrons l'unicité de  $\tilde{c}$  : si  $\tilde{c}$  n'était pas unique à une constante multiplicative près, alors la dernière égalité serait vraie pour tout  $\tilde{c} \in F$ ; en particulier elle serait vraie pour  $\tilde{c} = c$ . Cela mène à une contradiction, car  $c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  est une classe positive par la Proposition 1.5.5, donc son produit avec un produit de classes de Kähler, qui par la Proposition 1.5.5 est dans l'intérieur du cône  $\mathcal{K}_{d-m-1}^\oplus$ , ne peut pas être nul par le Lemme 1.5.3.

On a montré que l'ensemble des classes  $\tilde{c} \in F$  vérifiant l'équation

$$\tilde{c} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0$$

est égal à la droite  $F \cap \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  est défini par  $c_1, \dots, c_m, c'_{m+1}, \dots, c'_{d-1}$ ; on en déduit que  $F \cap \mathcal{P}$  ne dépend pas de la classe  $c'_{d-1}$ , qui n'apparaît pas dans l'équation, et, par symétrie, cette intersection ne dépend pas non plus de  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2}$ .

On a donc montré que

$$\tilde{c} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0$$

pour tout choix de classes de Kähler  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2}$ .

Le cône de Kähler étant ouvert dans  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ , l'équation précédente reste vraie pour tout choix de  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.4.** *Soient  $c, c', c_1, \dots, c_m$  des classes dans  $\overline{\mathcal{K}}$ ,  $1 \leq m \leq d-2$ , et soit  $g$  un automorphisme de  $X$  tel qu'il existe deux constantes positives distinctes  $\lambda, \lambda'$  telles que*

$$g^*(c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c) = \lambda c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c,$$

$$g^*(c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c') = \lambda' c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'.$$

*Si  $c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c \neq 0$  et  $c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c' \neq 0$ , alors  $c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c \wedge c' \neq 0$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c \wedge c' = 0.$$

Alors, par le Corollaire 3.1.3, il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tel que

$$(ac + bc') \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0$$

pour tout  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ .

Prenons l'image de cette égalité par  $g^*$  :

$$(a\lambda c + b\lambda' c') \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge g^* c'_{m+1} \wedge \dots \wedge g^* c'_{d-2} = 0$$

pour tout  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Comme  $g^*$  est un opérateur inversible, quitte à renommer les  $c'_i$ , on a

$$(a\lambda c + b\lambda' c') \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m \wedge c'_{m+1} \wedge \dots \wedge c'_{d-2} = 0$$

pour tout  $c'_{m+1}, \dots, c'_{d-2} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . Le couple  $(a, b)$  étant unique à une constante multiplicative près,  $(a, b)$  et  $(\lambda a, \lambda' b)$  sont colinéaires, donc soit  $a = 0$ , ce qui implique  $c' \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m = 0$  par dualité de Serre, soit  $b = 0$ , ce qui implique  $c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_m = 0$ . Dans les deux cas on obtient une contradiction avec les hypothèses.  $\square$

## 3.2 Groupes commutatifs d'entropie positive

On va appliquer les résultats trouvés jusqu'ici aux sous groupes commutatifs  $G \leq \text{Aut}(X)$ , où  $X$  est une variété kählerienne compacte.

Pour l'instant on restreint notre attention au cas où  $f$  est d'entropie positive, ou, autrement dit, au cas où  $\lambda_1(f) \neq 1$ .

**Définition 3.2.1.** *On dit qu'un groupe d'automorphismes  $G$  d'une variété compacte complexe préserve une classe  $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  si pour tout  $f \in G$  il existe une constante  $\lambda(f) \in \mathbb{R}$  telle que  $f^*(c) = \lambda(f)c$ . La classe  $c$  est dite invariante par le groupe  $G$ .*

La Proposition suivante va être un des outils fondamentaux pour montrer le Théorème 3.0.7.

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $f$  un automorphisme d'entropie positive appartenant à un groupe commutatif  $G \leq \text{Aut}(X)$ . Alors il existe une classe  $c \in \overline{\mathcal{K}} \setminus \{0\}$ , invariante par  $G$  et telle que*

$$f^*c = \lambda_1(f)c.$$

*Démonstration.* Soit  $\Gamma_1 \subset \bar{\mathcal{K}}$  le cône des classes  $c$  de  $\bar{\mathcal{K}}$  vérifiant  $f^*c = \lambda_1(f)c$ . C'est un cône convexe fermé, invariant par  $f$  et, par le Théorème 1.4.1,  $\Gamma_1 \neq \{0\}$ . De plus le cône  $\Gamma_1$  est préservé par  $G$  : en effet, si  $g \in G$  et  $c \in \Gamma_1$ ,

$$f^*(g^*c) = g^*(f^*c) = g^*(\lambda_1(f)c) = \lambda_1(f)g^*c.$$

Maintenant soit  $f_1 \in G$ ,  $f_1 \neq f$ . Si on applique le Théorème 1.4.1 à la restriction de  $f_1^*$  à l'espace vectoriel engendré par  $\Gamma_1$  (qui est invariant par  $f_1^*$ ), on trouve qu'il existe un élément  $c \in \Gamma_1 \setminus \{0\}$  et une constante positive  $\lambda_1$  tels que  $f_1^*c = \lambda_1 c$ ; soit

$$\Gamma_2 := \{c \in \Gamma_1 \mid f_1^*c = \lambda_1 c\}.$$

$\Gamma_2$  est un cône fermé différent de  $\{0\}$  qui est préservé par  $G$ .

On fait la même construction pour tout  $f_i \in G$  pour construire une suite

$$\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \Gamma_3 \supseteq \dots$$

de cônes fermés invariants différents de  $\{0\}$ . Comme chaque  $\Gamma_i$  est de la forme  $\bar{\mathcal{K}} \cap V_i$  pour un sous-espace  $V_i \subseteq H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ , la suite stabilise en un cône  $\Gamma_\infty \neq \{0\}$ . Tout élément  $c \in \Gamma_\infty \setminus \{0\}$  satisfait l'énoncé.  $\square$

On pose

$$G^* = \{f^* \mid f \in G\} \subseteq \text{GL}(H^{1,1}(X, \mathbb{R})).$$

Si  $c \in \bar{\mathcal{K}}$  est une classe invariante par  $G$ , on a

$$f^*(c) = \exp(\tau_c(f))c$$

pour un caractère  $\tau_c: G^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout caractère  $\tau$  notons

$$\Gamma_\tau := \{c \in \bar{\mathcal{K}}, f^*(c) = \exp(\tau(f))c\},$$

et soit  $\mathcal{C} = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  la famille des caractères associés aux classes invariantes  $c \in \bar{\mathcal{K}}$ . Il est clair que le cardinal  $m$  de  $\mathcal{C}$  est majoré par  $h_1 := \dim H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . On note

$$\begin{aligned} \pi: G &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ f &\mapsto (\tau_1(f), \dots, \tau_m(f)). \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.3.** *Si  $G$  est commutatif d'entropie positive,  $\pi$  est injectif et son image est discrète. De plus,  $G$  est commutatif libre de rang  $r \leq m$ .*

*Démonstration.* Par la Proposition 3.2.2, l'une des coordonnées de  $\pi(f)$  est  $\log \lambda_1(f)$ , d'où l'injectivité. De plus par le Corollaire 2.2.6 l'image de

$$\log \circ \lambda_1 : G \rightarrow \mathbb{R}$$

est discrète ; par suite 0 est un point isolé de l'image de  $\pi$ , et l'image est donc discrète.

Comme  $\pi(G) \cong G$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^m$ , son rang  $r$  vérifie  $r \leq m$ .  $\square$

Le Théorème suivant donne des contraintes sur le rang d'un groupe commutatif d'entropie positive en partant de la cohomologie de  $X$ .

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $G$  un groupe commutatif d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte de dimension  $d$ , et soit  $G$  d'entropie positive. Alors  $G$  est commutatif libre et son rang  $r$  vérifie*

$$r \leq d - 1$$

$$\binom{r}{n} \leq h_n := \dim H^{n,n}(X, \mathbb{R}) \quad \text{pour tout } 1 \leq n \leq d.$$

Si de plus  $n$  divise  $d$ , alors

$$\binom{r}{n} \leq h_n - 1.$$

De plus, il existe  $r + 1$  classes  $c_1, \dots, c_{r+1} \in \overline{\mathcal{K}}$  invariantes par  $G$  et telles que  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} \neq 0$ .

*Démonstration.* Quitte à changer l'ordre des  $\tau_i$ , on peut supposer que  $\tau_1, \dots, \tau_r$  soit une famille libre maximale de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\Pi : G \rightarrow \mathbb{R}^r$  le morphisme qui associe à  $f \in G$  le vecteur  $(\tau_1(f), \dots, \tau_r(f)) \in \mathbb{R}^r$  ;  $\Pi$  est injectif et son image engendre  $\mathbb{R}^r$ . Pour  $i = 1, \dots, r$  on choisit une classe  $c_i$  non nulle dans  $\Gamma_{\tau_i}$ . Pour tout multi-indice  $I = (i_1, \dots, i_n)$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r$ , on note  $c^I = c_{i_1} \wedge \dots \wedge c_{i_n}$  et  $\tau_I = \tau_{i_1} + \dots + \tau_{i_n}$ .

On montre d'abord que, si  $|I| \leq \min\{d, r\}$ , alors  $c_I \neq 0$ . Sinon, prenons le contre-exemple  $c_I = 0$  avec  $|I|$  minimal ( $|I| \geq 2$ ). On a donc

$$c_{i_1} \wedge \dots \wedge c_{i_n} = 0,$$

$$c_{i_1} \wedge \dots \wedge c_{i_{n-1}} \neq 0, \quad c_{i_1} \wedge \dots \wedge c_{i_{n-2}} \wedge c_{i_n} \neq 0.$$

On choisit  $f \in G$  tel que  $\tau_{i_{n-1}}(f) \neq \tau_{i_n}(f)$ ; en appliquant  $f^*$  aux égalités ci-dessus on obtient une absurdité grâce au Corollaire 3.1.4.

Maintenant on montre que, pour tout  $n \leq \min\{d, r\}$ , les classes  $c_I$  avec  $|I| = n$  sont indépendantes. Supposons par l'absurde qu'il existe des constantes  $a_I$ , non toutes nulles, telles que

$$\sum_{|I|=n} a_I c_I = 0.$$

On choisit les  $a_I$  de telle façon que  $N := \#\{I | a_I \neq 0\}$  soit minimal ( $N \geq 2$ ). Fixons  $I_0$  tel que  $a_{I_0} \neq 0$ .

Pour  $f \in G$ , si on applique  $f^*$  à la dernière égalité on obtient

$$\sum_{|I|=n} a_I \exp(\tau_I(f)) c_I = 0,$$

donc

$$\sum_{|I|=n} a_I (\exp \tau_I(f) - \exp \tau_{I_0}(f)) c_I = 0.$$

Par minimalité de  $N$  on a alors  $\tau_I(f) = \tau_{I_0}(f)$  pour tout  $I$  tel que  $a_I \neq 0$  et pour tout  $f$ . Comme  $N \geq 2$ , en particulier il existe  $I \neq I_0$  tel que  $\tau_I = \tau_{I_0}$ , ce qui est absurde car la famille  $\tau_1, \dots, \tau_r$  est libre.

Donc les  $c_I$  avec  $|I| = n$  sont indépendants.

En particulier, on a trouvé  $\binom{r}{n}$  classes indépendantes dans  $H^{n,n}(X, \mathbb{R})$ , d'où  $\binom{r}{n} \leq h_n$  lorsque  $n \leq \min\{d, r\}$ .

Si par l'absurde on avait  $r > d$ , en prenant  $n = d$  la dernière inégalité donnerait  $\binom{r}{d} \leq h_d = 1$ , d'où  $r \leq d$ . On a donc montré que  $r \leq d$ .

Supposons que  $d = mn$ . On veut montrer que  $\binom{r}{n} \neq h_n$ .

Supposons par l'absurde que  $\binom{r}{n} = h_n$ , et donc que les  $c_I$ ,  $|I| = n$ , engendrent  $H^{n,n}(X, \mathbb{R})$ . Il existe  $m$  classes  $c_{I_1}, \dots, c_{I_m}$  telles que

$$c := c_{I_1} \wedge \dots \wedge c_{I_m} \neq 0;$$

sinon pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in H^{n,n}(X, \mathbb{R})$ ,  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m = 0$ , ce qui est absurde car pour toute forme de Kähler  $\omega$  on a  $\omega^d = (\omega^n)^m \neq 0$ .

La classe  $c$  appartient à  $H^{d,d}(X, \mathbb{R})$ , donc pour tout  $g \in G$  on a  $g^*c = c$ ; par conséquent, on a

$$\tau_{I_1} + \dots + \tau_{I_m} = 0,$$



ce qui est absurde car les  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , forment une famille libre.

On a montré que, si  $n$  divise  $d$ , alors  $\binom{r}{n} \leq h_n - 1$ ; en particulier pour  $n = d$  on obtient  $\binom{r}{d} \leq 0$ , donc  $r \leq d - 1$ .

Il reste à construire une classe  $G$ -invariante  $c_{r+1}$  dans  $\overline{\mathcal{K}}$  telle que

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} \neq 0.$$

Comme le réseau  $\Pi(G) \subset \mathbb{R}^r$  engendre  $\mathbb{R}^r$ , il existe un élément  $f \in G$  tel que toutes les coordonnées de  $\Pi(f)$  soient strictement négatives, ou, autrement dit,  $f^*c_i = \lambda_i c_i$  pour des  $\lambda_i < 1$  pour  $i = 1, \dots, r$ . Par la Proposition 3.2.2, il existe une classe  $c_{r+1} \in \overline{\mathcal{K}}$   $G$ -invariante telle que

$$f^*c_{r+1} = \lambda_1(f)c_{r+1}.$$

Supposons par l'absurde que  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} = 0$ ; on a  $f^*(c_1 \wedge \dots \wedge c_r) = \lambda c_1 \wedge \dots \wedge c_r$  et  $f^*(c_1 \wedge \dots \wedge c_{r-1} \wedge c_{r+1}) = \lambda' c_1 \wedge \dots \wedge c_{r-1} \wedge c_{r+1}$ , avec  $\lambda \neq \lambda'$  car  $\lambda_1(f) > 1$  alors que  $\exp(\tau_r(f)) < 1$ ; de plus  $c_1 \wedge \dots \wedge c_r \neq 0$ , donc, par le Corollaire 3.1.4, on doit avoir  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{r-1} \wedge c_{r+1} = 0$ . De la même façon on montre récursivement que  $c_1 \wedge \dots \wedge c_i \wedge c_{r+1} = 0$  pour tout  $i \geq 1$ , et finalement que  $c_{r+1} = 0$ , ce qui est absurde.

On a donc montré que

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} \neq 0.$$

□

**Théorème 3.2.5.** *Soit  $G$  un groupe d'automorphismes d'une variété compacte kählerienne de dimension  $d$ , et soit  $G$  d'entropie positive. Si  $G$  préserve  $d - 1$  classes  $c_1, \dots, c_{d-1}$  de  $\overline{\mathcal{K}}$  qui vérifient  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} \neq 0$ , alors  $G$  est commutatif, libre et de rang  $r \leq d - 1$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 3.2.4, il suffit de montrer que  $G$  est commutatif.

Soient  $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$  les caractères associés à  $c_1, \dots, c_{d-1}$  respectivement, et soit  $\pi: G \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  l'application linéaire donnée par les  $\tau_i$ . Si on montre que  $\pi$  est injectif,  $G$  peut être vu comme un sous-groupe de  $\mathbb{R}^{d-1}$ , donc en particulier  $G$  est commutatif.

Supposons par l'absurde qu'il existe un élément  $g \in G \setminus \{id\}$  tel que  $g^*c_i = c_i$  pour  $i = 1, \dots, d-1$ ; par la Proposition 3.2.2, il existe une classe  $c \in \overline{\mathcal{K}}$  qui est  $G$ -invariante et telle que  $g^*c = \lambda_1(g)c$ . Comme  $c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} \in H^{d,d}(X, \mathbb{R})$ , on a

$$c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} = g^*(c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1}) = \lambda_1(g)c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1},$$

d'où

$$c \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} = 0.$$

Grâce au fait que  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{d-1} \neq 0$ , un argument récursif et le Corollaire 3.1.4 permettent de montrer que  $c = 0$ , ce qui est absurde.  $\square$

### 3.3 Preuve du cas général

On est prêt pour prouver le Théorème 3.0.7.

*Preuve du Théorème 3.0.7.* Soit  $r$  le nombre maximal tel qu'il existe  $r$  caractères  $\tau_1 \dots \tau_r$  de  $G'$  dans  $\mathbb{R}$ , associés à des classes  $c_1 \dots c_r$  dans  $\overline{\mathcal{K}}$ , qui soient linéairement indépendants.

Notée  $\pi: G' \rightarrow \mathbb{R}^r$  l'application associée aux  $\tau_i$ , on montre que l'image de  $\pi$  est un réseau (qui engendre  $\mathbb{R}^r$  car les  $\tau_i$  forment une famille libre).

Il suffit de montrer que 0 est un point isolé de l'image. En effet, pour tout  $g \in G'$  tel que  $\lambda_1(g) \neq 1$ , par la Proposition 3.2.2 il existe une classe  $c \in \overline{\mathcal{K}}$  telle que  $g^*c = \lambda_1(g)c$ ; autrement dit, si

$$\tau_c = \tau_n = \sum_{i=1}^r a_{i,n} \tau_i$$

est le caractère associé à  $c$ , on a

$$\log(\lambda_1(f)) = \tau_c(g) = \sum_{i=1}^r a_{i,n} \tau_i(g).$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de caractères  $\tau_n$ , 0 est donc un point isolé de l'image.

Toujours par la Proposition 3.2.2, l'ensemble  $U$  des éléments de  $G'$  d'entropie nulle est égal à  $\pi^{-1}(0)$ . On choisit des éléments  $g_1, \dots, g_r$  de  $G'$  tels que le réseau  $\pi(G)$  est engendré par les  $\pi(g_i)$ ; alors

$$G := \langle g_1 \dots g_r \rangle$$

est commutatif, libre, d'entropie positive et on a

$$G' \cong U \times G.$$

Maintenant on suppose que  $r = d - 1$ , et on veut montrer que  $U^*$  est fini. Il suffit de montrer que, pour tout  $u \in U$ ,  $u^*$  est d'ordre fini : en effet dans ce cas il existe une base de  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$  dans laquelle  $U^*$  est diagonal, et ses coefficients diagonaux sont des racines de l'unité. Par le Corolaire 2.2.6, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de  $f^*$  possible, ce qui implique facilement que  $U^*$  est fini.

Comme dans la preuve du Théorème 3.2.4, on montre d'abord qu'il existe une classe  $G$ -invariante  $c_{r+1} \in \overline{\mathcal{K}}$  telle que

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} \neq 0.$$

On choisit  $f \in G'$  tel que toutes les coordonnées de  $\pi(f)$  soient strictement négatives ; par la Proposition 3.2.2, il existe une classe  $G$ -invariante  $c_{r+1}$  telle que  $f^*c_{r+1} = \lambda_1(f)c_{r+1}$ . En particulier  $\tau_c \notin \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$  ; si on avait  $c_1 \wedge \dots \wedge c_{r+1} = 0$ , un argument récursif à l'aide du Corollaire 3.1.4 montre que  $c_{r+1} = 0$ , ce qui est absurde.

Soit maintenant  $u \in U$ . Pour montrer que  $u^*$  est d'ordre fini, supposons par l'absurde que, quitte à considérer un itéré  $u^N$  de  $u$ , on ait  $u^* \neq id$  unipotent ; en considérant la forme de Jordan de  $u^*$ , on montre qu'il existe  $l > 0$  tel que pour toute classe  $c' \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ , la suite  $n^{-l}(u^n)^*c'$  converge vers un vecteur propre  $c$  de  $u^*$  (avec valeur propre 1), et  $c \neq 0$  pour  $c'$  générique (pour les détails, voir le paragraphe ??).

**Lemme 3.3.1.** *Il existe une classe  $c' \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  telle que  $c \in \overline{\mathcal{K}} \setminus \{0\}$  et telle que  $c$  soit  $G'$ -invariant.*

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de la Proposition 3.2.2.

Soit  $W_1 \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$  le sous-espace engendré par les classes  $c$  qui peuvent s'écrire

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-l}(u^n)^*c'.$$

C'est un sous-espace  $G'$ -invariant car, pour  $g \in G'$  et  $c \in W$  associé à  $c' \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ , on a

$$g^*c = g^* \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-l}(u^n)^*c' \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-l}(u^n)^*(g^*c') \in W.$$

De plus  $W_1 \cap \overline{\mathcal{K}} \neq \{0\}$  : en effet comme  $\overline{\mathcal{K}}$  est d'intérieur non vide, on peut choisir  $c' \in \overline{\mathcal{K}}$  tel que la classe  $c$  correspondant est différente de 0, et  $c \in \overline{\mathcal{K}}$  car  $\overline{\mathcal{K}}$  est invariant. Soit  $W'_1 \subseteq W_1$  le sous-espace engendré par  $W_1 \cap \overline{\mathcal{K}}$  : c'est

un sous-espace non trivial et  $G'$ -invariant car  $W$  et  $\overline{\mathcal{K}}$  sont invariants. De plus,  $\mathcal{K}_1 := \overline{\mathcal{K}} \cap W'_1$  est un cône convexe fermé invariant d'intérieur non vide dans  $W'_1$ .

Choisissons  $g \in G' \setminus \{id, u\}$ ; comme la restriction de  $g^*$  à  $W'_1$  préserve le cône  $\mathcal{K}_1$ , par le Théorème 1.4.1 il existe  $\alpha \in \mathcal{K}_1 \setminus \{0\}$  et  $\lambda(g) \in \mathbb{R}$  tels que  $g^*\alpha = \lambda(g)\alpha$ . Soit  $W_2 := \{w \in W'_1, g^*w = \lambda(g)w\}$ ; c'est un sous-espace non trivial et  $G'$ -invariant de  $W'_1$ , qui intersecte  $\mathcal{K}_1$  de façon non triviale. Si on note  $W'_2 \subseteq W_2$  le sous espace engendré par  $\mathcal{K}_1 \cap W_2$ , le cône  $\mathcal{K}_2 := \mathcal{K}_1 \cap W'_2$  est un cône invariant fermé d'intérieur non vide dans  $W'_2$ .

Une application récursive de ce raisonnement nous fournit un sous espace  $G'$ -invariant non trivial

$$W_\infty := \bigcap W_i$$

et donc une classe  $G'$ -invariante non triviale  $c \in \overline{\mathcal{K}}$ , qui peut s'écrire

$$c = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-l}(u^n)^*c'$$

pour une classe  $c' \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ . □

Soit  $c$  comme dans le Lemme, et notons  $\tau$  le caractère associé à  $c$ . Puisque les caractères  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$  sont deux à deux distincts, quitte à les renommer on peut supposer que  $\tau \notin \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ . L'action de  $G'$  sur  $H^{d,d}(X, \mathbb{R})$  est triviale, et, comme les classes  $c_1, \dots, c_r$  sont  $G'$ -invariantes, on a  $u^*c_i = c_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , donc

$$c_1 \wedge \dots \wedge c_r \wedge c = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-l}(u^n)^*(c_1 \wedge \dots \wedge c_r \wedge c') = 0;$$

un argument récursif à l'aide du Corollaire 3.1.4 montre alors que  $c = 0$ , ce qui est absurde.

On a donc montré que tout  $u^* \in U^*$  est d'ordre fini, ce qui conclut la preuve. □

# Chapitre 4

## Le groupe algébrique engendré par $f^*$

Soit  $X$  une variété compacte de Kähler et  $f \in \text{Aut}(X)$ . On s'intéresse à étudier l'action de  $f^*$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ ; en effet on va voir que, pour pouvoir exploiter la dualité de Serre (Théorème 1.2.1) et la structure entière des espaces de cohomologie, il nous convient souvent de considérer l'action de  $f^*$  sur

$$W = \bigoplus_{p=0}^d H^{2p}(X, \mathbb{R}) = \left( \bigoplus_{p=0}^d H^{2p}(X, \mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Notons  $\phi = f^* : W \rightarrow W$  l'action de  $f^*$  sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $W$ . Pour pouvoir utiliser des théorèmes relatifs aux groupes algébriques (voir [2]), on considère la clôture algébrique  $A$  dans  $\text{GL}(W)$  du groupe engendré par  $\phi$  :

$$A := \overline{\langle \phi \rangle}_{\text{Zar}},$$

où on a noté  $\overline{B}_{\text{Zar}}$  la clôture de Zariski d'un sous-ensemble  $B$  de  $\text{GL}(W)$ .

**Lemme 4.0.2.**  *$A$  est un groupe commutatif, qui possède une structure de variété algébrique réelle lisse. Quitte à considérer un itéré  $f^n$  de  $f$ , on peut aussi supposer que  $A$  est connexe (pour la topologie de Zariski).*

**Définition 4.0.3.** *Un élément  $g$  de  $\text{GL}(W)$  est dit semi-simple s'il existe une base de  $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  dans laquelle  $g$  est diagonal. Si  $G$  est un sous-groupe algébrique de  $\text{GL}(W)$  on note  $G_s \subset G$  le sous-ensemble des éléments semi-simples de  $G$ .*

Un élément  $g$  de  $\mathrm{GL}(W)$  est dit unipotent si  $(g - \mathrm{Id})^N = 0$  pour  $N \geq \dim(W)$ . Si  $G$  est un sous-groupe algébrique de  $\mathrm{GL}(W)$  on note  $G_u \subset G$  le sous-ensemble des éléments unipotents de  $G$ .

Dans le cas de groupes commutatifs on a le résultat suivant (voir [2, p.156]) :

**Proposition 4.0.4.** *Si  $G$  est un sous-groupe algébrique commutatif de  $\mathrm{GL}(W)$ , alors  $G_s$  et  $G_u$  sont des sous-groupes fermés de  $G$  et la composition induit un isomorphisme*

$$G \cong G_s \times G_u$$

en tant que groupes algébriques (i.e. un isomorphisme de groupes abstraits et de variétés algébriques réelles).

*Remarque 4.0.5.* Tout élément  $g \in A$  respecte les mêmes égalités algébriques que  $f^*$ . En particulier :

- $g$  préserve les sous-espaces  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  et  $H^{2p}(X, \mathbb{R})$  ; plus précisément, l'application  $g_{\mathbb{C}}$  induite par  $g$  sur  $V_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  préserve les sous-espaces complexes  $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$  ;
- $g(u \wedge v) = g(u) \wedge g(v)$  pour tous  $u, v \in W$  ;
- si on identifie  $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$  à  $H^{d-p,d-p}(X, \mathbb{R})^{\vee}$  par la dualité de Poincaré, et si on note  $g_{p,p} = g|_{H^{p,p}}$ , alors

$$g_{d-p,d-p} = (g_{p,p}^{-1})^{\vee};$$

de même, si on identifie  $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$  à  $H^{d-p,d-q}(X, \mathbb{C})^{\vee}$  via la dualité de Serre et si on note  $g_{p,q} = (g_{\mathbb{C}})|_{H^{p,q}(X, \mathbb{C})}$ , alors

$$g_{d-p,d-q} = (g_{p,q}^{-1})^{\vee}.$$

Par contre rien n'assure que  $g$  préserve le cône de Kähler.

Grâce à cette remarque, on sait que les sous-groupes  $A_s$  et  $A_u$  préservent tous les deux les sous espaces  $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$  et la dualité de Serre ; on va voir dans les prochaines sections que, dans le cas où la dimension de  $X$  est petite ( $d \leq 3$ ), on obtient des résultats assez précis sur la structure de  $f^*$ .

Dans les prochains paragraphes on analyse certaines propriétés générales de la partie semi-simple.

## 4.1 Partie semi-simple

Dans ce paragraphe on étudie la structure de la partie semi-simple de  $A$ . On va montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.1.1.** *Quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini, on a un isomorphisme de groupes de Lie réels*

$$A_s \cong (\mathbb{R}^+)^{r_0} \times (S^1)^{r_1}$$

pour certains entiers  $r_0, r_1 \geq 0$ .

Soit  $\phi = \phi_s \phi_u$  la décomposition de Jordan de  $\phi$ ; on a  $A_s = \overline{\langle \phi_s \rangle}_{Zar}$ ; toujours quitte à considérer une itérée de  $f$ , il existe une base (réelle) de  $W$  telle que la matrice de  $\phi_s$  dans cette base soit

$$\left( \begin{array}{cccccccc} I_a & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_b & & & & \\ & & & & \mu_1 R_{\alpha_1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mu_c R_{\alpha_c} & \\ & & & & & & & R_{\beta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\beta_d} \end{array} \right), \quad (4.1)$$

où  $I_a$  est la matrice identité de taille  $a \geq 0$ , les  $\lambda_i$  et les  $\mu_j$  sont réels positifs différents de 1, et  $R_\theta$  désigne la matrice de rotation de dimension 2 :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On suppose aussi que les angles de rotation  $\alpha_i, \beta_j$  ne soient pas multiples rationnels de  $2\pi$ .

Etudions d'abord la clôture de Zariski de la restriction de  $\phi_s$  aux sous-espaces invariants de dimension 1 et 2.

**Lemme 4.1.2.** 1. *Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ; si  $\lambda \neq 1$ , alors  $\overline{\langle \lambda \rangle}_{Zar} = \mathbb{R}^* = \text{GL}(\mathbb{R})$ .*

2. Soit  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ; alors  $\overline{\langle R_\alpha \rangle}_{Zar} \cong S^1 \subset \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ .

3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\lambda \neq 1$ , et soit  $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ; alors

$$\overline{\langle \lambda R_\alpha \rangle}_{Zar} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\} =: G_2 \subset \text{GL}(\mathbb{R}^2).$$

*Démonstration.* Pour prouver (1) il suffit de remarquer que  $\langle \lambda \rangle \subset \mathbb{R}^*$ , qui est une variété irréductible de dimension 1; le cardinal de  $\langle \lambda \rangle$  étant infini, c'est un sous-ensemble dense de  $\text{GL}(\mathbb{R})$ .

Pour (2) on raisonne de la même façon :  $\langle R_\alpha \rangle \subset \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cong S^1$ , et, comme c'est un sous-ensemble de cardinal infini d'une variété de dimension 1, il est dense.

Pour (3), soit  $G = \overline{\langle \lambda R_\alpha \rangle}_{Zar}$ . On a

$$\begin{aligned} G \subset H &:= \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{GL}(\mathbb{R}^2) \mid a_{1,1} = a_{2,2}, a_{1,2} = -a_{2,1} \right\} \\ &= \left\{ \mu \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

$H$  est un sous-groupe irréductible de  $\text{GL}(\mathbb{R}^2)$ ; si par l'absurde on avait  $G \neq H$ , il devrait exister un polynôme  $p \in \mathbb{R}[x, y]$  tel que

$$p(\lambda^n \cos(n\alpha), \lambda^n \sin(n\alpha)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Supposons pour simplifier que  $\lambda > 1$ , le cas  $\lambda < 1$  étant analogue; soit  $q$  la partie homogène de degré maximal de  $p$ , et soit  $d$  son degré. Pour  $n \rightarrow +\infty$  on a

$$0 = p(\lambda^n \cos(n\alpha), \lambda^n \sin(n\alpha)) = q(\lambda^n \cos(n\alpha), \lambda^n \sin(n\alpha)) + o(\lambda^{nd-1}),$$

d'où  $q(\lambda^n \cos(n\alpha), \lambda^n \sin(n\alpha)) = \lambda^{nd} q(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha)) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow +\infty$ . On en déduit en particulier que  $q(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha)) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow +\infty$  et donc, par densité de  $\{(\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))\}$  dans  $S^1$ , que  $q(\cos \theta, \sin \theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le lieu des zéros du polynôme  $q$  contient donc celui du polynôme  $r(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ; donc  $q$  est homogène et il est contenu dans l'idéal  $(x^2 + y^2 - 1)$ . Il est donc identiquement nul, d'où une contradiction.  $\square$

**Corollaire 4.1.3.** *Quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini,  $A_s$  est isomorphe, comme groupe de Lie, à un sous-groupe de Lie connexe de*

$$(\mathbb{R}^+)^{n_0} \times (S^1)^{n_1} \cong \mathbb{R}^{n_0} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{n_1}$$

pour quelques  $n_0, n_1 \geq 0$ .



*Démonstration.* On a une inclusion naturelle  $\phi_s \in (\mathbb{R}^*)^b \times (S^1)^c \times G_2^d$ , qui induit une inclusion  $A_s \subset (\mathbb{R}^*)^b \times (S^1)^c \times G_2^d$ . L'énoncé est obtenu en substituant les facteurs  $\mathbb{R}^*$  par leurs sous-groupes  $\mathbb{R}^+$  d'indice 2 et les facteurs  $G_2$  par le groupe de Lie isomorphe  $\mathbb{R}^+ \times S^1$ .  $\square$

**Lemme 4.1.4.** *Tout sous-groupe de Lie fermé  $A \subset \mathbb{R}^{n_0} \times (S^1)^{n_1}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{r_0} \times (S^1)^{r_1} \times \Lambda$  pour quelques  $r_0, r_1 \geq 0$ , où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{R}^{s_0} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{s_1}$ , pour des entiers  $s_0, s_1 \geq 0$  tels que  $r_0 + s_0 \leq n_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $n = n_0 + n_1$  et

$$\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow G$$

le revêtement universel de  $G$ . Soit  $B = \pi^{-1}(A)$ ;  $B$  est un sous-groupe de Lie de  $\mathbb{R}^n$  fermé, donc il est isomorphe à  $\mathbb{R}^r \times \Lambda'$  pour un  $r \leq n$ , où  $\Lambda'$  est un réseau de  $\mathbb{R}^{n-r}$ . Le Lemme est prouvé par passage à la projection.  $\square$

On peut maintenant montrer le Théorème 4.1.1.

*Preuve du Théorème 4.1.1.* Par le Lemme ??, on a

$$A_s \cong \mathbb{R}^{r_0} \times (S^1)^{r_1} \times \Lambda$$

pour un réseau  $\Lambda$ . Quitte à remplacer  $f$  par un itéré, on peut supposer que  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  où  $m \leq n_0 - r_0$ . Il reste à montrer que  $\Lambda = \{0\}$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ . Alors, si on note  $\exp: \mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^+)^m$  l'isomorphisme exponentiel de groupes de Lie, on a  $n\lambda \in \Lambda$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , donc  $\exp(\lambda)^n \in A$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Mais alors, par Zariski-densité,  $\exp(\lambda)^\mu \in A$  pour tout  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , donc toute la droite engendrée par  $\lambda$  est contenue dans  $\mathbb{R}^{r_0} \times (S^1)^{r_1} \times \Lambda$ ; en particulier  $\lambda \notin \Lambda$ , ce qui nous mène à une contradiction.  $\square$



# Chapitre 5

## Dimension 2

Le cas d'automorphismes de surfaces complexes a été beaucoup étudié, et on a des résultats très précis sur les propriétés algébriques de  $\lambda_1$  (voir par exemple [4]). Les techniques utilisées en dimension 2 ne marchent pas directement en dimension 3 ou supérieure, mais il est instructif de les voir quand même comme "rechauffement" pour l'analyse de la dimension 3.

Soit  $X$  une variété complexe de Kähler de dimension 2 et  $f: X \rightarrow X$  un automorphisme holomorphe ; on va considérer son action  $\phi = f^*$  sur l'espace vectoriel réel

$$W := \bigoplus_{p=0}^2 H^{2p}(X, \mathbb{R}).$$

On remarque que, comme l'action de  $\phi$  sur  $H^0(X, \mathbb{R})$  et sur  $H^4(X, \mathbb{R})$  est triviale, il suffit de regarder son action sur  $H^2(X, \mathbb{R})$ . Comme  $H^2(X, \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , il existe une base de  $W$  telle que les matrices de  $\phi$  et de  $\phi^{-1} = (f^{-1})^*$  pour cette base sont à coefficients entiers, et en particulier on a  $\det(f^*) = \pm 1$ .

De plus, par le Théorème de Birkhoff (Théorème 1.4.1) appliqué à  $f$  et  $f^{-1}$ , il existe deux classes dans le cône de Kähler  $\omega_1, \omega_2 \in \bar{\mathcal{K}}$  qui sont vecteurs propres pour  $\phi$  de valeurs propres  $\lambda_1(f)$  et  $\lambda_1(f^{-1})^{-1}$  respectivement.

Soit, comme dans la Section 4,  $A = \langle \phi \rangle_{Zar}$ . On a vu qu'on a une décomposition

$$A \cong A_s \times A_u$$

de  $A$  en le produit de sa partie semi-simple  $A_s$  et de sa partie unipotente  $A_u$ . La Remarque 4.0.5 nous permet d'étudier séparément les cas unipotent et semi-simple, pourvu qu'on n'utilise que les propriétés algébriques de  $\phi$  (i.e.

il faut faire attention quand on utilise l'invariance du cône de Kähler).  
 À l'analyse des cas unipotent et semi-simple suit un paragraphe où on exclut la possibilité du cas mixte (où  $f^*$  n'est ni unipotente ni semi-simple) et un paragraphe d'exemples sur les tores complexes de dimension 2, qui montrent l'optimalité des énoncés 5.1.1 et 5.2.3.

## 5.1 Cas unipotent

Soit  $g \in A_u$  un élément non trivial; par exemple on peut penser à la partie unipotente de  $f^*$ , qui coïncide avec  $f^*$  lorsque  $\lambda_1(f) = 1$ .  
 Considérons le plus grand sous-espace de Jordan pour  $g$   $V \subset H^2(X, \mathbb{R})$ , de dimension  $k \geq 1$ . Dans une base adéquate  $u_1, \dots, u_k$  de  $V$ ,  $g|_V$  est représentée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 5.1.1.** *Le bloc de Jordan maximal pour  $g$  est de taille  $k \leq 3$ , et il est l'unique bloc non trivial. Donc*

$$\tau_1(g) = k - 1 \leq 2.$$

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde en supposant que  $k \geq 4$ . Considérons l'action de  $g^n$  sur l'élément  $u_4 \wedge u_4$ . Par la Proposition 1.3.1 on a

$$g^n(u_4 \wedge u_4) = g^n(u_4) \wedge g^n(u_4) =$$

$$P_3^2(n)u_1 \wedge u_1 + 2P_2(n)P_3(n)u_1 \wedge u_2 + P_1(n)P_3(n)u_1 \wedge u_3 + P_2^2(n)u_2 \wedge u_2 + o(n^4).$$

Puisque l'action de  $g$  sur  $H^4(X, \mathbb{R})$  est triviale, il faut que les termes avec croissance polynomiale non constante s'annulent : donc  $u_1 \wedge u_1 = u_1 \wedge u_2 = 0$  et

$$a_2^2 u_2 \wedge u_2 + a_1 a_3 u_1 \wedge u_3 = 0.$$

On refait le même raisonnement avec  $u_3 \wedge u_3$  :

$$g^n(u_3 \wedge u_3) = g^n(u_3) \wedge g^n(u_3) =$$

$$P_2^2(n)u_1 \wedge u_1 + 2P_1(n)P_2(n)u_1 \wedge u_2 + P_0(n)P_2(n)u_1 \wedge u_3 + P_1^2(n)u_2 \wedge u_2 + o(n^2).$$

Donc, comme avant,

$$a_0 a_2 u_1 \wedge u_3 + a_1^2 u_2 \wedge u_2 = 0.$$

Il suffit d'appliquer la Proposition 1.3.1 pour vérifier que les deux équation linéaires qu'on a abtenues sont indépendantes ; donc  $u_1 \wedge u_3 = u_2 \wedge u_2 = 0$ , ce qui nous emmène à une contradiction grâce au Corollaire 1.1.2 car on avait déjà  $u_1 \wedge u_1 = u_1 \wedge u_2 = 0$ .

Maintenant, supposons par l'absurde qu'il existe un deuxième bloc de Jordan non trivial, avec base  $v_1, \dots, v_h$ ,  $h \geq 2$ . On a  $v_1 \wedge v_1 = 0$ , sinon  $\|g^n(v_2 \wedge v_2)\| \sim c^{te} n^2$  ; donc, par le Corollaire 1.1.2,  $u_1 \wedge v_1 \neq 0$ . Mais alors

$$\|g^n(u_2 \wedge v_2)\| \sim c^{te} n^2,$$

contradiction. □

*Remarque 5.1.2.* Si de plus  $g$  préserve le cône  $C_{q>0} = \{\alpha \in H^2(X, \mathbb{R}) \mid q(\alpha, \alpha) > 0\} \subset H^2(X, \mathbb{R})$  (par exemple si  $g = f^*$ , avec  $f^*$  unipotente), par la Proposition 2.3.5 on a que  $k$  est impair, donc soit  $f_1^* = id$ , soit la norme de  $(f_1^*)^n$  croît comme  $n^2$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On va voir dans le paragraphe 5.3 que le cas mixte n'est pas possible. Par conséquent,  $f^*$  admet des blocs de Jordan non triviaux seulement si  $\lambda_1(f) = 1$ , et dans ce cas il y a au plus un bloc de Jordan non trivial, dont la dimension est exactement 3.

## 5.2 Cas semi-simple

On s'intéresse aux valeurs propres de  $\phi = f^*$  sur  $H^2(X, \mathbb{R})$ , qui sont les mêmes que sa partie semi-simple  $\phi_s$ .

Soit  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$  l'ensemble des valeurs propres de  $f^*$  (avec multiplicités). Le Lemme 1.1.2 et le fait que l'action de  $\phi$  sur  $H^{2,2}(X, \mathbb{R})$  est triviale impliquent directement le résultat suivant :

**Lemme 5.2.1.** *Si  $\lambda_i, \lambda_j \in \Lambda$ , avec  $i \neq j$ , alors*

$$1 \in \{|\lambda_i|^2, \lambda_i \bar{\lambda}_j, |\lambda_j|^2\}.$$

**Définition 5.2.2.** *Un entier algébrique réel strictement supérieur à 1  $\alpha$  est un nombre de Salem si tous ses conjugués ont un module inférieur ou égal à 1, et au moins un conjugué a un module égal à 1.*

*Dans ce cas, les conjugués de  $\alpha$  sont  $\alpha^{-1}$  et des nombres de module 1.*

**Corollaire 5.2.3.** *Le degré de croissance  $\lambda_1(f)$  est soit 1, soit un nombre quadratique (racine d'un polynôme du type  $x^2 - nx + 1$  pour un  $n \geq 3$ ), soit un nombre de Salem.*

*En particulier les valeurs propres de  $f^* : W \rightarrow W$  de module différent de 1 sont exactement deux :  $\lambda_1(f)$  et  $\lambda_1(f)^{-1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha = \lambda_1(f)$  et soit  $\beta \in \Lambda$  tel que  $|\beta| \neq 1$  (un tel  $\beta$  existe car  $\det(f^*) = 1$ ). Alors, par le Lemme,  $1 = \alpha\bar{\beta}$ , c'est-à-dire  $\beta = \bar{\beta} = \alpha^{-1}$ .

Remarquons que, si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , alors  $\alpha \in \{1, -1\}$  car  $\alpha$  est un entier algébrique. Supposons maintenant que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , et soit  $p$  son polynôme minimal sur  $\mathbb{Z}$ .

Le terme constant de  $p$  est le produit des conjugués de  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha$ , des nombres complexes de module 1 et, éventuellement,  $\alpha^{-1}$ . Si  $\alpha^{-1}$  n'était pas un conjugué de  $\alpha$ , le terme constant de  $p$  serait  $\alpha$ , ce qui est absurde. Donc  $\alpha^{-1}$  est un conjugué de  $\alpha$ . On a deux cas :

- $\alpha^{-1}$  est le seul conjugué de  $\alpha$  : alors on a

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1,$$

avec  $\alpha + \alpha^{-1} = n \in \mathbb{Z}$ . Un petit calcul montre que, pour que  $\alpha > 1$ , il faut  $n \geq 3$  ;

- $\alpha$  possède au moins un conjugué de module 1, donc c'est un nombre de Salem.

□

### 5.3 Cas mixte

Dans les paragraphes précédents on a étudié séparément les cas où  $f^*$  est semi-simple ou unipotente. On va maintenant appliquer les résultats trouvés à la situation générale, et on va voir que la situation mixte, avec  $\lambda_1 \neq 1$  et des blocs de Jordan non triviaux, n'est pas possible.

**Proposition 5.3.1.** *Si  $\lambda_1(f) \neq 1$ , alors la partie unipotente de  $f^*$  est triviale ; autrement dit,  $f^*$  est semi-simple.*

*Démonstration.* Soient  $v_1, v_2$  des vecteurs propres pour les valeurs propres  $\lambda := \lambda_1(f)$  et  $\lambda^{-1}$ . Si on note  $Q: H^2(X, \mathbb{R}) \times H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  le produit d'intersection, comme

$$Q(u, v) = Q(f^*u, f^*v),$$

on doit avoir  $Q(v_1, v_1) = 0 = Q(v_2, v_2)$ , et donc, comme le Corollaire 1.1.2 assure que la restriction de  $Q$  à  $W := \langle v_1, v_2 \rangle$  n'est pas nulle,  $Q|_W$  a signature  $(1, 1)$ . Par le Théorème 1.1.1, la restriction de  $Q$  à  $V := H^2(X, \mathbb{R})^\perp$  est alors de signature  $(0, N - 2)$ , où  $N$  est la dimension de  $H^2(X, \mathbb{R})$ , et donc, comme  $f^*$  préserve  $Q$ , son action sur  $W^\perp$  est conjuguée à celle de  $O_{N-2}(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^{N-2}$ . En particulier la norme de  $(f|_V^*)^n$  est bornée lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , donc  $f^*$  n'a pas de bloc de Jordan non trivial.  $\square$

## 5.4 Exemples sur les tores

Dans ce paragraphe on suit l'exposition de [12]. Tout automorphisme linéaire de  $\mathbb{C}^2$  donné dans une base  $z_1, z_2$  par une matrice  $M \in SL_2(\mathbb{Z}[i])$  préserve le réseau  $\Lambda = (\mathbb{Z}[i])^2$ , et donc induit un automorphisme

$$f: X \rightarrow X,$$

où  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ .

Dans la base  $dz_1, dz_2$  de  $H^{1,0}(X, \mathbb{C})$ , l'automorphisme  $f^*: H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{1,0}(X, \mathbb{C})$  est donné par la matrice  $M^t$ ; de même, pour la base duale  $d\bar{z}_1, d\bar{z}_2$  de  $H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ ,  $f^*$  est donné par la matrice  $\overline{M^t}$ .

Le produit extérieur induit un isomorphisme

$$H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \otimes H^{0,1}(X, \mathbb{C}) \cong H^{1,1}(X, \mathbb{C}),$$

et donc la matrice de  $f_1^*$  dans la base  $dz_1 \wedge d\bar{z}_1, dz_1 \wedge d\bar{z}_2, dz_2 \wedge d\bar{z}_1, dz_2 \wedge d\bar{z}_2$  est

$$M_{1,1} = M^t \otimes \overline{M^t} := (m_{j,i} \overline{m_{l,k}})_{i,j,k,l=1,2},$$

où les  $m_{i,j}$  sont les coefficients de  $M$ .

Maintenant voyons des exemples avec des matrices concrètes.

*Exemple 5.4.1.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice unipotente, et sa forme de Jordan est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Exemple 5.4.2.*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $|a| > 2$ ; alors  $M$  est diagonalisable avec valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $|\alpha| > 1$  et  $\beta = \alpha^{-1}$ .

Donc  $M_{1,1}$  est diagonalisable avec valeurs propres  $\alpha\bar{\alpha}, \alpha\bar{\beta}, \beta\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}$ ; parmi eux, les seuls qui n'ont pas module égal à 1 sont  $\lambda = |\alpha|^2$  et  $|\beta|^2 = \lambda^{-1}$ .

*Exemple 5.4.3.* On peut généraliser l'exemple précédent : on cherche pour quels ensembles de quatre entiers algébriques  $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$  il existe un automorphisme  $f$  d'un certain tore complexe  $X$  tel que  $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{C})$  soit diagonalisable avec valeurs propres les  $\alpha_i\beta_j$ .

On prétend que si  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  sont les racines, toutes non réelles, d'un polynôme  $p \in \mathbb{Z}[X]$  de degré 4 avec  $p(0) = 1$ , alors un tel automorphisme existe. Considérons d'abord l'espace réel  $\mathbb{R}^4$ ; pour tout  $p(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 1$ , la *matrice compagnon de  $p$* , définie par

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

est telle que son polynôme caractéristique est  $p$ .

Comme, dans notre cas,  $M_p$  et  $M_p^{-1}$  préservent le réseau  $\mathbb{Z}^4$ ,  $M_p$  induit un automorphisme  $f$  du tore réel de dimension 4

$$\tilde{X} := \mathbb{R}^4 / \mathbb{Z}^4$$



tel que l'application induite en cohomologie  $f^*: H^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$  (qui est représentée, dans la base canonique duale, par la matrice  $M_p^t$ ) est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec valeurs propres  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ .

Maintenant il ne nous reste qu'à identifier  $\mathbb{R}^4$  à  $\mathbb{C}^2$  de telle façon que  $f$  induise un automorphisme holomorphe de  $\mathbb{C}^2$  et que  $\alpha, \beta$  (respectivement,  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ ) soient les valeurs propres de  $f^*$  restreint à  $H^{1,0}(X, \mathbb{C})$  (respectivement, à  $H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ ), où on a appelé  $X$  le tore complexe qu'on obtient en appliquant la structure complexe à  $\tilde{X}$ .

Une structure complexe sur  $\mathbb{R}^4$  est un automorphisme linéaire (dit de structure complexe)  $J: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tel que  $J^2 = -Id$ . Un automorphisme linéaire  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  est holomorphe si et seulement si  $f \circ J = J \circ f$ .

Soit  $V_\alpha$  (respectivement  $V_\beta$ ) le plan de  $\mathbb{R}^4$  dont le complexifié est engendré par les vecteurs propres de valeurs propres  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  (respectivement  $\beta$  et  $\bar{\beta}$ ). Sur  $V_\alpha \cong \mathbb{R}^2$ ,  $f$  agit comme une homothétie de rapport  $|\alpha|$  composée avec une rotation d'angle  $\pm \arg \alpha$ , selon l'orientation choisie; on fixe l'orientation de  $\mathbb{R}^2$  de telle façon que l'application linéaire complexe induite par  $f$  sur  $V_\alpha \cong \mathbb{C}$  soit  $z \mapsto \alpha z$ , et on définit  $J$  sur  $V_\alpha$  comme une rotation de  $+\pi/2$ . On fait la même opération sur  $V_\beta$ .

Il est clair que  $J$  commute avec  $f$ , et, grâce aux orientations choisies, les valeurs propres de  $f^*$  restreint à  $H^{1,0}(X, \mathbb{C})$  (respectivement, à  $H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ ) sont  $\alpha$  et  $\beta$  (respectivement,  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$ ).

On en déduit, grâce au fait que pour les tores  $H^{1,1}(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \wedge H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ , que les valeurs propres de  $f_1^*$  sont

$$\alpha\bar{\alpha}, \alpha\bar{\beta}, \beta\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}.$$

On remarque que, comme  $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = 1$ , les seules valeurs propres de  $f_1^*$  de module différent de 1 sont  $|\alpha|^2$  et  $|\beta|^2 = |\alpha|^{-2}$ .



# Chapitre 6

## Dimension 3 : introduction et cas unipotent

On commence ici la partie originale de ce mémoire : l'analyse de la dynamique des automorphismes de variétés kähleriennes compactes de dimension 3.

Dans ce chapitre on va introduire le problème et la notation, et on va traiter le cas unipotent.

### 6.1 Introduction

Soit  $X$  une variété compacte de Kähler compacte de dimension 3 et  $f: X \rightarrow X$  un automorphisme holomorphe ; comme dans le cas en dimension 2 on va considérer son action sur l'espace vectoriel réel

$$W := \bigoplus_{p=0}^3 H^{2p}(X, \mathbb{R});$$

soit  $\phi = f^*: W \rightarrow W$ ,  $A = \overline{\langle \phi \rangle}_{Zar}$  ; pour  $g \in A$  on note  $g_p: H^{2p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{R})$  la restriction de  $g$  à  $H^{2p}(X, \mathbb{R})$  (les sous-espaces  $H^{2p}(X, \mathbb{R}) \subset W$  étant  $A$ -invariants par la Remarque 4.0.5).

On a remarqué dans la Section 4 qu'on a un isomorphisme de groupes algébriques

$$A \cong A_s \times A_u,$$

où  $A_s$  et  $A_u$  sont respectivement la partie semi-simple et la partie unipotente de  $A$ .

*Remarque 6.1.1.* On rappelle (voir la Remarque 4.0.5) que l'action de  $f^*$  (donc de  $A$ ) sur  $H^0(X, \mathbb{R})$  et sur  $H^6(X, \mathbb{R})$  est triviale, alors que son action sur  $H^4(X, \mathbb{R})$  est l'inverse de la duale de celle sur  $H^2(X, \mathbb{R})$ . Donc pour étudier l'action de  $f^*$  sur  $W$  il suffit de se concentrer sur son action sur  $H^2(X, \mathbb{R})$ .

On commence par analyser le cas unipotent : on arrive à déduire que, si  $g \in A_u$ , alors

$$\tau_1(g) \leq 4,$$

qu'il existe un unique bloc de Jordan de dimension maximale  $h \leq 5$ , et que les autres blocs sont de dimension au plus  $(h + 1)/2 \leq 3$ . Dans le dernier paragraphe, on donne des exemples sur les tores complexes qui montrent l'optimalité de ces bornes.

## 6.2 Cas unipotent

Considérons  $g \in A_u$  : on peut penser par exemple à la partie unipotente de  $f^*$ , ou à  $(f^*)^N$  pour un  $N$  convenable si  $\lambda_1(f) = 1$ . On garde la notation du paragraphe 5.1.

### 6.2.1 Borne sur le degré dynamique polynômial

Maintenant on va montrer que le degré de croissance polynomial de  $g_2$

$$\tau_2(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|g_2^n\|}{\log n},$$

qui, par le Corollaire 1.2.2 est égal à celui de  $g_1$

$$\tau_1(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|g_1^n\|}{\log n},$$

vérifie

$$\tau_2(g) \geq 2\tau_1(g) - 4,$$

ce qui nous permettra de conclure que  $\tau_1 \leq 4$ .

*Remarque 6.2.1.* La restriction de  $g_{\mathbb{C}}$  à l'espace invariant

$$V := H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C}),$$

qui dans  $H^2(X, \mathbb{C})$  est complémentaire à  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ , ne contient pas de bloc de Jordan de dimension maximale. Autrement dit, comme  $g_{\mathbb{C}}$  préserve la décomposition de Hodge, les seuls blocs de Jordan maximaux de  $g_{\mathbb{C}}: H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$  sont localisés dans  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ .

En effet soient  $v_1, \dots, v_k \in H^2(X, \mathbb{C})$  indépendants, avec  $k > 1$ , tels que  $g(v_1) = v_1$  et  $g(v_h) = v_h + v_{h-1}$  pour  $h = 2, \dots, k$ ; supposons par l'absurde que  $k$  soit maximal et que  $v_1, \dots, v_k \in V$ . Alors

$$v_k \wedge \bar{v}_k = g^n(v_k \wedge \bar{v}_k) = n^{2k-2}v_1 \wedge \bar{v}_1 + O(n^{2k-1});$$

comme  $v_1 \wedge \bar{v}_1 \neq 0$ , la restriction  $g_{\mathbb{C}}: H^4(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{C})$  doit avoir un bloc de Jordan de dimension  $2k - 1$ , et, par dualité, le même est vrai pour la restriction de  $g_{\mathbb{C}}$  à  $H^2(X, \mathbb{C})$ ; ceci contredit la maximalité de  $k$ .

On considère  $u_1, \dots, u_k \in H^2(X, \mathbb{R})$  indépendants et tels que  $g(u_1) = u_1$ ,  $g(u_h) = u_h + u_{h-1}$  pour  $h = 2, \dots, k$ . On suppose que  $k$  soit maximal, de telle façon que  $k - 1 = \tau_1(g)$ .

**Proposition 6.2.2.** *La norme de  $(g_2)^n$  croît au moins comme  $e^{te}n^{2k-6}$ .*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant que  $\|g_2^n\| = o(n^{2k-6})$ .

On considère  $u_k \wedge u_k, u_{k-1} \wedge u_{k-1} \in H^4(X, \mathbb{R})$ .

En notant  $P_h = P_h(n)$ , on a

$$\begin{aligned} g^n(u_k \wedge u_k) &= g^n(u_k) \wedge g^n(u_k) = \\ &= (P_{k-1}u_1 + P_{k-2}u_2 + P_{k-3}u_3 + \dots) \wedge (P_{k-1}u_1 + P_{k-2}u_2 + P_{k-3}u_3 + \dots) = \\ &= P_{k-1}^2(u_1 \wedge u_1) + 2P_{k-1}P_{k-2}(u_1 \wedge u_2) + (2P_{k-1}P_{k-3}u_1 \wedge u_3 + P_{k-2}^2u_2 \wedge u_2) + \dots \end{aligned}$$

Si  $u_1 \wedge u_1 \neq 0$  ou si  $u_1 \wedge u_2 \neq 0$ , la norme de  $g_2^n$  croît au moins comme  $n^{2k-3}$ ; on suppose donc que  $u_1 \wedge u_1 = u_1 \wedge u_2 = 0$ . Par le Corollaire 1.1.2, on a alors  $u_2 \wedge u_2 \neq 0$ .

Comme on a supposé que la croissance asymptotique est inférieure à  $n^{2k-6}$ , on doit aussi avoir

$$2a_{k-1}a_{k-3}(u_1 \wedge u_3) + a_{k-2}^2(u_2 \wedge u_2) = 0,$$

c'est-à-dire, grâce au point 2 de la Proposition 1.3.1,

$$a_{k-1}a_{k-2}(2(u_1 \wedge u_3)(k-2) + (u_2 \wedge u_2)(k-1)) = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} g^n(u_{k-1} \wedge u_{k-1}) &= g^n(u_{k-1}) \wedge g^n(u_{k-1}) = \\ &= (P_{k-2}u_1 + P_{k-3}u_2 + P_{k-4}u_3 + \dots) \wedge (P_{k-2}u_1 + P_{k-3}u_2 + P_{k-4}u_3 + \dots) = \\ &= 2P_{k-2}P_{k-4}(u_1 \wedge u_3) + P_{k-3}^2(u_2 \wedge u_2) + \dots \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, pour que la croissance de la norme soit inférieure à  $n^{2k-6}$ , il faut que

$$2(u_1 \wedge u_3)a_{k-2}a_{k-4} + (u_2 \wedge u_2)a_{k-3}^2 = 0,$$

et donc

$$a_{k-2}a_{k-3}(2(u_1 \wedge u_3)(k-3) + (u_2 \wedge u_2)(k-2)) = 0.$$

On a obtenu deux relations linéaires entre  $u_2 \wedge u_2$  et  $u_1 \wedge u_3$ ; comme

$$\det \begin{pmatrix} 2(k-2) & k-1 \\ 2(k-3) & k-2 \end{pmatrix} = 2,$$

les deux relations sont indépendantes, donc on doit avoir

$$u_1 \wedge u_3 = u_2 \wedge u_2 = 0,$$

ce qui est absurde. □

**Corollaire 6.2.3.** *Quand  $n \rightarrow +\infty$ , la norme de  $g_1^n$  croît comme un polynôme en  $n$  de degré au plus 4; autrement dit*

$$\tau_1(g) \leq 4.$$

*Démonstration.* On sait que la norme de  $g_1^n$  croît comme  $c^{te}n^{k-1}$ ; mais on vient de montrer que la norme de  $g_2^n$ , qui est égale à celle de  $g_1^n$  par dualité, croît au moins comme  $c^{te}n^{2k-6}$ . On doit donc avoir  $2k-6 \leq k-1$ , c'est-à-dire  $k \leq 5$ . Donc

$$\tau_1(g) = k-1 \leq 4. \quad \square$$

### 6.2.2 Borne sur la dimension des blocs non maximaux

Avec un raisonnement tout à fait analogue à celui qu'on a utilisé pour montrer la Proposition 6.2.2, on trouve d'autres contraintes aux dimensions des blocs de Jordan de  $g$ .

**Proposition 6.2.4.** *Si  $k$  est la dimension du plus grand bloc de Jordan de  $g_1$  et  $h$  est la dimension d'un autre bloc de Jordan de  $g_1$ , on a*

$$h \leq \frac{k+1}{2}.$$

*En particulier, si  $k > 1$ , il y a un unique bloc de taille maximale, et les blocs non maximaux sont de dimension au plus 3.*

*Démonstration.* Soient  $v_1, \dots, v_k$  et  $w_1 \dots w_h$  bases de Jordan pour les sous espaces relatifs aux blocs considérés. On suppose  $h > 1$  (si ce n'est pas le cas, l'inégalité est trivialement vraie); on considère l'action de  $g_2^n$  sur les trois éléments  $v_k \wedge v_k, v_k \wedge w_h, w_h \wedge w_h$ .

Par le Corollaire 1.1.2, les éléments  $v_1 \wedge v_1, v_1 \wedge w_1$  et  $w_1 \wedge w_1$  ne peuvent pas s'annuler simultanément; comme  $g^n v_k \sim c^{te} n^{k-1} v_1$  et  $g^n w_h \sim c^{te} n^{h-1} w_1$ , cela entraîne que

$$c^{te} n^{k-1} = \|g_1^n\| = \|g_2^n\| \geq c^{te} n^{2(h-1)},$$

d'où

$$h \leq \frac{k+1}{2}.$$

□

*Remarque 6.2.5.* Si  $g$  préserve le cône  $C_{q \geq 0} := \{v \in H^2(X, \mathbb{R}) \mid q(v, v) \geq 0\} \subset H^2(X, \mathbb{R})$  (par exemple si  $g = f^*$  avec  $\lambda_1(f) = 1$ ), la Proposition 2.3.5 nous permet de spécifier ultérieurement les structures de blocs de Jordan possibles pour  $g$  (rappelons que le seul bloc de Jordan de dimension maximale est contenu dans  $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ ):

- si  $k = 5$ , tous les autres blocs sont de dimension au plus 3;
- $k = 4$  ou  $k = 2$  contredisent la Proposition 2.3.5;
- si  $k = 3$ , tous les autres blocs sont de dimension au plus 2;
- si  $k = 1$ , alors  $g = Id$ .

En particulier, si  $\lambda_1(f) = 1$ ,  $f^*$  ne peut pas avoir de bloc de Jordan de dimension 4.

### 6.2.3 Exemples unipotents sur les tores

Comme au début du paragraphe 5.4, on ne considère que le tore

$$X := \mathbb{C}^3 / \Lambda \quad \Lambda = (\mathbb{Z}[i])^3.$$

Toute application linéaire  $\tilde{f} \in SL_3(\mathbb{Z}[i])$  est telle que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{f}^{-1}$  préservent le réseau  $\Lambda$ , et donc induit un automorphisme  $f: X \rightarrow X$ .

Si  $\tilde{f}$  est donné par la matrice  $M$ , alors l'action de  $f^*$  sur  $H^{1,0}(X, \mathbb{C})$  est donnée, dans la base duale, par la matrice  $M^t$ ; finalement, l'action de  $f^*$  sur  $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$  est donnée par la matrice

$$M_{1,1} = M^t \otimes \overline{M^t} := (m_{j,i} \overline{m_{l,k}})_{i,j,k,l=1,2}.$$

*Exemple 6.2.6.* Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que  $M_{1,1}$  est unipotente et ses blocs de Jordan sont de dimension 1, 3 et 5.

*Exemple 6.2.7.* Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



On a alors

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et ses blocs de Jordan sont de dimension 2, 2, 2 et 3.

On a donc l'optimalité pour les bornes du Corollaire 6.2.3 et de la Proposition 6.2.4.



# Chapitre 7

## Dimension 3 : cas semi-simple

On se concentre maintenant sur la partie semi-simple  $A_s$  de  $A = \overline{\langle f^* \rangle}_{Zar}$  ; comme  $A_s = \langle f_s^* \rangle_{Zar}$ , où  $f_s^*$  est la partie semi-simple de  $f^*$ , on suppose dorénavant que  $f^*$  soit semi-simple (on ne pourra pas utiliser l'invariance du cône de Kähler car en général  $f_s^*$  n'est pas induit par un automorphisme).

*Remarque 7.0.8.* Par dualité de Serre et comme la restriction de  $f^*$  à  $H^0(X, \mathbb{R})$  est triviale, pour étudier la restriction de  $f^*$  à

$$\bigoplus_{p=0}^3 H^{2p}(X, \mathbb{R})$$

il suffit d'étudier sa restriction à

$$V = H^2(X, \mathbb{R}).$$

Dorénavant, si on ne spécifie pas autrement, on ne considère que les valeurs propres de la restriction de  $f^*$  à  $V$ .

Rappelons le Théorème 4.1.1 : quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini, on a un isomorphisme de groupes de Lie

$$A_s \cong (\mathbb{R}^+)^{r(f)} \times (S^1)^{r'(f)}$$

pour des  $r(f), r'(f) \geq 0$ .

Le résultat central de ce paragraphe est le théorème suivant :

**Théorème 7.0.9.** *Si  $f$  est un automorphisme d'une variété complexe de Kähler compacte de dimension 3, alors  $r(f) \leq 2$ .*

Intuitivement, cela veut dire que les modules des valeurs propres de  $f^*$  peuvent être décrits par au plus deux paramètres indépendents. Après avoir montré le théorème, on va voir les conclusions qu'on peut en tirer sur l'arithmétique de  $\lambda_1(f)$  dans les deux cas  $r = 1$  et  $r = 2$ .

Par exemple, on va montrer une version plus précise du Théorème suivant (voir le Théorème 7.2.2).

**Théorème 7.0.10.** *Si  $f$  est un automorphisme d'une variété complexe de Kähler compacte de dimension 3, alors le premier degré dynamique  $\lambda_1(f) =: \lambda_1$  est un entier algébrique tel que les modules de ses conjugués sont au plus les 6 nombres suivants :*

$$\lambda_1, \quad \lambda_2^{-1}, \quad \lambda_1^{-1}\lambda_2, \quad \sqrt{\lambda_1^{-1}}, \quad \sqrt{\lambda_2}, \quad \sqrt{\lambda_1\lambda_2^{-1}},$$

où on note  $\lambda_2 := \lambda_2(f)$ .

On remarque qu'en dimension 2 on a un analogue du Théorème 7.0.9 : si  $f$  est un automorphisme d'une surface complexe compacte de Kähler, alors  $r(f) \leq 1$ .

## 7.1 Les poids de $f^*$ : définition, premières propriétés et poids maximaux

Pour montrer le Théorème 7.0.9 on va développer une théorie des caractères. Choisissons une base réelle de  $V$  telle que la matrice de  $f^*_{|H^2(X, \mathbb{R})}$  dans cette base soit celle de (4.1). Avec un petit abus de notation, on appelle encore  $\lambda_i, \mu_j$ ,  $i = 1, \dots, b$ ,  $j = 1, \dots, c$  les morphismes de groupes de Lie

$$\lambda_i, \mu_j: A_s \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui à un élément  $g \in A_s$  associent la valeur propre relative à la colonne  $a + i$  (respectivement, le module des deux valeurs propres relatives au  $j$ -ème bloc de similitude de  $f^*_{|H^2(X, \mathbb{R})}$ ). Ce sont des morphismes non triviaux car  $\lambda_i \neq 1 \neq \mu_j$  pour tout  $i$  et  $j$ .

En effet, comme tout morphisme de groupes de Lie  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est constant, on a, pour tout  $i$ ,

$$\lambda_i(x_1, \dots, x_r, \theta_1, \dots, \theta_{r'}) = x_1^{m_{i,1}} \dots x_r^{m_{i,r}}$$

## 7.1. LES POIDS DE $F^*$ : DÉFINITION, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS ET POIDS MAXIMAUX 69

pour des  $m_{i,1}, \dots, m_{i,r} \in \mathbb{R}$ . On a la même situation pour les  $\mu_j$ .

Le résultat suivant, qui est bien connu, descend directement de la définition de  $A$  comme clôture algébrique du groupe engendré par  $f^*$ .

**Proposition 7.1.1.** *Pour tout  $\lambda_i$  et pour tout  $\mu_j$ , à isomorphisme de  $(\mathbb{R}^+)^r$  près, les  $m_{h,k}$  sont entiers.*

*Démonstration.* Revenons à la preuve du Théorème 4.1.1. On a considéré  $A_s$  comme un sous-groupe algébrique de  $(\mathbb{R}^*)^b \times G_2^c \times (S^1)^d$ , où

$$G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} y & -z \\ z & y \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc  $A_s \cap (\mathbb{R}^*)^b \times G_2^c$  est le lieu de zéros d'un idéal  $I$  de polynômes en les variables  $x_1, \dots, x_b, y_1, z_1, \dots, y_c, z_c$  (on peut ignorer les facteurs  $S^1$  car ils ne vont pas influencer la partie  $(\mathbb{R}^+)^r$ ); soit  $p(x, y, z) \in I$ . On doit avoir  $p((f^*)^n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ; autrement dit,

$$p(\lambda_1^n, \dots, \lambda_b^n, \mu_1^n \cos n\alpha_1, \mu_1^n \sin n\alpha_1, \dots, \mu_c^n \cos n\alpha_c, \mu_c^n \sin n\alpha_c) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Or, le polynôme (à coefficients complexes)

$$q(x, y, z) := p(x, \operatorname{Re}(y), \operatorname{Im}(z))$$

est tel que

$$q(\lambda_1^n, \dots, \lambda_b^n, (\mu_1 e^{i\theta_1})^n, (\mu_1 e^{-i\theta_1})^n, \dots, (\mu_c e^{i\theta_c})^n, (\mu_c e^{-i\theta_c})^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Notons par simplicité  $\lambda^n = (\lambda_1^n, \dots, \lambda_b^n, (\mu_1 e^{i\theta_1})^n, (\mu_1 e^{-i\theta_1})^n, \dots, (\mu_c e^{i\theta_c})^n, (\mu_c e^{-i\theta_c})^n)$  et  $q(t) = q(x, y, z)$ .

**Lemme 7.1.2.** *On peut écrire*

$$q(t) = \sum_i c_i(t)(m_i(t) - 1),$$

où les  $c_i$  et les  $m_i$  sont monômes à exposants entiers tels que  $m_i$  est unitaire et  $m_i(\lambda^n) = 1$  pour tout  $n$  (et donc  $m_i - 1 \in I$ ).

*Démonstration.* Soit

$$q(t) = \sum_{J \text{ multi-indice}} a_J t^J.$$

En particulier on a  $q(\lambda^0) = \sum a_J = 0$ . Soit  $\lambda^J = c_J$ ; alors

$$\sum_J a_J c_J^n = 0$$

pour tout  $n$ . Soit  $N$  le nombre de  $c_J$  distincts, qu'on appelle  $c_1, \dots, c_N$ ; on a des constantes  $a'_j$  telles que

$$\sum_{j=1}^N a'_j c_j^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, pour  $n = 0, 1 \dots N-1$ , on a

$$V(c_1, \dots, c_N) \cdot (a'_1, \dots, a'_N)^t = 0,$$

où  $V(c_1, \dots, c_N)$  est la matrice de Vandermonde de paramètres  $c_1, \dots, c_N$ ; comme elle est inversible, on obtient  $a'_j = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, N$ .

On a donc une écriture de  $q$  comme somme de polynômes  $q_i$  s'annulant en  $\lambda^n$  et ayant la propriété suivante : si

$$q_i(t) = \sum_J b_J t^J,$$

alors, si  $b_J \neq 0$ ,  $\lambda^J$  est une constante qui ne dépend que de  $i$ . On conclut facilement, en utilisant le fait que, pour tout  $i$ ,  $\sum b_J = q_i(\lambda^0) = 0$ , qu'on a une décomposition

$$q(t) = \sum_i c_i(t)(m_i(t) - 1)$$

avec  $m_i, c_i$  monômes à exposants entiers et  $m_i(\lambda^n) = 1$  pour tout  $n$ . Si  $m_i(t) = ct^J$ , alors  $1 = m_i(\lambda^2) = c\lambda^{2J} = m_i(\lambda)^2/c = 1/c$ , ce qui implique que  $c = 1$ .  $\square$

Soit  $m(x, y, z) = x^e y^f z^g$  un des  $m_i$  du Lemme, avec  $e, f, g$  multi-indices entiers. La condition  $m(\lambda) = 1$  est équivalente à

$$\begin{cases} \lambda_1^{e_1} \dots \lambda_b^{e_b} \mu_1^{f_1+g_1} \dots \mu_c^{f_c+g_c} = 1 \\ (f_1 + g_1)\alpha_1 + \dots + (f_c + g_c)\alpha_c = 0 \end{cases}$$

Si on considère, comme dans la preuve du Théorème 4.1.1, l'isomorphisme exponentiel  $\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^*)^n$ , où  $n = b + c$ , on a que l'image de  $A_s$  est le lieu de

## 7.1. LES POIDS DE $F^*$ : DÉFINITION, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS ET POIDS MAXIMAUX 71

zéros d'un ensemble  $I'$  d'applications linéaires dans l'espace dual  $(\mathbb{R}^n)^\vee$  qui, dans la base canonique, sont à coefficients entiers. On peut alors choisir une base  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $W := \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0 \quad \forall f \in I'\}$  dans  $\mathbb{Z}^n$ , et on a un isomorphisme de groupes de Lie

$$W \cong \mathbb{R}^r.$$

Or, les  $m_{h,k}$  de l'énoncé sont les coefficients de l'immersion linéaire  $\mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  (pour la base  $\{e_1 \dots e_r\} \subset \mathbb{R}^n$ ). Comme on a choisit une base à coefficients entiers, la preuve est complète.  $\square$

On applique maintenant les isomorphismes exponentiels  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R}^r \cong (\mathbb{R}^*)^r$ ; les caractères  $\lambda_i, \mu_j: (\mathbb{R}^+)^r \rightarrow \mathbb{R}^+$  induisent des applications linéaires

$$l: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n,$$

qu'on va appeler les *poids* des valeurs propres.

On appelle  $\Lambda$  l'ensemble (éventuellement avec répétitions) des valeurs propres de

$$f^*: V \rightarrow V$$

et  $L$  l'ensemble (éventuellement avec répétitions) des poids  $l$  induits par les éléments de  $\Lambda$ . On dira que deux éléments  $l, l'$  de  $L$  sont distincts s'ils sont distincts en tant qu'éléments de l'ensemble avec répétitions  $L$ ; on utilise la même convention pour  $\Lambda$ ; on rappelle que, comme chaque  $\mu_j$  représente le module de deux valeurs propres conjuguées, on compte le caractère induit avec multiplicité deux.

On vient de montrer que les  $l \in L$  sont à coefficients entiers pour une base bien choisie. De plus le fait que  $(\mathbb{R}^+)^r$  paramétrise la partie sans torsion de  $A_s$  se traduit directement en la Proposition suivante.

**Proposition 7.1.3.** *Les  $l \in L$  engendrent le dual  $(\mathbb{R}^r)^\vee$  de  $\mathbb{R}^r$ .*

*Remarque 7.1.4.* Comme

$$\pm 1 = \det f^*_{|H^2(X, \mathbb{C})} = \pm \prod_{\lambda \in \Lambda} \lambda,$$

on a en particulier

$$\sum_{l \in L} l = 0,$$

ce qui impose des contraintes sur les multiplicités des éléments de  $L$ .

La propriété suivante est une conséquence directe du Corollaire 1.1.2.

**Proposition 7.1.5.** *Soient  $l$  et  $l'$  deux éléments distinctes de  $L$  ; alors*

$$\{-2l, -l - l', -2l'\} \cap L \neq \emptyset.$$

*Plus précisément, si  $a, a' \in \Lambda$  sont deux valeurs propres distincts de  $f^* : V \rightarrow V$ , alors*

$$\left\{ \frac{1}{|a|^2}, \frac{1}{a\bar{a}'}, \frac{1}{|a'|^2} \right\} \cap \Lambda \neq \emptyset.$$

*De plus, si  $\alpha$  est une valeur propre de la restriction de  $f^*$  à  $H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C})$ , alors  $|\alpha|^{-2} \in \Lambda$ .*

*Démonstration.* Soient  $v, v' \in H^2(X, \mathbb{C})$  deux vecteurs propres non colinéaires pour  $f^*$  de valeurs propres  $a, a'$  tels que les modules  $\lambda := |a|, \lambda' := |a'|$  induisent  $l$  et  $l'$  respectivement.

Par le Corollaire 1.1.2 les vecteurs  $v \wedge \bar{v}, v \wedge \bar{v}', v' \wedge \bar{v}' \in H^4(X, \mathbb{C})$  ne peuvent pas être tous nuls. Supposons par exemple  $w := v \wedge \bar{v}' \neq 0$  (les autres cas sont analogues) :  $w$  est un vecteur propre pour  $f^*_{|H^4(X, \mathbb{C})}$  de valeur propre  $a\bar{a}'$ . Par dualité de Serre (Corollaire 1.2.2) on a donc que  $(a\bar{a}')^{-1}$  est une valeur propre de  $f^*$ . Son module  $(\lambda\lambda')^{-1}$  induit l'application linéaire  $-l - l' \in L$ .

Finalement, si  $\alpha$  est une valeur propre pour la restriction de  $f^*$  à  $H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C})$ , comme les deux espaces de la somme directe sont  $f^*$ -invariants, on peut trouver un vecteur propre  $v$  de valeur propre  $\alpha$  tel que  $v \in H^{2,0}(X, \mathbb{C})$  ou  $v \in H^{0,2}(X, \mathbb{C})$ . Dans les deux cas on a  $v \wedge \bar{v} \neq 0$ , donc  $|\alpha|^{-2} \in \Lambda$ .  $\square$

**Définition 7.1.6.** *On dit qu'un élément  $l_0 \in L$  est maximal pour  $v \in \mathbb{R}^n$  si*

$$|l_0(v)| = \max\{|l(v)|; l \in L\}.$$

*Remarque 7.1.7.* Un poids  $l \in L$  est maximal si et seulement si il est situé au bord de l'enveloppe convexe de  $L \cup -L$ .

On s'intéresse aux éléments maximaux parce que, si  $l_1$  et  $l_2$  sont maximaux, alors  $-2l_1, -2l_2 \notin L$ , et donc par la Proposition 7.1.5  $-l_1 - l_2 \in L$ .

**Lemme 7.1.8.** *Il existe une base  $l_1, \dots, l_r$  de  $(\mathbb{R}^r)^\vee$ , où les  $l_i$  sont éléments de  $L$ , et une base  $v_1 \dots v_r$  de  $\mathbb{R}^r$  telles que*

1. pour tout  $i$   $l_i$  est maximal pour  $v_i$



2. si  $i > j$ ,  $l_i(v_j) = 0$ .

*Démonstration.* On construit les  $l_i$  et les  $v_i$  par récurrence, en partant du cas  $i = n$  : soit  $v_n$  un vecteur non nul quelconque, et  $l_n \in L$  maximal pour  $v_n$  (donc  $l_n \neq 0$  car  $L$  engendre  $(\mathbb{R}^r)^\vee$ ).

Supposons maintenant avoir construit

$$l_{k+1}, l_{k+2}, \dots, l_n \in (\mathbb{R}^r)^\vee \text{ et } v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^r$$

indépendants, avec  $l_i$  maximal pour  $v_i$ , tels que si  $i > j$  alors  $l_i(v_j) = 0$ .

On choisit un  $v_k \in V_k := \{v \in \mathbb{R}^r \mid l_{k+1}(v) = l_{k+2}(v) = \dots = l_n(v) = 0\}$  non nul quelconque, et  $l_k \in L$  maximal pour  $v_k$ . Si on avait  $l_k \in \langle l_{k+1}, \dots, l_n \rangle$ , on aurait  $l_k(v_k) = 0$ , ce qui est impossible par maximalité et parce que  $L$  engendre  $(\mathbb{R}^r)^\vee$ . Les éléments construits possèdent donc les propriétés cherchées.  $\square$

*Démonstration du Théorème 7.0.9.* Supposons par l'absurde que  $r \geq 3$ , et considérons une base  $l_1, l_2, l_3 \dots$  comme dans le Lemme. Par la Proposition 7.1.5 et par maximalité on a  $-(l_1 + l_2), -(l_1 + l_3) \in L$ ; mais alors, à nouveau par la Proposition 7.1.5,

$$\{2l_1 + 2l_2, 2l_1 + l_2 + l_3, 2l_1 + 2l_3\} \cap L \neq \emptyset,$$

ce qui contredit la maximalité de  $l_1$  pour  $v_1$ .  $\square$

## 7.2 Résultats principaux

Les deux résultats principaux de ce chapitre sont les Théorèmes suivants. Le premier est une analyse globale des valeurs propres possibles de  $f^*: H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ ; le deuxième se concentre sur celles qui sont conjuguées à  $\lambda_1(f)$  sur  $\mathbb{Q}$ , et donne des contraintes arithmétiques sur  $\lambda_1(f)$ .

**Théorème 7.2.1.** *Soit  $X$  une variété compacte kählérienne de dimension 3,  $f \in \text{Aut}(X)$  un automorphisme holomorphe qui induit l'application linéaire  $f^*: H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ , tel que  $\lambda_1(f) \neq 1$ ; soit  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  l'ensemble des valeurs propres de  $f^*$  (avec multiplicités) et  $L$  l'ensemble de leurs poids (avec multiplicités). Soient*

$$\alpha_1 = \lambda_1(f), \quad \alpha_2 = \lambda_2(f)^{-1}, \quad \alpha_3 = \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} = \lambda_1(f)^{-1} \lambda_2(f),$$

et soient  $l_1, l_2, l_3$  les poids de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  respectivement.

Alors

1.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Lambda$  ;
2. il existe  $n_1, n_2, n_3 \geq 0$  tels que, à multiplicités près,

$$L - \{0\} = \bigcup_{i=1,2,3} \left\{ \frac{l_i}{(-2)^n}; n = 0, \dots, n_i \right\}.$$

Autrement dit, si  $\lambda \in \Lambda$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|\lambda|^{(-2)^n} \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1\}$  ;

3. si  $l_1$  apparaît dans  $L$  avec multiplicité  $> 1$ , alors  $\lambda_1(f) = \sqrt{\lambda_2(f)}$  ; de même, si  $l_2$  apparaît dans  $L$  avec multiplicité  $> 1$ , alors  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$ . Dans ces deux cas on a  $r(f) = 1$ .  
En particulier, si  $\lambda_1(f) \notin \{\lambda_2(f)^2, \lambda_2(f)^{1/2}\}$ , alors  $l_1$  et  $l_2$  apparaissent avec multiplicité 1 dans  $L$  ;
4. si  $r(f) = 2$ , alors  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont deux à deux algébriquement indépendants (c'est-à-dire, si  $i \neq j$  il n'existe pas de couple  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  tel que  $\alpha_i^m = \alpha_j^n$ ), et ils sont les seules valeurs propres dans  $\Lambda$  de module  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  ou  $\alpha_3$ .

**Théorème 7.2.2.** Soit  $X$  une variété compacte kählérienne de dimension 3,  $f \in \text{Aut}(X)$  un automorphisme holomorphe et  $\lambda_1 = \lambda_1(f)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(f)$  ses degrés dynamiques non triviaux. Alors les modules distincts des conjugués de  $\lambda_1$  sont au plus les 6 listés ci-dessous :

$$\alpha_1 := \lambda_1, \quad \alpha_2 := \frac{1}{\lambda_2}, \quad \alpha_3 := \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} = \sqrt{\lambda_2}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

De plus,  $\lambda_1$  ne possède pas de conjugué non réel de module  $\lambda_1$  ; si l'un des conjugués non réels de  $\lambda_1$  a module  $1/\lambda_2$ , alors  $\lambda_1 = \lambda_2^2$ , et si l'un des conjugués non réels de  $\lambda_1$  a module  $\lambda_2/\lambda_1$ , alors  $\lambda_2 \in \{\sqrt{\lambda_1}, \lambda_1^2\}$ .

Finalement, l'une de ces deux possibilités est vraie :

- soit  $\lambda_1$  est de degré multiple de 3 ;
- soit  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\lambda_1$  est conjugué à  $\lambda_2^{-1}$ . Dans ce cas on a  $r(f) = 1$ .

Les Théorèmes suivants précisent les situations possibles dans les deux cas  $r(f) = 2$  et  $r(f) = 1$ .

**Théorème 7.2.3.** Si  $r(f) = 2$  on a les cas suivants :

1.  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont tous les trois cubiques et sans conjugués réels ;
2. Quitte à renommer les  $\alpha_i$ ,  $\alpha_1$  est cubique sans conjugués réels ;  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués de degré  $6k$  ( $k \geq 1$ ), et leurs autres conjugués sont  $2k-2$  nombres de module  $1/\sqrt{\alpha_1}$ ,  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_2}$  et  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_3}$  ;
3.  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués de degré  $6k+3$  ( $k \geq 0$ ), et leurs autres conjugués sont  $2k$  nombres de module  $1/\sqrt{\alpha_1}$ ,  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_2}$  et  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_3}$ .

En particulier, si  $r_1(f) = 1$  (voir la Définition 7.3.3) alors  $\lambda_1(f)$  est cubique sans conjugués réels.

**Théorème 7.2.4.** Si  $r(f) = 1$  on a les cas suivants :

1.  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont tous les deux cubiques sans conjugués réels ;
2.  $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$ ,  $\alpha_1$  est conjugué à  $\alpha_2$  et leurs autres conjugués sont de module  $\sqrt{\alpha_1}, 1$  ou  $\sqrt{\alpha_2} = 1/\sqrt{\alpha_1}$ .

## 7.3 Introduction à l'arithmétique de $f^*$

Dorénavant on va considérer par simplicité les espaces de cohomologie à coefficients complexes :

$$V := H^2(X, \mathbb{C}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

On note  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  le polynôme caractéristique de  $\phi = f^* : V \rightarrow V$ .

Soit

$$p(x) = p_1(x)^{d_1} p_2(x)^{d_2} \cdots p_l(x)^{d_l}$$

la décomposition de  $p$  en facteurs irréductibles sur  $\mathbb{Z}[x]$  distincts. On appelle  $p_1(x)$  le facteur irréductible ayant  $\lambda_1(f)$  comme racine.

Soit  $V_i = \ker(p_i(\phi))$  ; on a

$$V = \bigoplus_{i=1}^l V_i$$

et, comme les  $p_i$  sont à coefficients entiers, on peut montrer le Lemme suivant.

**Lemme 7.3.1.** Pour tout  $i = 1, \dots, l$ ,  $V_i$  est un sous-espace  $\phi$ -invariant défini sur  $\mathbb{Q}$  ; si de plus  $d_i = 1$ , alors  $V_i$  est minimal pour cette propriété.

Pour tout  $i = 1, \dots, l$ , on note  $\Lambda_i$  l'ensemble des valeurs propres de  $\phi|_{V_i}$  (i.e. les racines de  $p_i$ ), et  $L_i$  l'ensemble des poids (avec multiplicité) des valeurs propres dans  $\Lambda_i$ .

Identifions  $V^\vee$  à  $H^4(X, \mathbb{C})$  par dualité de Poincaré, et posons

$$p^\vee(x) := x^d p\left(\frac{1}{x}\right),$$

où  $d = \deg(p)$ ;  $p^\vee$  est le polynôme caractéristique de  $f^* = (\phi^\vee)^{-1}$  sur  $V^\vee$ , et

$$p^\vee(x) = p_1^\vee(x)^{d_1} \cdots p_l^\vee(x)^{d_l};$$

comme pour  $V$  on a

$$V^\vee = \bigoplus_{i=1}^l V_i^\vee,$$

où  $V_i^\vee = \ker(p_i((\phi^\vee)^{-1}))$ , et le Lemme 7.3.1 vaut aussi pour les  $V_i^\vee$ .

Finalement on définit l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \theta: V \times V &\rightarrow V^\vee \\ (u, v) &\mapsto u \wedge v. \end{aligned}$$

*Remarque 7.3.2.* On a

$$\pm 1 = \det \phi|_{V_i} = \pm \prod_{\lambda \in \Lambda_i} \lambda,$$

donc en particulier

$$\sum_{l \in L_i} l = 0.$$

On peut introduire un analogue du rang  $r(f)$  qui ne tient compte que de l'action de  $f^*$  sur  $V_1$ .

**Définition 7.3.3.** *Considérons l'application linéaire*

$$f^*: (V_1)_{\mathbb{R}} \rightarrow (V_1)_{\mathbb{R}},$$

où  $(V_1)_{\mathbb{R}} = V_1 \cap H^2(X, \mathbb{R})$ .

Soit  $A_1 \subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V_1)$  la clôture algébrique de  $f^*$  dans  $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}((V_1)_{\mathbb{R}})$ . L'isomorphisme

$$A_1 \cong (\mathbb{R}^+)^{r_1(f)} \times (S^1)^{s_1(f)}$$

définit le rang  $r_1(f)$  de la restriction de  $f^*$  à  $V_1$ .

*Remarque 7.3.4.* Comme  $1 \leq r_1(f) \leq r(f)$ , on a

$$r_1(f) \leq 2.$$

Il est clair que si  $r(f) = 1$ , alors  $r_1(f) = 1$ .

**Définition 7.3.5.** Soit  $\lambda \in \Lambda$  une valeur propre de  $f_1^*$ ; un conjugué  $\mu$  de  $\lambda$  sur  $\mathbb{Q}$  est dit avec dénominateur maximal si son poids est  $l_i/n$  pour un  $i \in \{1, 2, 3\}$  avec  $n$  maximal parmi les conjugués de  $\lambda$ .

Un caractère  $l \in L$  est conjugué à  $\lambda \in \Lambda$  si au moins l'un des conjugués de  $\lambda$  (sur  $\mathbb{Q}$ ) a poids  $l$ ; on dit qu'il est réellement conjugué à  $\lambda$  si le nombre réel  $l(\phi)$  est conjugué à  $\lambda$ , ou, autrement dit, si l'un des conjugués réels de  $\lambda$  a poids  $l$ .

On va utiliser un théorème basique de théorie des corps, qu'on utilisera sans le montrer (voir [1]).

**Théorème 7.3.6.** Soit  $K$  un corps,  $p \in K[x]$  un polynôme irréductible,  $\bar{K} \supseteq K$  une clôture algébrique de  $K$  et  $\alpha, \beta \in \bar{K}$  deux racines de  $p$ . Alors il existe un élément  $\theta \in \text{Gal}(\bar{K}/K) = \{\phi \in \text{Aut}(\bar{K}) \mid \phi|_K = \text{id}_K\}$  tel que  $\theta(\alpha) = \beta$ .

On commence par le cas plus compliqué  $r = 2$ ; on va voir que le cas  $r = 1$  peut souvent se traiter comme un cas particulier du premier.

## 7.4 Le cas $r(f) = 2$

### 7.4.1 La structure de $L$

On commence par préciser, à l'aide du Lemme 7.1.8, la structure de  $L$ . On montre ainsi le Théorème 7.2.1 dans le cas  $r(f) = 2$ .

**Proposition 7.4.1.** Si  $r(f) = 2$ , il existe trois éléments maximaux  $l_1, l_2, l_3 \in L$  tels que

1.  $l_1 + l_2 + l_3 = 0$ ;
2.  $l_1, l_2$  et  $l_3$  ont multiplicité 1 dans  $L$ ;
3. pour tout  $l \in L - \{l_1, l_2, l_3\}$  et pour toute valeur propre  $\lambda \in \Lambda$  de poids  $l$ ,  $|\lambda|^{-2} \in \Lambda$ ;

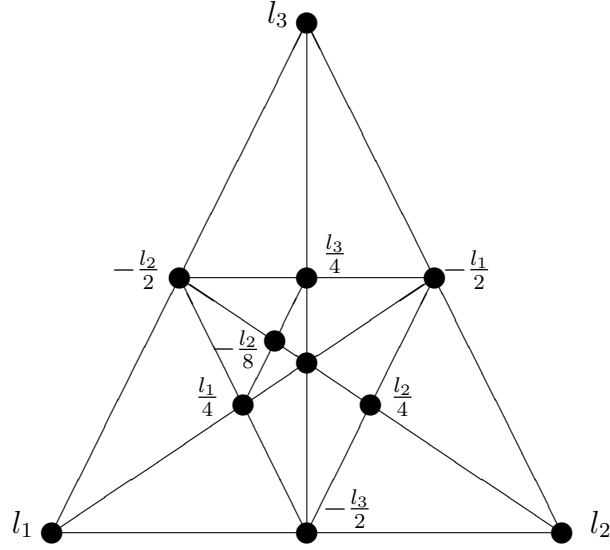


FIGURE 7.1 – Un exemple de la structure de  $L$  dans  $(\mathbb{R}^2)^\vee$  (le multiplicités ne sont pas marquées) ; ici, en utilisant la notation de la Proposition 7.4.1, on a  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 1$ .

4. il existe  $n_1, n_2, n_3 \geq 0$  tels que, à répétitions près,

$$L - \{0\} = \bigcup_{i=1,2,3} \left\{ \frac{l_i}{(-2)^n}; n = 0, \dots, n_i \right\}.$$

Nous verrons après le Lemme 7.4.3 que l'on pourra choisir pour  $l_1$  et  $l_2$  les poids de  $\lambda_1(f)$  et de  $\lambda_2(f)^{-1}$ , et donc pour  $l_3$  le poids de  $\lambda_1(f)^{-1}\lambda_2(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $l_1, l_2$  une base comme dans le Lemme 7.1.8, et soit  $l_3 := -l_1 - l_2$  ; on remarque que  $l_3 \in L$  par maximalité de  $l_1$  et de  $l_2$  (d'où l'énoncé 1) et que  $l_3$  est maximal pour  $v_1$ .

Si  $l_i$  avait multiplicité  $> 1$  pour un  $i = 1, 2, 3$ , on aurait  $-2l_i \in L$  par la Proposition 7.1.5, ce qui contredit la maximalité de  $l_i$ .

Soit  $\lambda \in \Lambda$  de poids  $l$ . On montre que, si  $l \notin \{l_1, l_2, l_3\}$ , alors  $|\lambda|^{-2} \in \Lambda$ , et donc  $-2l \in L$ . Cela montre l'énoncé 3 et donc, par récurrence, l'énoncé 4.

Pour cela, supposons d'abord que  $l(v_1) \neq 0$  ; alors, soit  $|(l + l_1)(v_1)| > |l_1(v_1)|$ , soit  $|(l + l_3)(v_1)| > |l_3(v_1)|$ . Dans le premier cas, ceci implique que  $-l - l_1 \notin L$  car  $l_1$  est maximal pour  $v_1$ , et donc, comme  $-2l_1 \notin L$  par maximalité, le Lemme 7.1.5 implique que  $|\lambda|^{-2} \in \Lambda$ , et donc  $-2l \in L$  ; dans

le deuxième cas on conclut de la même façon en utilisant la maximalité de  $l_3$  pour  $v_1$ .

Si  $l(v_1) = 0$ , on a  $l = \lambda l_2$  pour un  $\lambda \in [-1, 1[$  (par maximalité de  $l_2$ ). Pour se reconduire au cas précédent, on répète la construction du Lemme 7.1.8, cette fois commençant par  $v_1$  : soit  $v'_2 := v_1$ , on choisit  $l'_2 := l_1$  comme poids maximal pour  $v'_2$  ; fixons  $v'_1 \neq 0$  tel que  $l'_2(v'_1) = 0$ , et soit  $l'_1$  maximal pour  $v'_1$ . Si  $l(v'_1) = 0$ , alors  $l \in \langle l_2 \rangle \cap \langle l'_2 \rangle = \{0\}$ , donc l'énoncé est trivial ; sinon on s'est reconduit au cas précédent.  $\square$

*Remarque 7.4.2.* Comme  $L$  engendre  $(\mathbb{R}^2)^\vee$ , les  $l_i$  sont deux à deux indépendants ; en particulier, pour  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ,

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3.$$

**Lemme 7.4.3.** *Les poids des valeurs propres  $\lambda_1(f)$  et  $\lambda_2(f)^{-1}$  sont maximaux.*

*Démonstration.* Soit  $\lambda = \lambda_1(f)$  et  $l$  son poids ; quitte à renommer les  $l_i$ , on peut supposer que

$$l = \frac{l_1}{(-2)^n},$$

et pour prouver l'énoncé pour  $\lambda_1(f)$  il suffit montrer que  $n = 0$ .

Comme  $\lambda$  est de module maximal,  $\lambda^4 \notin \Lambda$ , c'est-à-dire  $4l \notin L$ , donc  $n \in \{0, 1\}$ . Si on avait  $l = -l_1/2 = (l_2 + l_3)/2$ , les valeurs propres  $\alpha_2, \alpha_3$  associées à  $l_2, l_3$  respectivement seraient telles que  $|\alpha_2 \alpha_3| = \lambda^2$ . Comme  $\lambda$  est de module maximal, on a donc  $|\alpha_2| = |\alpha_3| = |\lambda|$ , ce qui est absurde car sinon on aurait  $l_2 = l_3$ . Le poids de  $\lambda$  est donc  $l_1$ .

Le Lemme pour  $\lambda_2(f)^{-1} = \lambda_1(f^{-1})^{-1}$  est obtenue en considérant  $f^{-1}$  au lieu de  $f$ .  $\square$

Dorénavant on suppose que  $l_1$  et  $l_2$  sont respectivement les poids de  $\lambda_1(f)$  et de  $\lambda_2(f)^{-1}$ .

En particulier on a le Corollaire suivant.

**Corollaire 7.4.4.** *Les valeurs propres*

$$\alpha_1 := \lambda_1(f), \quad \alpha_2 := \lambda_2(f)^{-1} = \lambda_1(f^{-1})^{-1}, \quad \alpha_3 := \alpha_1^{-1} \alpha_2$$

*apparaissent chacune avec multiplicité 1 et sont les seules ayant pour module un des  $\alpha_i$ .*

En particulier, comme  $f_1^*$  ne possède pas de bloc de Jordan non trivial pour la valeur propre  $\lambda_1$ , la croissance asymptotique de  $\|f_1^*\|$  est purement exponentielle :

$$\|(f_1^*)^n\| \sim c^{te} \lambda_1(f)^n.$$

## 7.4.2 Propriétés algébriques de $\Lambda$

Dans ce paragraphe, on décrit les propriétés arithmétiques de  $\lambda_1(f) = \alpha_1$ .

**Lemme 7.4.5.** *Si  $\lambda \in \Lambda$  possède un conjugué de module 1, alors  $\lambda$  est de module 1.*

*En particulier, toutes les valeurs propres de  $f^*$  de module 1 sont racines de l'unité.*

*Démonstration.* Soit par l'absurde  $\lambda \in \Lambda$  une valeur propre de poids  $l \neq 0$  tel que un de ses conjugués  $\mu$  soit de module 1 :

$$\mu \bar{\mu} = 1.$$

Par le Théorème 7.3.6, il existe  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  tel que  $\theta(\mu) = \lambda$ . On a donc

$$\lambda \cdot \theta(\bar{\mu}) = 1,$$

donc la valeur propre  $\theta(\bar{\mu}) \in \Lambda$  a poids  $-l$ , ce qui contredit la Proposition 7.4.1.  $\square$

**Définition 7.4.6.** *On définit les nombres réels*

$$\alpha_{i,n} = (\alpha_i)^{\frac{1}{(-2)^n}} \quad i = 1, 2, 3 \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Ce sont les modules des valeurs propres de  $\phi$  susceptibles d'apparaître.*

**Lemme 7.4.7.** *1. Soient  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  deux valeurs propres conjuguées telles que leurs poids  $l, l'$  soient colinéaires. Alors*

$$l \in \left\{ -\frac{l}{2}, l, -2l \right\}.$$

*En particulier, le poids  $l_i/(-2)^n$  n'est pas conjugué à  $\alpha_i$  pour  $n \geq 2$ .*

*2.  $\alpha_{i,1}$  n'est pas conjugué à  $\alpha_i$ . Plus précisément, si  $m \neq n$ , alors  $\alpha_{i,m}$  et  $\alpha_{i,n}$  ne sont pas conjugués.*



*Démonstration.* On commence par montrer l'énoncé 1. Supposons par l'absurde que  $\lambda$  et  $\lambda'$  soient conjugués de poids

$$l = \frac{l_i}{(-2)^n}, \quad l' = \frac{l_i}{(-2)^m}$$

respectivement, et que  $m \notin \{n-1, n, n+1\}$ . Quitte à remplacer  $\lambda$  par  $\lambda'$ , on peut supposer que  $m > n+1$ .

La dépendance linéaire entre les poids implique que

$$\lambda \bar{\lambda} = (\lambda' \bar{\lambda}')^k,$$

où  $k = (-2)^{m-n}$  est un multiple entier de 4.

Soit maintenant  $\mu$  un conjugué de dénominateur maximal de  $\lambda$ , et supposons que son poids soit  $l_\mu = l_1/(-2)^h$ . Par le Théorème 7.3.6 il existe  $\theta \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  tel que  $\theta(\lambda) = \mu$ ; soient  $\alpha := \theta(\bar{\lambda})$ ,  $\beta := \theta(\lambda')$  et  $\gamma := \theta(\bar{\lambda}')$ , et, respectivement,  $l_\alpha = l_a/(-2)^{n_a}$ ,  $l_\beta = l_b/(-2)^{n_b}$  et  $l_\gamma = l_c/(-2)^{n_c}$ , pour  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$  et  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}$ , leurs poids (les poids  $l_a, l_b, l_c$  ne peuvent pas être nuls par le Lemme 7.4.5). On a alors

$$\mu \alpha = (\beta \gamma)^k$$

et, en prenant les modules,

$$\frac{l_1}{(-2)^h} + \frac{l_a}{(-2)^{n_a}} = \frac{kl_b}{(-2)^{n_b}} + \frac{kl_c}{(-2)^{n_c}}.$$

On montre grâce à la Proposition 7.4.1 que cette situation est absurde.

D'abord passons au dénominateur commun  $(-2)^h$  :

$$l_1 + (-2)^{h-n_a} l_a = k(-2)^{h-n_b} l_b + k(-2)^{h-n_c} l_c.$$

Si on avait  $a \neq 1$ , on aurait une contradiction modulo 2 grâce à la Remarque 7.4.2. On doit donc avoir  $a = 1$ . Si  $n_a < h$ , on a encore une contradiction modulo 2; donc  $n_a = h$ , et on a

$$2l_1 = k(-2)^{h-n_b} l_b + k(-2)^{h-n_c} l_c.$$

Par la Remarque 7.4.2, on a soit  $b = c = 1$ , soit, quitte à remplacer  $\gamma$  par  $\delta$ ,  $b = 2, c = 3$ . Dans le premier cas on doit avoir

$$2 = k \left( (-2)^{h-n_b} + (-2)^{h-n_c} \right),$$

ce qui est absurde modulo 4 ; dans le deuxième cas on a

$$2 = k(-2)^{h-n_b} = k(-2)^{h-n_c},$$

ce qui est encore absurde modulo 4.

On a donc prouvé l'énoncé 1.

Pour prouver l'énoncé 2 il nous reste à montrer que  $\alpha_{i,n}$  et  $\alpha_{i,n+1}$  ne sont pas conjugués : en effet sinon on a la relation

$$\alpha_{i,n}\alpha_{i,n+1}^2 = 1,$$

donc, si  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  envoie  $\alpha_{i,n}$  sur un conjugué de dénominateur maximal  $\mu$  et  $\alpha_{i,n+1}$  sur  $\lambda$ , on obtient une contradiction car alors  $l_\lambda = -l_\mu/2$ .  $\square$

On a un Corollaire immédiat sur le nombre de modules distincts des racines de chaque facteur irréductible  $p_i$  de  $p$ .

**Corollaire 7.4.8.** *Soit  $p_i$  un facteur irréductible de  $p$  qui ne soit pas cyclotomique. Les racines de  $p_i$  sont au plus de 6 modules distincts : au plus 3 supérieurs à 1 et au plus 3 inférieurs à 1.*

*Plus précisément, si on appelle  $L_i$  l'ensemble des poids des racines de  $p_i$ , il existe  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$  tels que*

$$L_i \subseteq \left\{ \frac{l_1}{(-2)^{m_1}}, \frac{l_1}{(-2)^{m_1+1}}, \frac{l_2}{(-2)^{m_2}}, \frac{l_2}{(-2)^{m_2+1}}, \frac{l_3}{(-2)^{m_3}}, \frac{l_2}{(-2)^{m_3+1}} \right\}.$$

*Remarque 7.4.9.* Par la Remarque 7.3.2, on a aussi

$$\sum_{l \in L_i} l = 0,$$

ce qui impose des contraintes sur les multiplicités des poids dans  $L_i$ .

En particulier, il est facile de vérifier que, si  $p_i$  n'est pas cyclotomique, alors  $p_i$  est de degré multiple de 3.

### 7.4.3 Propriétés arithmétiques de $\lambda_1(f)$

Maintenant on s'intéresse au facteur irréductible  $p_1$  de  $p$  ayant  $\alpha_1 = \lambda_1(f)$  comme racine, et à la restriction  $\theta_1$  de  $\theta$  à  $V_1 \times V_1$ .

Soient  $u_1, u_2, u_3$  des vecteurs propres non nuls pour  $\phi$  de valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  respectivement. Par définition on a  $u_1 \in V_1$ .

**Lemme 7.4.10.** *Si  $u_2$  et  $u_3$  appartiennent à  $V_1$  ou si ni  $u_2$  ni  $u_3$  n'appartiennent à  $V_1$ , alors*

$$\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee.$$

*Si  $u_2 \in V_1, u_3 \in V_2$  ou si  $u_2 \in V_2, u_3 \in V_1$ , alors*

$$\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee \oplus V_2^\vee.$$

*Démonstration.* Soit  $\theta_1$  la restriction de  $\theta$  à  $V_1 \times V_1$ .

Pour le deuxième cas on ne va traiter que le cas  $u_2 \in V_1, u_3 \notin V_1$ , le preuve étant identique dans les deux cas.

On prouve d'abord que

$$\theta(V_1 \times V_1) \subseteq \begin{cases} V_1^\vee & \text{si } u_2, u_3 \in V_1 \text{ ou } u_2, u_3 \notin V_1 \\ V_1^\vee \oplus V_2^\vee & \text{si } u_2 \in V_1, u_3 \in V_2 \end{cases}.$$

Soient

$$\pi_1: V^\vee = \bigoplus_{i=1}^l V_i^\vee \rightarrow \bigoplus_{i=2}^l V_i^\vee$$

la projection sur les derniers  $l - 1$  facteurs,

$$\pi_{1,2}: V^\vee = \bigoplus_{i=1}^l V_i^\vee \rightarrow \bigoplus_{i=3}^l V_i^\vee$$

la projection sur les derniers  $l - 2$  facteurs. Alors  $\ker(\pi \circ \theta_1) := \{u \in V_1 \mid \pi \circ \theta(u, v) = 0 \ \forall v \in V_1\}$  (pour  $\pi \in \{\pi_1, \pi_{1,2}\}$ ) est un sous-espace de  $V_1$  défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $\phi$ -invariant; par minimalité de  $V_1$  il est soit  $\{0\}$  soit  $V_1$ . L'énoncé équivaut alors à  $\ker(\pi \circ \theta_1) = V_1$  ( $\pi = \pi_1$  dans le premier cas,  $\pi = \pi_{1,2}$  dans le deuxième), donc il suffit de montrer que  $u_1 \in \ker(\pi \circ \theta_1)$ .

Comme  $\phi$  est semi-simple, il suffit de vérifier que  $\pi \circ \theta(u_1, u) = 0$  pour tout  $u \in V_1$  vecteur propre pour l'application  $\phi$ :

- si  $u \in V_1$  est un vecteur propre et sa valeur propre est de poids  $l \notin \{l_2, l_3, -l_1/2\}$ , alors le poids  $-l_1 - l$  n'est pas dans  $L$ , donc  $u_1 \wedge u = 0$ ;
- si  $u \in V_1$  est un vecteur propre de valeur propre  $\beta$  ayant poids  $-l_1/2$ , et si  $w := u_1 \wedge u \neq 0$ , alors  $w \in V^\vee$  est un vecteur propre de valeur propre  $\alpha_1 \beta = \bar{\beta}^{-1}$ , donc  $w \in V_1^\vee$  car  $\bar{\beta}$  est conjugué à  $\beta$ , donc à  $\alpha_1$ . On a donc montré que  $\pi_1 \circ \theta(u_1, u) = 0$  (et en particulier  $\pi_{1,2} \circ \theta(u_1, u) = 0$ );

- si  $u_2, u_3 \notin V_1$  on a fini. Si  $u_2, u_3 \in V_1$ , alors  $w_3 := u_1 \wedge u_2$  a valeur propre  $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3^{-1}$ , donc  $w_3 \in V_1^\vee$ ; de même  $w_2 := u_1 \wedge u_3$  a valeur propre  $\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^{-1}$ , donc  $w_2 \in V_1^\vee$ , donc on a montré que pour tout vecteur propre  $u$  pour  $\phi$ ,  $\pi_1 \circ \theta(u_1, u) = 0$ , donc  $u_1 \in \ker \pi_1 \circ \theta$ ;
- finalement, si  $u_2 \in V_1$  et  $u_3 \in V_2$ , alors  $w_3 = u_1 \wedge u_2$  est de valeur propre  $\alpha_3^{-1}$ , donc  $w_3 \in V_2^\vee$  et  $u_1 \in \ker(\pi_{1,2} \circ \theta)$ .

On a donc prouvé que  $u_1 \in \ker \pi \circ \theta$ , donc  $\pi \circ \theta = 0$  et on a prouvé l'inclusion dans les deux cas.

Pour le premier énoncé, on remarque que  $\theta(V_1 \times V_1) \subseteq V_1^\vee$  est un sous-espace défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $\phi$ -invariant, donc par minimalité de  $V_1^\vee$  c'est soit  $\{0\}$  soit  $V_1^\vee$ ; mais il ne peut pas être  $\{0\}$  car  $V_1$  est de dimension au moins 2 (sinon  $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$ , donc, comme  $\lambda$  est un entier algébrique positif,  $\lambda_1 = 1$ , donc  $\phi = id$  et  $r = 0$ ), donc on a prouvé le premier énoncé.

Montrons l'égalité dans le deuxième énoncé. On aura besoin d'un autre lemme, qu'on va utiliser aussi dans la suite.

**Lemme 7.4.11.** *S'il existe  $j \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $\theta(V_1 \times V_1) \subseteq V_j^\vee$ , alors  $j = 1$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $j = 2$ . On a déjà montré que, si  $u_2, u_3 \in V_1$  ou si  $u_2, u_3 \notin V_1$ , alors  $\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee$ . Par conséquent, quitte à remplacer  $l_2$  par  $l_3$ , on peut supposer que  $u_2 \in V_1$  et  $u_3 \in V_2$ .

Par l'hypothèse et la Proposition 7.4.1, pour tout  $\lambda \in \Lambda_1 - \{\alpha_1, \alpha_2\}$  (conjugué de  $\alpha_1, \alpha_2$ ),  $|\lambda|^{-2} \in \Lambda_2$ . En particulier  $-l_1/2, -l_2/2 \notin L_1$ ; de plus par le Lemme 7.4.7  $\frac{l_1}{(-2)^n}, \frac{l_2}{(-2)^n}$  ne sont pas conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  pour  $n > 1$ , ce qui implique

$$\frac{l_1}{(-2)^n}, \frac{l_2}{(-2)^n} \notin L_1 \quad \text{pour } n \geq 1,$$

c'est-à-dire

$$L_1 \subseteq \left\{ l_1, l_2, -\frac{l_3}{2}, \frac{l_3}{4}, \dots, \right\}.$$

Par le Lemme 7.4.7,  $l_3/(-2)^n$  n'est pas réellement conjugué à  $\alpha_3$  pour  $n \geq 1$ , donc  $l_3/(-2)^n \notin L_1$  pour  $n \geq 2$ . On a alors

$$L_1 \subseteq \left\{ l_1, l_2, -\frac{l_3}{2} \right\},$$

et on obtient une contradiction grâce au fait que

$$\sum_{l \in L_1} l = 0.$$

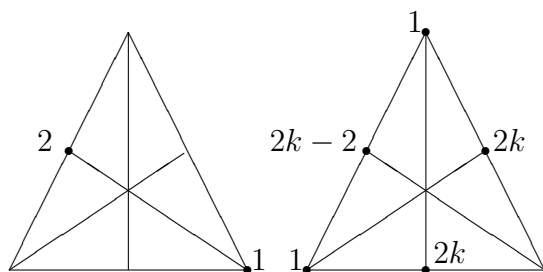


FIGURE 7.2 – Structures des poids conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  dans le cas de la Proposition 7.4.13. Les nombres aux sommets indiquent les multiplicités.

□

Le vecteur  $w_3 := u_1 \wedge u_2 \in V^\vee$  a valeur propre  $\alpha_3^{-1} = \alpha_1 \alpha_2$ , donc  $w_3 \in V_2^\vee$ . Or,  $\text{Im } \theta_1 = \theta(V_1 \times V_1)$  est un sous-espace de  $V^\vee$  défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $\phi$ -invariant ; comme  $V_2^\vee$  est un espace défini sur  $\mathbb{Q}$ ,  $\phi$ -invariant et minimal, et comme  $\text{Im } \theta_1 \cap V_2^\vee \neq \{0\}$ , on a  $V_2^\vee \subseteq \text{Im } \theta_1$ .

Montrons que  $\text{Im } \theta_1 \cap V_1^\vee \neq \{0\}$ . Sinon, on aurait

$$\theta(V_1 \times V_1) \subseteq V_2^\vee,$$

ce qui contredit le Lemme 7.4.11. On a donc  $\text{Im } \theta_1 \cap V_1^\vee \neq \{0\}$ , donc, comme pour le facteur  $V_2^\vee$  tout-à-l'heure, on conclut que  $V_1^\vee \subseteq \text{Im } \theta_1$ , ce qui montre le deuxième énoncé. □

*Remarque 7.4.12.* La même preuve marche si on permute les poids  $l_1, l_2, l_3$ .

**Proposition 7.4.13.** *Si  $\theta(V_1 \times V_1) \neq V_1^\vee$ , alors, pour un couple adéquat  $(i, j) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$ , on a que*

- $\alpha_i$  est cubique sans conjugués réels ;
- $\alpha_1$  et  $\alpha_j$  sont conjugués de degré  $6k$  ; leurs autres conjugués ne sont pas réels et ils sont de poids  $-l_1/2, -l_j/2$  ou  $-l_i/2$  (pour chacun de ces poids il y a respectivement  $2k, 2k$  et  $2k - 2$  valeurs propres ayant ce poids) ; en particulier  $r_1(f) = 2$ .

*Démonstration.* Supposons, quitte à remplacer  $l_2$  et  $l_3$ , que  $u_2 \in V_1, u_3 \in V_2$  ; sinon par le Lemme 7.4.10 on aurait  $\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee$ , en contradiction avec l'hypothèse.

Par le Lemme 7.4.10, comme  $u_3 \in V_2$  et  $u_1, u_2 \notin V_2$ , on a  $\theta(V_2 \times V_2) =$

$V_2^\vee$ . Donc si  $l_1/(-2)^n \in L_2$  pour un  $n \geq 1$ , alors  $l_1/(-2)^{n-1} \in L_2$  et, par récurrence,  $l_1 \in L_2$ , ce qui est absurde; de même  $l_2/(-2)^n \notin L_2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

De plus par le Lemme 7.4.7  $l_3/(-2)^n \notin L_2$  pour  $n \geq 2$ , donc

$$L_2 \subseteq \left\{ l_3, -\frac{l_3}{2} \right\},$$

et, comme  $\sum_{l \in L_2} l = 0$ ,  $-l_3/2$  apparaît avec multiplicité 2. La première partie de l'énoncé est donc montrée pour  $i = 3$ .

Pour montrer la deuxième partie, montrons d'abord que  $-l_1/2 \in L_1$ . Sinon, on peut reprendre la preuve du Lemme 7.4.10 pour montrer que  $\theta(V_1 \times V_1) = V_2^\vee$  : en effet, si  $u_1 \in V_1$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\alpha_1$  et  $u \in V_1$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\beta$  de poids  $l$ , alors  $u_1 \wedge u = 0$  sauf si  $l \in \{l_2, l_3, -l_1/2\}$ . Comme  $l \neq l_3, -l_1/2$ , le seul cas où  $u_1 \wedge u \neq 0$  est pour  $l = l_2$ , et dans ce cas  $u_1 \wedge u \in V_2^\vee$ ; donc  $\theta(V_1 \times V_1) = V_2^\vee$ , ce qui contredit le Lemme 7.4.11. Donc  $-l_1/2 \in L_1$  et, comme par le Lemme 7.4.7  $\alpha_{1,1}$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$ ,  $-l_1/2$  apparaît dans  $L_1$  avec multiplicité pair, disons  $2k$  avec  $k \geq 1$ .

Maintenant prouvons que, éventuellement avec multiplicités,

$$L_1 \subseteq \left\{ l_1, l_2, -\frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{3}, -\frac{l_3}{2} \right\}.$$

Montrons que  $l = l_3/(-2)^n \notin L_1$  pour  $n \geq 2$ . Sinon soit  $u \in V_1$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda$  de poids  $l_3/(-2)^n$ . On remarque que  $-2l_1, -l_1 - l_3/(-2)^n \notin L$ , donc par le Corollaire 1.1.2,

$$0 \neq u \wedge \bar{u} \in \theta(V_1 \times V_1) \subseteq V_1^\vee \oplus V_2^\vee;$$

en particulier  $l_3/(-2)^{n-1}$  est réellement conjugué soit à  $\alpha_3$  (absurde par le Lemme 7.4.7), soit à  $\alpha_1$ ; en raisonnant par récurrence, on montre que  $-l_3/2$  est réellement conjugué à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . On a

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_{3,1}^2,$$

et, si on prend  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  tel que  $\theta(\alpha_{3,1}) = \alpha_1$ , on obtient une contradiction par maximalité.

Par le Lemme 7.4.7 les poids  $l_1/(-2)^n$  et  $l_2/(-2)^n$  ne sont pas conjugués à

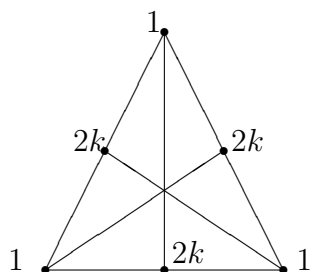


FIGURE 7.3 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  - Cas 2 de la Proposition 7.4.14

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour  $n \geq 2$ .

On a donc montré que

$$L_1 \subseteq \left\{ l_1, -\frac{l_1}{2}, l_2, -\frac{l_2}{2}, -\frac{l_3}{2} \right\},$$

et, comme  $\sum_{l \in L_1} l = 0$ , les multiplicités sont  $2k$  pour  $-l_1/2$  et  $-l_2/2$  et  $2k - 2$  pour  $-l_3/2$ ; en particulier  $\alpha_1$  est de degré  $6k$ .  $\square$

**Proposition 7.4.14.** *Si  $\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee$ , alors*

1. *soit  $\alpha_1$  est cubique sans conjugués réels, et en particulier  $r_1(f) = 1$  ;*
2. *soit  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués, leurs autres conjugués sont non réels de poids  $-l_1/2, -l_2/2, -l_3/2$ , et pour chacun de ces poids il y a le même nombre de conjugués de  $\alpha_1$  de ce poids. En particulier  $r_1(f) = 2$ .*

*En tout cas  $\alpha_1$  est de degré impair et multiple de 3.*

*Démonstration.* Si  $\alpha_2$  ou  $\alpha_3$  est conjugué de  $\alpha_1$  (disons  $\alpha_2$ ), alors  $w_3 = u_1 \wedge u_2 \neq 0$  est un vecteur propre de valeur propre  $\alpha_3^{-1}$  et par hypothèse  $w_3 \in V_1^\vee$ . Donc  $\alpha_3 \in \Lambda_1$ . On a donc deux cas :

- Soit  $\alpha_2, \alpha_3 \notin \Lambda_1$  ; dans ce cas,  $l_i/(-2)^n \notin L_1$  pour  $i = 2$  ou  $3$  et  $n \in \mathbb{N}$ , sinon par récurrence  $l_i \in L_1$ , donc  $\alpha_i \in \Lambda_1$ . Par le Lemme 7.4.7, le seul poids qui peut donc être conjugué à  $l_1$  est  $-l_1/2$  et, comme  $\sum_{l \in L} l = 0$ , il a multiplicité 2, donc il correspond à un couple de valeurs propres complexes conjugués  $z, \bar{z}$ .
- Soit  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués. Alors, par le Lemme 7.4.7, les seuls poids conjugués possibles pour  $\alpha_1$  sont  $-l_1/2, -l_2/2$  et  $-l_3/2$ , et leurs

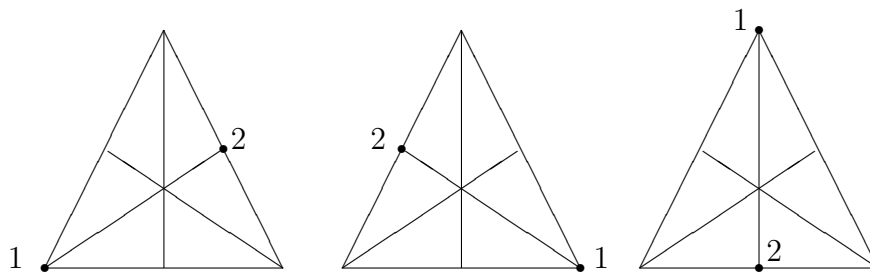


FIGURE 7.4 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  - Cas  $r(f) = 2$ , sous-cas 1

multiplicités sont pairs car sinon ils sont réellement conjugués. Les multiplicités sont égales car

$$\sum_{l \in L_1} l = 0.$$

□

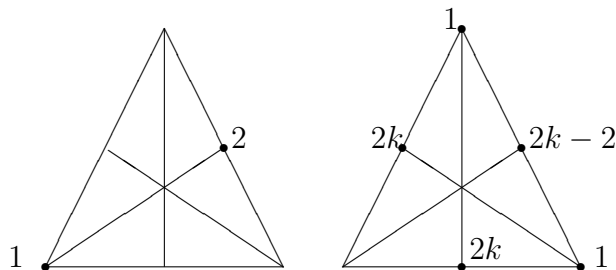
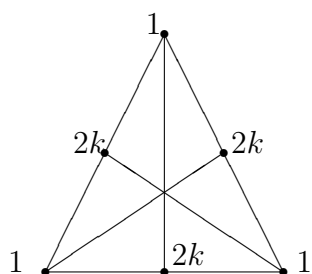
En résumant, on a montré le Théorème 7.2.2 dans le cas  $r = 2$ . En particulier on a trois cas différents (d'où le Théorème 7.2.3) :

1.  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont tous les trois cubiques et sans conjugués réels ;
2. Quitte à renommer les  $\alpha_i$ ,  $\alpha_1$  est cubique sans conjugués réels ;  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués de degré  $6k$  ( $k \geq 1$ ), et leurs autres conjugués sont  $2k-2$  nombres de module  $1/\sqrt{\alpha_1}$ ,  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_2}$  et  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_3}$  ;
3.  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont conjugués de degré  $6k+3$  ( $k \geq 0$ ), et leurs autres conjugués sont  $2k$  nombres de module  $1/\sqrt{\alpha_1}$ ,  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_2}$  et  $2k$  de module  $1/\sqrt{\alpha_3}$ .

En particulier le rang  $r_1(f)$  de la restriction de  $f^*$  à  $V_1$  satisfait la Proposition suivante.

**Proposition 7.4.15.** *Si  $r(f) = 2$  et  $r_1(f) = 1$ , alors  $\lambda_1(f)$  est cubique sans conjugués réels.*



FIGURE 7.5 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  - Cas  $r(f) = 2$ , sous-cas 2FIGURE 7.6 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  - Cas  $r(f) = 2$ , sous-cas 3

## 7.5 Le cas $r(f) = 1$

On appelle  $\alpha_1 = \lambda_1(f)$  et  $\alpha_2 = \lambda_2(f)^{-1} = \lambda_1(f^{-1})^{-1}$  les valeurs propres de  $\phi$  de module maximal et minimal respectivement, et soient  $l_1, l_2$  respectivement leurs poids.

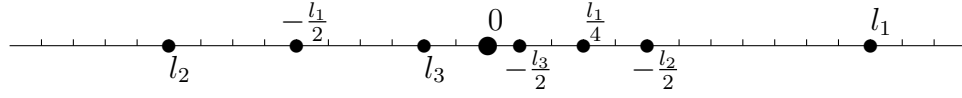
Comme  $r = 1$ , on peut interpréter les poids de  $L$  comme des nombres entiers. Dans ce sens on va parler du (ou des) poids de module maximal, à ne pas confondre avec le poids associé avec la valeur propre maximale  $\lambda_1(f)$ .

### 7.5.1 La structure de $L$

La Proposition suivante montre le Théorème 7.2.1 dans le cas  $r(f) = 1$ .

**Proposition 7.5.1.** *Soit  $l_3 = -l_1 - l_2$ ; alors*

1.  $l_3 \in L$ ;
2. *pour tout  $l \in L - \{0\}$  il existe  $n > 0$  tel que  $(-2)^n l \in \{l_1, l_2, l_3\}$ ; plus précisément, si  $v \in V$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda$  de poids  $l \notin \{l_1, l_2, l_3, 0\}$ , alors  $v \wedge \bar{v} \neq 0$ , donc  $|\lambda|^{-2} \in \Lambda$ ;*

FIGURE 7.7 – Exemple de la structure des poids de  $L$  dans le cas  $r = 1$ 

3. si de plus la multiplicité de  $l_3$  est  $> 1$  dans  $L$ , alors il existe  $n$  tel que  $(-2)^n l_3 \in \{l_1, l_2\}$ .

*Démonstration.* Quitte à considérer  $f^{-1}$  au lieu de  $f$ , on peut supposer que  $|l_1| \geq |l_2|$ .

On montre d'abord que pour tout  $l > 0$ ,  $l \neq l_1$ , il y a une valeur propre  $\lambda \in \Lambda$  de poids  $-2l \in L$ ; en effet  $-2l_1, -l - l_1 \notin L$  par maximalité de  $|l_1|$ , donc il suffit d'appliquer la Proposition 7.1.5 pour conclure.

Maintenant montrons les énoncés 1 et 2.

Supposons d'abord que  $-2l_2 \in L$ . Si par l'absurde  $-2l_2 \neq l_1$ , on aurait  $4l_2 \in L$ , ce qui contredit la minimalité de  $l_2$ . Donc  $-2l_2 = l_1$  (et en particulier  $l_3 = l_2 \in L$ , ce qui montre l'énoncé 1). Si  $l < 0$ ,  $l \neq l_2$ , alors  $-l - l_1 = -l + 2l_2 = l_2 + (l_2 - l) < l_2$ , donc  $-2l_1, -l - l_1 \notin L$ , et donc  $-2l \in L$ . Par récurrence on montre que pour tout  $l \in L$  il existe  $n \geq 0$  tel que  $(-2)^n l = l_1$ , ce qui montre l'énoncé 2.

Supposons maintenant que  $-2l_2 \notin L$ . Alors  $l_3 = -l_1 - l_2 \in L$  (d'où l'énoncé 1) et  $l_3 < 0$ . Considérons  $l < 0$  tel que  $l \neq l_2, l_3$ ; si par l'absurde  $-l - l_2 \in L$ , comme  $-l - l_2 \neq l_1$ , par la première étape de la preuve on aurait  $2l + 2l_2 \in L$ , ce qui contredit la minimalité de  $l_2$ . Donc  $-2l \in L$ , et on conclut la preuve de l'énoncé 2 par récurrence.

Maintenant supposons que la multiplicité  $l_3$  soit  $> 1$ ; alors  $-2l_3 \in L$ , donc il existe  $n \geq 0$  tel que  $(-2)^{n+1} l_3 \in \{l_1, l_2, l_3\}$ ;  $l_3 = (-2)^{n+1} l_3$  est absurde, et l'énoncé 2 implique l'énoncé 3.  $\square$

*Remarque 7.5.2.* La preuve de la Proposition 7.5.1 montre aussi que, si  $|l_2| \leq |l_1|$  et  $l_2 \neq -l_1/2$ , alors la multiplicité de  $l_2$  dans  $L$  est 1 (et celle de  $l_1$  aussi par maximalité). On obtient la même conclusion si  $|l_1| \leq |l_2|$  et  $l_2 \neq -2l_1$ . En conclusion, si  $l_2 \notin \{-2l_1, -l_1/2\}$ , alors  $l_1$  et  $l_2$  ont multiplicité 1 dans  $L$ .

## 7.5.2 Propriétés arithmétiques de $\lambda_1(f)$

**Lemme 7.5.3.** Si  $l \in L$  est réellement conjugué à  $\alpha_1$ , alors  $l \in \{l_1, -l_1\}$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $l \notin \{l_1, -l_1\}$ , et soit  $\lambda$  la valeur propre réelle de  $\phi$  avec poids  $l$ . Comme 1 n'est pas conjugué à  $\alpha_1$  on a deux cas :

- $l > 0$ ; comme tous les poids de  $L$  sont deux-à-deux dépendants, il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que

$$\lambda^m = \alpha_1^n,$$

et par hypothèse  $m \neq n$ , donc par maximalité de  $\alpha_1$  on a  $m > n$ . Soit  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  tel que  $\theta(\lambda) = \alpha_1$ ; on obtient une contradiction par maximalité de  $\alpha_1$ .

- $l < 0$ ; comme  $r = 1$  il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que

$$\lambda^m \alpha_1^n = 1,$$

et  $m \neq n$  par hypothèse.

Soit  $\beta$  le conjugué de  $\alpha_1$  dont le poids est de module maximal; autrement dit, si on appelle  $\mu \in \Lambda$  un conjugué de  $\alpha_1$  de module minimal, on a

$$\beta = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } \mu\alpha_1 \geq 1 \\ \mu & \text{si } \mu\alpha_1 < 1 \end{cases}.$$

Si  $m > n$  et  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  est tel que  $\theta(\lambda) = \beta$ , on obtient une contradiction par maximalité du module du poids de  $\mu$ .

Si  $m < n$  et  $\theta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  est tel que  $\theta(\alpha_1) = \beta$ , on obtient encore une contradiction par maximalité du module du poids de  $\mu$ . □

**Proposition 7.5.4.** *Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont conjugués, alors  $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$  et leurs autres conjugués sont de module  $\sqrt{\alpha_1}, 1$  ou  $\sqrt{\alpha_2} = 1/\sqrt{\alpha_1}$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$  est une conséquence directe du Lemme 7.5.3.

Comme  $l_1 = -l_2$ , tous les poids de  $L$  différents de 0 sont de la forme  $\pm l_1/2^n$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Il est facile de montrer que, si  $n \geq 2$ ,  $\pm l_1/2^n$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$  (voir la preuve du Lemme 7.4.7), ce qui conclut la preuve. □

**Lemme 7.5.5.** *Si*

$$l_2 \notin \left\{ -2l_1, -l_1, -\frac{l_1}{2} \right\}$$

*alors  $\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\theta(\{u_1\} \times V_1) \subseteq V_1$ , où  $u_1$  est un vecteur propre non nul de valeur propre  $\alpha_1$  (voir la preuve du Lemme 7.4.10). Si  $u \in V_1$  est un vecteur propre non nul pour  $\phi$  tel que sa valeur propre a poids  $l \notin \{l_2, l_3, -l_1/2\}$ , alors  $u \wedge u_1 = 0$ . En effet on doit avoir  $l > -l_1/2$  : sinon  $-2l \in L$  et  $-2l \geq l_1$ , donc  $-2l = l_1$ , ce qui est absurde par hypothèse. Donc  $-l-l_1 < -l_1/2$  et  $-l-l_1 \neq l_2$ , donc  $-l-l_1 \notin L$  (car, par la Proposition 7.5.1, il n'y a pas de poids dans  $L \cap ]l_2, -l_1/2[$ ), ce qui implique  $u \wedge u_1 = 0$ . Si  $u$  est un vecteur propre pour  $\phi$  dont la valeur propre est réelle de poids  $l_2$  ou  $l_3$ , le Lemme 7.5.3 implique que  $u \notin V_1$ ; de plus, comme  $l_2 \neq -l_1/2$ , grâce à la Remarque 7.5.2 on a que la seule valeur propre pour  $\phi$  de poids  $l_2$  est réelle.

Si  $u$  est un vecteur propre pour  $\phi$  dont la valeur propre  $\lambda$  est non réelle de poids  $l_3$ , on a  $u \wedge u_1 = 0$  : sinon  $(\lambda\alpha_1)^{-1}$  serait une valeur propre non réelle de poids  $l_2$ , contradiction par la Remarque 7.5.2.

Finalement, si  $u \in V_1$  est un vecteur propre non nul pour  $\phi$  tel que sa valeur propre  $\lambda$  a poids  $-l_1/2$ , et si  $u \wedge u_1 = w \neq 0$ , alors  $w$  est un vecteur propre de valeur propre  $\bar{\lambda}^{-1}$ , donc  $w \in V_1^\vee$  car  $\bar{\lambda}$  est conjugué à  $\lambda$ , ce qui montre l'énoncé.  $\square$

**Corollaire 7.5.6.** *Dans les hypothèses du Lemme 7.5.5,  $\alpha_1$  est cubique sans racines réelles.*

*Démonstration.* Si  $l$  est conjugué à  $\alpha_1$  et  $l \notin \{l_1, l_2, l_3\}$ , alors, par le Lemme 7.5.5,  $-2l$  est réellement conjugué à  $\alpha_1$ , donc, par le Lemme 7.5.3,  $-2l \in \{l_1, -l_1\}$ . Si on avait  $-2l = -l_1$ , comme par hypothèse  $-l_1 \notin \{l_1, l_2, l_3, 0\}$ , par la Proposition 7.5.1 on aurait  $-2(-l_1) = 2l_1 \in L$ , ce qui contredit la maximalité de  $l_1$ . On a donc  $l = -l_1/2$ .

On sait par la Remarque 7.5.2 et par le Lemme 7.5.3 que  $l_2$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$ .

Si  $l_3$  (qui est différent de  $l_1$  par hypothèse) était conjugué à  $\alpha_1$ , comme par le Lemme 7.5.3  $l_3$  ne peut pas être réellement conjugué à  $\alpha_1$ , par le Lemme 7.5.5  $-2l_3$  serait réellement conjugué à  $\alpha_1$ . Donc soit  $l_3 = -l_1/2$ , absurde par hypothèse, soit  $l_3 = l_1/2$ , donc  $l_2 = -3l_1/2$ ; mais, par la Proposition 7.5.1, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(-2)^n(-2l_3) \in \{l_1, l_2\}$ , et on obtient facilement une contradiction.

En résumant, le seul poids qui peut être conjugué à  $\alpha_1$  est  $-l_1/2$ , et il a multiplicité 2 car  $\sum_{l \in L_1} l = 0$ .  $\square$

**Lemme 7.5.7.** *Si*

$$l_2 \in \left\{ -\frac{l_1}{2} - 2l_1 \right\},$$

*alors  $\alpha_1$  est cubique sans conjugués réels.*

*La même conclusion vaut si  $l_2 = -l_1$  et  $\alpha_1$  n'est pas conjugué à  $\alpha_2 = \alpha_1^{-1}$ .*

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $l_2 = -l_1/2$ . Dans ce cas tous les éléments de  $L$  sont de la forme  $l_1/(-2)^n$  pour un  $n \geq 0$ ; on montre facilement que  $l_1/(-2)^n$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$  pour  $n \geq 2$  (voir la preuve du Lemme 7.4.7). Donc le seul poids conjugué à  $\alpha_1$  est  $-l_1/2$ , et sa multiplicité est 2 car  $\sum_{l \in L_1} l = 0$ .

Supposons maintenant que  $l_2 = -2l_1$ ; tous les éléments de  $L$  sont alors de la forme  $l_2/(-2)^n$  pour un  $n \geq 0$ . Remarquons d'abord que la première étape de la preuve appliquée à  $f^{-1}$  montre que  $\alpha_2$  est cubique sans conjugués réels.

On montre comme tout-à-l'heure que  $l_2/(-2)^n = l_1/(-2)^{n-1}$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$  pour  $n \geq 3$ , et, par le Lemme 7.5.3,  $\alpha_1$  n'est pas conjugué à  $\alpha_2$  (donc le poids  $l_2$  non plus, car  $\alpha_2$  est l'unique valeur propre de poids  $l_2$  par maximalité du module de  $l_2$ ). Donc les conjugués de  $\alpha_1$  sont tous de poids  $l_1$  ou  $-l_1/2$ .

De plus, comme on a

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2^{-1}}$$

et comme  $\alpha_2$  est cubique,  $\alpha_1$  est de degré 3 ou 6. Si c'était de degré 6, comme

$$\sum_{l \in L_1} l = 0,$$

le poids  $l_1$  aurait multiplicité 2 dans  $L_1$ , ce qui est absurde car alors  $p_1$  n'aurait pas de racine réelle de poids  $l_1$ .

On a donc montré que  $\alpha_1$  est cubique; ses deux conjugués étant de poids  $-l_1/2$ , ils ne sont pas réels, ce qui montre l'énoncé pour  $l_2 = -2l_1$ .

Si  $l_2 = -l_1$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  ne sont pas conjugués, par la Remarque 7.5.2  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les seules valeurs propres de poids  $l_1$  et  $l_2$  respectivement. Il est facile de montrer que, si  $n \geq 2$ , alors  $\pm l_1/(-2)^n$  n'est pas conjugué à  $\alpha_1$  (voir la preuve du Lemme 7.4.7), et, en reprenant la preuve du Lemme 7.5.5, on montre que

$$\theta(V_1 \times V_1) = V_1^\vee.$$

On a alors que les seuls poids qui peuvent être conjugués à  $\alpha_1$  sont  $l_1$  et  $-l_1/2$  : si  $l_1/2 \in L_1$ , alors  $-l_1 = l_2 \in L_1$ , ce qui est absurde. La multiplicité de  $l_1$  étant 1, celle de  $-l_1/2$  doit être 2, d'où l'énoncé.  $\square$

En résumant, on a montré le Théorème 7.2.2 dans le cas  $r = 1$ . En particulier on a deux cas différents pour les conjugués de  $\alpha_1 = \lambda_1(f)$  et de  $\alpha_2 = \lambda_2(f)^{-1}$  :

1.  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont tous les deux cubiques sans conjugués réels ;
2.  $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$ ,  $\alpha_1$  est conjugué à  $\alpha_2$  et leurs autres conjugués sont de module  $\sqrt{\alpha_1}$ , 1 ou  $\sqrt{\alpha_2} = 1/\sqrt{\alpha_1}$ .

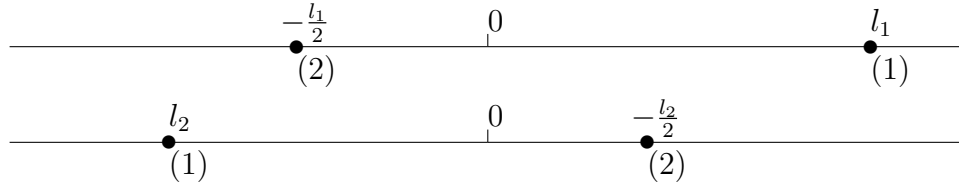


FIGURE 7.8 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  - Cas  $r(f) = 1$ , sous-cas 1

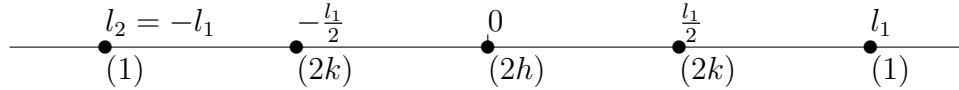


FIGURE 7.9 – Structure des poids conjugués à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  - Cas  $r(f) = 1$ , sous-cas 2

## 7.6 Exemples semi-simples sur les tores

On cherche maintenant à construire des exemples d'automorphismes  $f$  de tores complexes tels que  $f^* : W \rightarrow W$  soit semi-simple.

L'analyse est encore incomplète.

Comme dans le cas de la dimension 2, on a le Lemme suivant.

**Lemme 7.6.1.** *Si  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$  sont les racines, toutes non réelles, d'un polynôme  $p$  à coefficients entiers de degré 6, alors il existe un tore complexe  $X$  et un automorphisme holomorphe  $f \in \text{Aut}(X)$  tels que l'application linéaire induite  $f^* : H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  est diagonalisable avec valeurs propres  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$ .*

Supposons donc que les racines  $a_1, \dots, a_6$  de  $p \in \mathbb{Z}[x]$  soient toutes non réelles.

Comme  $H^2(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{C}) \wedge H^1(X, \mathbb{C})$ , les valeurs propres de

$$\phi = f^* : H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$$

sont les 15 nombres  $a_i a_j$ ,  $i < j$ . Soit

$$q(x) = \prod_{i < j} (x - a_i a_j) \in \mathbb{Z}[x]$$

le polynôme caractéristique de  $\phi$ , et soient

$$K_p = \mathbb{Q}(a_i)_{i=1, \dots, 6}, \quad K_q = \mathbb{Q}(a_i a_j)_{1 \leq i < j \leq 6}$$

les corps de décomposition de  $p$  et de  $q$  sur  $\mathbb{Q}$ .

On est intéressés à la décomposition de  $q$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ , donc au groupe  $G' = \text{Gal}(K_q/\mathbb{Q})$ . Comme  $K_q \subseteq K_p$ , on peut interpréter  $G'$  comme le quotient de  $G := \text{Gal}(K_p/\mathbb{Q})$  par  $H = \{g \in G \mid g|_{K_q} = \text{id}_{K_q}\}$ . Si on considère  $G$  comme un sous-groupe transitif de  $S_6$  (par permutation des  $a_i$ ), le groupe  $G'$  est donné, comme sous groupe de  $S_{15}$ , par l'action naturelle de  $G$  sur l'ensemble

$$A = \{B \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid \#B = 2\}.$$

On s'intéresse en particulier aux cardinalités des orbites de  $A$ , qui, là où les  $a_i a_j$  sont tous distincts, correspondent aux degrés des facteurs irréductibles de  $q$ .

On va utiliser les résultats du site [13] pour construire un bon nombre d'exemples (là où les polynômes test sont sans racines réelles).

On utilise les théorème du chapitre 7, en particulier le Théorème 7.2.2 et la description explicite des situations possibles pour  $r(f) = 1$  et  $r(f) = 2$ .

En particulier on sait que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2^{-1}$  sont cubiques sans conjugués réels, soit on est dans la situation  $r(f) = 2$ .

Dans les dessins, si on est dans la situation  $r = 2$ , on omet les écritures des poids  $l_1, -l_1/2 \dots$ , et on marque à côté de chaque poids sa multiplicité.

On rappelle que  $\alpha_1 = \lambda_1$ ,  $\alpha_2 = \lambda_2^{-1}$ ,  $\alpha_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2$ .

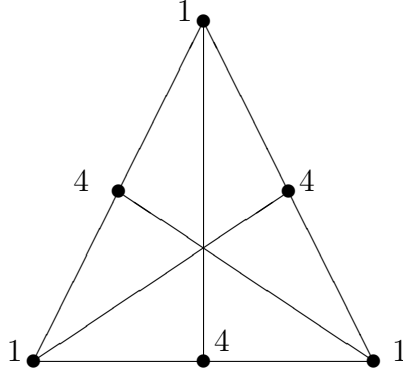


FIGURE 7.10 – Exemple 7.6.2

*Exemple 7.6.2.*  $p(x) = x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1$ ,  $G = S_6$ .  $A$  a une unique orbite de cardinalité 15 ;  $\lambda_1$  est donc conjugué à  $\alpha_2 = \lambda_2^{-1}$ , à  $\alpha_3 = \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$ , à deux couples de conjugués complexes de module  $1/\sqrt{\alpha_1}$ , deux de module  $1/\sqrt{\alpha_2}$  et deux de module  $1/\sqrt{\alpha_3}$ .

Cet exemple réalise donc le sous-cas 3 du cas  $r(f) = 2$ .

*Exemple 7.6.3.*  $p(x) = x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ ,

$$G = \langle (2, 4, 6), (3, 6)(1, 4)(2, 5) \rangle.$$

On a deux orbites : une de cardinalité 9 et l'autre de cardinalité 6 ; comme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne sont pas cubiques et  $\alpha_1 \neq \alpha_2^{-1}$ , on est dans la situation  $r = 2$ , et la seule possibilité est que  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  soient conjugués de degré 9 ; leurs autres conjugués sont trois couples de complexes conjugués de module  $1/\sqrt{\alpha_1}, 1/\sqrt{\alpha_2}, 1/\sqrt{\alpha_3}$  respectivement.

La même situation se vérifie pour  $p(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x + 1$ ,  $G = \langle (2, 4), (2, 4, 6), (3, 6)(1, 4)(2, 5) \rangle$ .

*Exemple 7.6.4.*  $p(x) = x^6 + x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ ,

$$G = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 4)(2, 3)(5, 6) \rangle.$$

Comme on vient de dire, on a 3 orbites : deux de cardinalité 6 et une de cardinalité 3. On trouve que, si  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \gamma, \bar{\gamma}$  sont les racines de  $p$  avec  $|\alpha| \geq |\beta| \geq \gamma$ , alors

$$|\alpha| = |\beta|^{-2} = |\gamma|^{-2}.$$



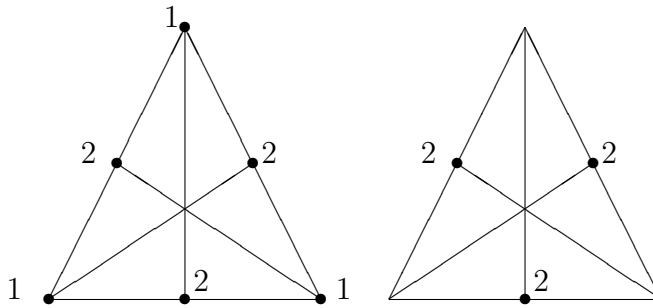


FIGURE 7.11 – Exemple 7.6.3

En particulier  $\lambda_1 = \lambda_2^2$ , et, comme  $|\beta|^2 = |\gamma|^2$ , les deux facteurs irréductibles de  $q$  de même degré sont égaux au polynôme minimal de  $|\beta|^2$ .

Comme  $|\alpha|^2$  et  $|\beta|^2$  sont réels et liés par la relation algébrique  $|\alpha|^2 = |\beta|^{-4}$ , ils ne sont pas conjugués, donc le facteur de degré 3 est le polynôme minimal de  $|\alpha|^2$ ; d'ailleurs, on savait déjà par le Lemme 7.5.7 que  $\lambda_1$  était cubique sans conjugués réels.

Cet Exemple donc réalise le sous-cas 1 pour  $r(f) = 1$ .



# Chapitre 8

## Dimension 3 : cas mixte

On conclut l'analyse de la dimension 3 par le cas mixte, c'est-à-dire le cas où  $f^*$  n'est ni semi-simple ni unipotent. On arrive à montrer que cette situation est très rare ; le Théorème principale de ce paragraphe est le suivant.

Comme dans le cas semi-simple, on note

$$\phi = f^* : H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$$

et

$$(\phi^\vee)^{-1} = f^* : H^4(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{C}).$$

**Théorème 8.0.5.** *Soit  $X$  une variété compacte de Kähler de dimension 3,  $f \in \text{Aut}(X)$  tel que  $\lambda_1(f) > 1$  et tel que  $\phi$  ne soit pas semi-simple. Alors*

- $\lambda_1(f) \in \{\lambda_2(f)^2, \lambda_2(f)^{1/2}\}$  ; en particulier  $r(f) = 1$  et  $\lambda_1(f)$  et  $\lambda_2(f)$  sont tous les deux cubiques sans conjugués réels ;
- si  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$ , alors la valeur propre  $\lambda_2(f)^{-1}$  possède un bloc de Jordan non trivial de dimension  $h \leq 3$  ; les autres valeurs propres dans  $\Lambda$  ayant des blocs non triviaux sont de module  $\lambda_2(f)^{1/2} = \lambda_1(f)^{1/4}$ , et leurs blocs sont de dimension au plus  $h - 1$  (en particulier au plus 2) ;
- de même, si  $\lambda_1(f) = \sqrt{\lambda_2(f)}$ , alors la valeur propre  $\lambda_1(f)$  possède un bloc de Jordan non trivial de dimension  $h \leq 3$  ; les autres valeurs propres dans  $\Lambda$  ayant des blocs non triviaux sont de module  $\lambda_1(f)^{-1/2}$ , et leurs blocs sont de dimension au plus  $h - 1$  (en particulier au plus 2).

Pour le reste du paragraphe on suppose que  $\lambda_1(f) \neq 1$ , c'est-à-dire que ni  $f^*$  ni ses puissances ne sont unipotents.

**Lemme 8.0.6.** *Les valeurs propres  $\alpha_1 = \lambda_1(f)$  et  $\alpha_2 = \lambda_2(f)^{-1}$  ne possèdent pas de bloc de Jordan de dimension plus grande que 3; si  $\alpha_1 \notin \{\alpha_2^{-2}, \alpha_2^{-1/2}\}$ , alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne possèdent pas de bloc de Jordan non trivial.*

*Démonstration.* Par le Théorème 7.2.1 (partie 3), si  $\alpha_1 \notin \{\alpha_2^{-2}, \alpha_2^{-1/2}\}$  alors  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont multiplicité 1 dans  $\Lambda$ , donc en particulier ils ne possèdent pas de bloc de Jordan non trivial.

Supposons donc que  $\lambda = \lambda_1(f) = \lambda_2(f)^{1/2}$ ; le cas  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$  se déduit en considérant  $f^{-1}$  au lieu de  $f$ . Dans ce cas  $\lambda$  peut avoir multiplicité  $> 1$  dans  $\Lambda$ , donc il pourrait y avoir un bloc de Jordan non trivial. Supposons par l'absurde que  $u_1, \dots, u_k$ , avec  $k > 3$ , forment une base de Jordan pour la valeur propre  $\lambda$  :  $\phi(u_1) = \lambda u_1$ ,  $\phi(u_h) = \lambda u_h + u_{h-1}$  pour  $h = 2, \dots, k$ . Par le Corollaire 1.3.3, on a

$$(f^n)^* u_k = Q_{k-1}(n)u_1 + Q_{k-2}(n)u_2 + Q_{k-3}(n)u_3 + o(|\lambda|^n n^{k-3})$$

et

$$(f^n)^* u_{k-1} = Q_{k-2}(n)u_1 + Q_{k-3}(n)u_2 + Q_{k-4}(n)u_3 + o(|\lambda|^n n^{k-4}),$$

où

$$Q_h(n) \sim b_h \lambda^n n^h \quad b_h := \frac{1}{\lambda^h h!}$$

Maintenant, si on trouve  $v \in H^4(X, \mathbb{R})$  tel que  $\|(f^*)^n(v)\| \sim c^{te} n^e \lambda^{2n}$ , avec  $e \geq 1$ , on a une contradiction : en effet, cela veut dire que l'application  $(\phi^\vee)^{-1}$  possède un bloc de Jordan non trivial pour la valeur propre  $\lambda^2$ , donc que l'application  $\phi$  possède un bloc non trivial pour la valeur propre  $\lambda^{-2} = \alpha_2$ ; en particulier cela implique que la multiplicité de  $\lambda_2(f)^{-1}$  dans  $\Lambda$  est strictement supérieure à 1, ce qui est absurde par le Théorème 7.2.1 car  $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)^2$ . On montre que cette propriété est réalisée soit par  $v = u_k \wedge u_k$  soit par  $v' = u_{k-1} \wedge u_{k-1}$ . On note  $Q_h = Q_h(n)$ .

$$\begin{aligned} (f^*)^n(u_k \wedge u_k) &= Q_{k-1}^2(u_1 \wedge u_1) + 2Q_{k-1}Q_{k-2}(u_1 \wedge u_2) + \\ &\quad + 2Q_{k-1}Q_{k-3}(u_1 \wedge u_3) + Q_{k-2}^2(u_2 \wedge u_2) + o(\lambda^{2n} n^{2k-4}), \end{aligned}$$

donc, pour que  $(\phi^\vee)^{-1}$  n'ait pas de bloc de Jordan non trivial pour  $\lambda^2$ , il faut que  $u_1 \wedge u_1 = u_1 \wedge u_2 = 0$ ; or, comme

$$(f^*)^n(u_k \wedge u_k) \sim (2b_{k-1}b_{k-3}(u_1 \wedge u_3) + b_{k-2}^2(u_2 \wedge u_2)) \lambda^{2n} n^{2k-4},$$

on doit aussi avoir  $2b_{k-1}b_{k-3}(u_1 \wedge u_3) + b_{k-2}^2(u_2 \wedge u_2) = 0$ .

De même

$$\begin{aligned} (f^*)^n(u_{k-1} \wedge u_{k-1}) &= Q_{k-2}^2(u_1 \wedge u_1) + 2Q_{k-2}Q_{k-3}(u_1 \wedge u_2) + \\ &+ 2Q_{k-2}Q_{k-4}(u_1 \wedge u_3) + Q_{k-3}^2(u_2 \wedge u_2) + o(\lambda^{2n}n^{2k-6}) \sim \\ &(2b_{k-2}b_{k-4}(u_1 \wedge u_3) + b_{k-3}^2(u_2 \wedge u_2)) \lambda^{2n}n^{2k-6}, \end{aligned}$$

donc  $2b_{k-2}b_{k-4}(u_1 \wedge u_3) + b_{k-3}^2(u_2 \wedge u_2) = 0$ .

Mais

$$\det \begin{pmatrix} 2b_{k-1}b_{k-3} & b_{k-2}^2 \\ 2b_{k-2}b_{k-4} & b_{k-3}^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

ce qui implique  $u_1 \wedge u_3 = u_2 \wedge u_2 = 0$ , ce qui est absurde par le Corollaire 1.1.2 car on a aussi  $u_1 \wedge u_1 = u_1 \wedge u_2 = 0$ .  $\square$

**Lemme 8.0.7.** *Si  $\lambda_1(f) \notin \{\lambda_2(f)^2, \lambda_2(f)^{1/2}\}$ , alors  $f^*$  est semi-simple.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\phi$  possède un bloc de Jordan non trivial pour la valeur propre  $\lambda$  de poids  $l$ .

D'abord, par le Théorème 7.2.1,  $l_1$  et  $l_2$  ont multiplicité 1 dans  $L$ , donc en particulier  $l \notin \{l_1, l_2\}$ , ou, autrement dit,  $\lambda \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

Si  $\lambda = 1$ , soit  $u_1, \dots, u_k \in H^2(X, \mathbb{R})$  une base pour un bloc de Jordan maximal pour la valeur propre 1, et soit  $v \in H^2(X, \mathbb{R})$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\alpha_1 : f^*(v) = \alpha_1 v$ . On applique le Corollaire 1.1.2 aux vecteurs  $u_1$  et  $v$ .

On a  $v \wedge v = 0$ , sinon  $\alpha_1^{-2} = \lambda_1(f)^{-2} \in \Lambda$ , ou, autrement dit,  $\lambda_1(f)^2$  est une valeur propre de  $f_2^*$ ; mais  $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)^{1/2}$  et par concavité  $\lambda_1(f) \geq \lambda_2(f)^{1/2}$ , donc  $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)^{1/2}$ , et on obtient une contradiction car  $\lambda_1(f)^2$  est une valeur propre de  $f_2^*$  strictement plus grande que  $\lambda_2(f)$ .

Si on avait  $u_1 \wedge v \neq 0$ , alors

$$(f^*)^n(u_k \wedge v) = ((\phi^\vee)^{-1})^n(u_k \wedge v) \sim c^{te} \alpha_1^n n^{k-1} (u_1 \wedge v),$$

ce qui implique que  $\alpha_1^{-1}$  est une valeur propre avec un bloc de Jordan non trivial pour  $\phi$ ; comme  $\alpha_1^{-1} \in \Lambda$ , par le Théorème 7.2.1 on est dans le cas  $r(f) = 1$ , et, par la Proposition 7.5.1  $\alpha_1^{-1} \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  (sinon le poids  $2l_1$  appartient à  $L$ , ce qui contredit la maximalité). La seule alternative possible est  $\alpha_1^{-1} = \alpha_2$ , et, comme  $\alpha_2$  n'a pas de bloc de Jordan non trivial, on obtient

une contradiction.

Finalement, si  $u_1 \wedge u_1 \neq 0$ , alors

$$(f^*)^n(u_k \wedge u_k) = ((\phi^\vee)^{-1})^n(u_k \wedge u_k) \sim c^{te} n^{2k-2}(u_1 \wedge u_1),$$

donc la valeur propre 1 possède un bloc de Jordan de dimension au moins  $2k - 1$ , ce qui contredit la maximalité de  $k$ . On a donc montré que  $\phi$  ne possède pas de bloc de Jordan non trivial pour la valeur propre 1.

Supposons maintenant que  $l \notin \{l_1, l_2, l_3\}$ , que  $\lambda \neq 1$  et que  $k$  soit la dimension d'un bloc de Jordan maximal pour les  $\lambda$  avec ces propriétés. Par le Théorème 7.2.1, si on appelle  $u_1, \dots, u_k \in H^2(X, \mathbb{C})$  une base de Jordan pour  $\lambda$ , on a  $u_1 \wedge \bar{u}_1 \neq 0$ , donc  $(f^*)^n(u_k \wedge \bar{u}_k) \sim c^{te} |\lambda|^{2n} n^{2k-2}(u_1 \wedge \bar{u}_1)$ , donc la valeur propre  $|\lambda|^{-2}$  possède un bloc de Jordan de dimension  $> k$ .

Par maximalité on a alors

$$l \in \left\{ -\frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{2}, -\frac{l_3}{2} \right\}.$$

Si on avait  $l = l_1/2$ , on aurait un bloc non trivial pour  $\alpha_1$ , donc  $l \neq -l_1/2$ ; de même  $l \neq -l_2/2$ , donc  $l = -l_3/2$ ; il suffit maintenant de montrer que la valeur propre  $\alpha_3$  n'admet pas de bloc de Jordan non trivial pour obtenir une contradiction et montrer le Lemme.

Supposons donc que  $\lambda = \alpha_3$ . Si  $\alpha_3 = 1$  on a déjà trouvé une contradiction; supposons donc  $\alpha_3 \neq 1$ , c'est-à-dire  $\alpha_1 \neq \alpha_2^{-1}$ . Soit  $v \in H^2(X, \mathbb{R}) - \{0\}$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\alpha_1$ , et soit  $u_1, \dots, u_k \in H^2(X, \mathbb{R})$  une base pour un bloc de Jordan non trivial pour la valeur propre  $\alpha_3$ . On sait déjà que  $v \wedge v = 0$  car  $\alpha_1 \neq \alpha_2^{-1/2}$ ; si  $v \wedge u_1 \neq 0$ , alors  $(f^*)^n(u_k \wedge v) \sim c^{te} \alpha_1^n \alpha_3^n n^{k-1}$ , donc la valeur propre  $\alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1} = \alpha_2$  possède un bloc de Jordan non trivial, ce qui est absurde; finalement, si  $u_1 \wedge u_1 \neq 0$ , on a  $(f^*)^n(u_k \wedge u_k) \sim c^{te} \alpha_3^{2n} n^{2k-2}$ , donc la valeur propre  $\alpha_3^{-2}$  possède un bloc de Jordan non trivial, ce qui est absurde par ce qu'on vient de dire.

On a donc montré qu'aucune valeur propre ne peut avoir de bloc de Jordan non trivial.  $\square$

Le Lemme suivant termine la preuve du Théorème 8.0.5.

**Lemme 8.0.8.** *Supposons que  $\phi$  ne soit pas semi-simple.*

1. *Si  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^2$ , alors  $\phi$  possède un unique bloc de Jordan non trivial de dimension au plus 3 pour la valeur propre  $\lambda_2(f)^{-1}$ ; tous les autres blocs non triviaux sont de dimension strictement inférieure et correspondent à des valeurs propres de module  $\lambda_1(f)^{1/4}$ .*

2. Si  $\lambda_1(f) = \lambda_2(f)^{1/2}$ , alors  $\phi$  possède un unique bloc de Jordan non trivial de dimension au plus 3 pour la valeur propre  $\lambda_1(f)$ ; tous les autres blocs non triviaux sont de dimension strictement inférieure et correspondent à des valeurs propres de module  $\lambda_2(f)^{-1/4} = \lambda_1(f)^{-1/2}$ .

*Démonstration.* On montre le premier énoncé, le second se déduisant en considérant  $f^{-1}$  au lieu de  $f$ .

Comme  $l_1 = -2l_2$ , on est dans le cas  $r(f) = 1$ , et par la Proposition 7.5.1, à multiplicité près,

$$L = \left\{ \frac{l_1}{(-2)^i} \quad i = 0, \dots, N \right\} (\cup \{0\}).$$

On note  $M_n$  la dimension maximale des blocs de Jordan pour valeurs propres de poids  $l_1/(-2)^n$ .

Soit  $u_1, \dots, u_k$ ,  $k > 1$ , la base d'un bloc non trivial pour un  $\lambda \in \Lambda$  de poids  $l \notin \{0, l_1, l_2\}$ . Comme  $l_3 = -l_1 - l_2 = l_2$ ,  $u_1$  est un vecteur propre dont la valeur propre a poids  $l \notin \{0, l_1, l_2, l_3\}$ , donc par la Proposition 7.5.1  $u_1 \wedge \bar{u}_1 \neq 0$ ; on a alors

$$\|(f^*)^n(u_k \wedge \bar{u}_k)\| \sim c^{te} |\lambda|^{2n} n^{2k-2}.$$

Par conséquent, la valeur propre  $|\lambda|^{-2}$  possède un bloc de Jordan de dimension au moins  $2k - 1$  (donc au moins  $k + 1$  si  $k > 1$ ).

On a donc

$$n \geq 2, \quad M_n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad M_{n-1} > M_n.$$

Par le Lemme 8.0.6, comme  $\lambda_1 = \lambda_2^2$ , on a

$$M_0 = 1 \quad M_1 \leq 3,$$

ce qui implique que  $M_2 \leq 2$  et  $M_n = 1$  pour tout  $n \geq 3$ .

Il ne nous reste à montrer que le fait que les valeurs propres de module 1 ne possèdent pas de bloc de Jordan non trivial; pour cela on procède comme dans la preuve du Lemme 8.0.7.

On suppose par l'absurde qu'il existe un bloc de Jordan non trivial pour une valeur propre de module 1, avec base de Jordan  $u_1, \dots, u_k$ , tel que  $k$  soit maximal; soit  $v$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda := \lambda_1(f)$ . On applique le Corollaire 1.1.2 aux vecteurs  $u_1$  et  $v$ .

Si  $u_1 \wedge \bar{u}_1 \neq 0$ , alors

$$\|(f^*)^n(u_k \wedge \bar{u}_k)\| \sim c^{te} n^{2k-2},$$

donc il existe une valeur propre de  $\phi$  de module 1 qui possède un bloc de dimension au moins  $2k - 1 > k$ , ce qui est absurde par maximalité.

Si  $u_1 \wedge v \neq 0$ , alors

$$\|(f^*)^n(u_k \wedge \bar{v})\| \sim c^{te} \lambda^n n^{k-1},$$

donc en particulier  $\phi$  possède une valeur propre de module  $\lambda^{-1}$ , ce qui est absurde par la structure des poids.

Finalement, si  $v \wedge \bar{v} \neq 0$ , alors

$$\|(f^*)^n(v \wedge \bar{v})\| \sim c^{te} |\lambda|^{2n},$$

donc  $\lambda^{-2}$  est le module d'une valeur propre de  $\phi$ , ce qui est absurde par la structure des poids.  $\square$



# Bibliographie

- [1] E. ARTIN, *Galois theory*, University of Notre Dame press, London, 1971
- [2] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1991, p. 46-88
- [3] G. BIRKHOFF, *Linear transformations with invariant cones*, The American Mathematical Monthly Vol. 74, No. 3 (Mar., 1967), Mathematical Association of America, p. 274-276
- [4] S. CANTAT, *Dynamics of automorphisms of compact complex surfaces*, dans *Frontiers in Complex Dynamics : a volume in honor of John Milnor's 80th birthday*, Princeton University Press, encore à publier, voir [http ://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Articles/dyn-aut.pdf](http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Articles/dyn-aut.pdf)
- [5] V. GUEDJ, *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*, dans "Quelques aspects des systèmes dynamiques polynômiaux", Société Mathématique de France, 2010, p. 119-130
- [6] J.-P. DEMAILLY, *Complex analytic and differential geometry*, livre OpenContent, [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook.pdf), p. 13-20, 129-137
- [7] T.-C. DINH & V.-A. NGUYÊN, *The mixed Hodge-Riemann bilinear relations for compact Kähler manifolds*, Geom. func. anal. Vol. 16 (2006), Birkhäuser Verlag, Basel, p. 838-849
- [8] T.-C. DINH & N. SIBONY, *Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte*, Duke Mathematical Journal Vol. 123, No.2, p. 311-328
- [9] M. GROMOV, *Convex sets ens Kähler manifolds*, Advances in differential geometry and topology, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990, p. 1-38
- [10] R. LAZARSELD, *Positivity in algebraic geometry I*, Springer, New York, 2004, p. 1-94

- [11] L. MARQUIS, *Around groups in Hilbert geometry*, livre OpenContent, <http://arxiv.org/pdf/1303.7099.pdf>, p. 6-8
- [12] P. RESCHKE, *Salem numbers and automorphisms of complex surfaces*, *Math. Res. Lett.* 19 (2012), no. 02, p. 475-482
- [13] <http://world.std.com/jmccarro/math/GaloisGroups/GaloisGroupPolynomials.html>