MASTER 2 – RENNES

SERGE CANTAT

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ définie par $f[x:y:z] = [x^3+y^2z : y^3+z^3 : x^2y+y^2x]$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $[a:b:c]$ prépériodiques pour f dont les coordonnées a, b, et c sont des nombres algébriques de degré 2. Exsite-t-il un point de $\mathbb{P}^2(\mathbf{Q})$ dont l'orbite soit égale à $\mathbb{P}^2(/Q)$? (justifier)

Exercice 2. Construire une suite de nombres algébriques $x_n \in \overline{\mathbf{Q}}$ dont la hauteur vérifie $h(x_n) \simeq \sqrt{n}$ (lorsque n tend vers $+\infty$).

Exercice 3. Etudier la notion de dimension en géométrie algébrique, plus précisément pour les sous-variétés algébriques de l'espace affine $\mathbb{A}^m_{\mathbf{C}}$ (voir les livres de Daniel Perrin, de Igor Shafarevich, ou de Brendan Hassett). Résumer ce que vous avez appris en une page, une page et demi: comment peut-on définir cette notion de dimension ? Quelles sont les définitions équivalentes? Comment peut-elle être comparée à la notion de dimension usuelle pour les variétés réelles lisses définies en géométrie différentielle ? Une sous-variété de codimension 1 est-elle toujours définie par une unique équation ? Et en codimension 2?

Exercice 4. Soit Γ un groupe et Γ_0 un sous-groupe de Γ d'indice fini. Montrer que Γ_0 contient un sous-groupe d'indice fini Γ_1 qui est distingué dans Γ.

Exercice 5. Cet exercice démontre la continuité des racines en fonction du polynôme. Soit K un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. Soit $P(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i$ un élément de $K[t]$ de degré d, et $P_n(t)$ une suite d'éléments de $K[t]$ de degrés d dont les coefficients tendent vers ceux de P. Autrement dit,

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{d} (a_i + \varepsilon_i(n)) t^i$$

avec $\lim_n |\varepsilon_i(n)| = 0$ pour tout $0 \leq i \leq d$. Soient α_j, $1 \leq j \leq d$, les racines de P, répétées selon leur multiplicité. On numérote les racines $\alpha_j(n)$ de P_n de telle sorte que $|\alpha_j - \alpha_j(n)| = \min_k |\alpha_j - \alpha_k(n)|$ pour tout n, pour tout j.

Date: 2022.

(1) Montrer que $\alpha_1(n)$ converge vers α_1 lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra changer P (resp. P_n) en $P(t-\alpha_1)$ (resp. $P_n(t-\alpha_1)$) et étudier le terme constant de ces polynômes.

(2) On effectue la division de P par $(t-\alpha_1)$ et de P_n par $(t-\alpha_1(n))$:

$$P(t) = (t-\alpha_1)H(t), \qquad P_n(t) = (t-\alpha_1(n))H_n(t).$$

Montrer que H_n converge vers H dans l'espace des polynômes de degré $d-1$. (exprimer les coefficients des H_n en fonction de ceux des P_n).

(3) Conclure.

On notera que cette preuve n'utilise pas d'hypothèse de compacité locale ou de complétude pour $(K, |\cdot|)$.

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: serge.cantat@univ-rennes1.fr