1997 European Summer School in Group Theory

Luminy July 7-18

SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES DE LIE

Yves Benoist

Résumé Nous présentons dans ce cours quelques propriétés générales des sous-groupes discrets des groupes de Lie: éléments de torsion , existence de sous-groupes libres, existence d'éléments proximaux, comportement asymptotique...

Nous construisons quelques exemples de tels sous-groupes.

Nous relions cette étude à diverses questions d'origine géométrique.

Discrete subgroups of Lie groups

Abstract In this course, we explain some general properties of the discrete subgroups of Lie groups: torsion elements, existence of free subgroups, existence of proximal elements, asymptotic behaviour...

We construct a few examples of such subgroups.

We relate this study to problems of geometric origin.

Introduction

Un groupe *linéaire* est un sous groupe du groupe $\mathrm{GL}(m,k)$ des matrices $m \times m$ à coefficients dans un corps k.

L'étude des sous-groupes des groupes de Lie réels est très liée à celle des groupes linéaires. En effet, l'application adjointe permet de voir tout sous-groupe Γ d'un groupe de Lie comme une extension centrale du groupe linéaire $\mathrm{Ad}\Gamma$. Réciproquement, si on dispose d'un plongement de k dans $\mathbb{C}$ notre groupe linéaire s'identifie à un sous-groupe d'un groupe de Lie.

Le concept qui me semble le plus utile pour l'étude d'un groupe linéaire Γ est la notion d'*adhérence de Zariski.* C'est à dire le plus petit sous-groupe algébrique contenant Γ.

L'efficacité de cette notion tient en ce que, d'une part elle conserve certaines propriétés du groupe Γ et d'autre part on peut lui appliquer les techniques de groupes algébriques.

Comme nous restreignons l'essentiel de ce cours aux groupes linéaires réels, les notions relatives aux groupes algébriques dont nous aurons besoin resteront assez élémentaires.

Donc, pour étudier un groupe linéaire Γ (le plus souvent réel et discret même si cette hypothèse n'est pas faite), on le considère comme sous-groupe Zariski dense de... son adhérence de Zariski. Si cette adhérence de Zariski G est résoluble, la situation est, de notre point de vue, bien comprise. Sinon, on peut projeter Γ sur un quotient semisimple de G. On obtient ainsi un sous-groupe Zariski dense d'un groupe algébrique semisimple. La plus grosse partie de ce cours est consacrée à cette situation. Parmi ces sous-groupes, les "plus petits" sont les groupes de Schottky qui joueront un rôle d'exemple mais seront aussi un outil pour les démonstrations.

Les applications géométriques que nous esquissons dans ce cours tournent autour de la question: Comprendre les sous-groupes discrets d'un groupe de Lie G qui agissent proprement sur un espace homogène G/H ou sur un ouvert de cet espace homogène.

Certains chapitres de ce texte sont issus des cours que j'ai donnés à l'université Paris 7 en 92 et 94.

Structure du cours

Le chapitre 2 est consacré à des résultats préliminaires sur les groupes linéaires qui seront utiles dans les chapitres suivants. Ces résultats sont basés sur l'étude des éléments de torsion d'un groupe linéaire.

Le chapitre 3 est consacré à l'existence de sous-groupes libres dans les groupes linéaires. Le résultat lui-même ne sera pas appliqué dans la suite, mais les idées introduites dans sa démonstration seront constamment réutilisées.

Le chapitre 4 est consacré à l'existence d'éléments loxodromiques dans les sous-groupes Zariski denses des groupes semisimples. L'existence de ces éléments est indispensable pour l'étude de leur comportement asymptotique.

Le chapitre 5 est consacré à quelques propriétés des applications linéaires proximales dont nous aurons besoin dans les deux chapitres suivants.

Les chapitres 6 et 7 sont consacrés au comportement asymptotique d'un sous-groupe Zariski dense Γ d'un groupe linéaire semisimple réel G. On y introduit le cône limite de Γ et on montre ses principales propriétés.

Le chapitre 8 est un pot-pourri d'exemples, d'applications et de motivations. Une d'elles étudie les quotients des espaces homogènes réductifs. Une autre est consacrée aux sous-groupes discrets des groupes de Lie généraux G et à leur projection dans une composante de Levi.

Le chapitre 9 est un chapitre de rappels sur les (G, X)-structures utiles dans le dernier chapitre.

Dans le chapitre 10, on construit des sous-groupes discrets Zariski-denses de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ qui agissent proprement et avec quotient compact sur un cône ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^m$.

Les chapitres 2, 3, 9 et 10 peuvent être lus sans connaissances préalables sur les groupes de Lie. Il en est de même des chapitres 4, 5, 6 et 7 si le lecteur fait, comme cela est suggéré dans le texte, l'hypothèse que le groupe G est le groupe $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$. Une lecture plus approfondie de ces deux chapitres nécessite quelques propriétés de la structure des groupes semisimples réels et de leurs représentations de dimension finie que l'auteur n'a pas eu le temps de rédiger. Le lecteur est invité à les admettre.

De nombreux résultats de ce cours sont démontrés de A à Z... Ce choix alourdit considérablement le texte et ne nous permettra de visiter qu'une petite parcelle du vaste domaine des "sous-groupes discrets des groupes de Lie": celle qui longe le champ des variétés affines. Les réseaux qui sont l'objet des monographies [9], [45] et [31] ne seront pas abordés.

Ce texte relate des mathématiques des années 90. Cela lui confère un caractère un peu désuet et lui donne l'apparence d'une version inachevée. Certes, de nombreux points mériteraient d'être développés. Mais cela en fait surtout un texte très accessible pour les doctorants. J'espère que ce cours constituera une base de réflexion pour des recherches futures et qu'il continuera à "populariser" ce sujet. Je remercie les étudiants qui m'ont signalé les coquilles, erreurs ou incohérences qu'ils avaient rencontrés.

Table des matières

1 Notations

1.1 Groupes

Rassemblons dans cette partie, quelques définitions de base de théorie des groupes.

Un groupe est dit *de type fini* s'il est engendré par une partie finie.

Un groupe est dit *sans torsion* si l'élément neutre e est le seul élément d'ordre fini.

Un groupe est dit *de torsion* si tous ses éléments sont d'ordre fini.

Soient A et B sont deux sous-groupes d'un groupe H. On note $[A, B]$ le sous-groupe de H engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, avec a dans A et b dans B

Un groupe H est dit *nilpotent* si la suite centrale descendante $C^i(H)$, définie par récurrence par $C^0(H) = H$ et $C^i(H) = [C, C^{i-1}(H)]$, contient le groupe trivial.

Un groupe H est dit *résoluble* si la suite dérivée $D^i(H)$, définie par récurrence par $D^0(H) = H$ et $D^i(H) = [D^{i-1}(H), D^{i-1}(H)]$, contient le groupe trivial.

Un groupe est dit avoir *virtuellement* une propriété (par exemple *virtuellement sans torsion*, *virtuellement abélien*, *virtuellement résoluble*...) si il existe un sous-groupe d'indice fini qui vérifie cette propriété.

Exercice 1.1 *Montrer que tout sous-groupe d'indice fini Γ' d'un groupe de type fini est encore de type fini.*

Indication: Noter (γ_n) une famille finie de générateurs de Γ et a_i une famille finie de représentants des classes modulo Γ' et vérifier que les éléments de la forme $a_i\gamma_n a_j^{-1}$ qui sont dans Γ' engendrent Γ'.

1.2 Topologie de Zariski

Rassemblons dans cette partie, quelques définitions de base de topologie de Zariski.

Soit k un corps (i.e. un anneau à division commutatif), $V \simeq k^m$ un k-espace vectoriel de dimension m et $k[V]$ l'anneau des polynômes sur V à coefficients dans k. Pour toute partie E de V et tout idéal I de $k[V]$, on note $I(E)$ l'idéal des polynômes nuls sur E: $I(E) = \{P \in k[V] \ / \ \forall v \in E \ , \ P(v) = 0 \ \}$ et $Z(I)$ l'ensemble des zéros communs àux polynômes de I: $Z(I) = \{v \in V \ / \ \forall P \in I \ , \ P(v) = 0 \ \}$.

Une partie F de V est un *fermé de Zariski* si F est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes, c'est à dire si il existe un idéal I de $k[V]$ tel que $F := Z(I)$. Une partie est un *ouvert de Zariski* si son complémentaire dans V est un fermé de Zariski. Ces fermés définissent une topologie sur V appelée *topologie de Zariski*. L'ensemble $\overline{E} := Z(I(E))$ est l'*adhérence de Zariski* de E: c'est le plus petit fermé de Zariski contenant E. Pour *toute* partie E de V, on appelle *topologie de Zariski sur* E la topologie induite sur E par la topologie de Zariski de V.

Une partie E' de E est *Zariski dense* dans E si $\overline{E'} = \overline{E}$ c'est à dire si tout polynôme nul sur E' est nul sur E.

La partie E de V est *Zariski connexe* si elle n'est pas réunion disjointe de deux parties Zariski fermées non vides disjointes. On appelle *composantes Zariski connexes* de E les parties Zariski connexes maximales de E.

La partie E de V est *irréductible* si elle n'est pas réunion de deux parties Zariski fermées non vides distinctes de E. Une partie irréductible de V est donc Zariski connexe. Remarquons que dans une partie irréductible de V, l'intersection de deux ouverts de Zariski non vides est toujours non vide. On appelle *composantes irréductibles* de E les parties irréductibles maximales de E.

Exemples - Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ est un ouvert de Zariski de $\mathrm{End}(V)$.

- Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(V)$ est un fermé de Zariski de $\mathrm{End}(V)$.

- La réunion de deux droites distinctes de V est une partie Zariski connexe de V qui n'est pas irréductible.

Exercice 1.2 *Montrer qu'une partie E de V n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles et que E est la réunion de ses composantes irréductibles.*

Indication: on utilisera la noethérianité de l'anneau $k[V]$.

Exercice 1.3 *a) Soient Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et Γ_e la composante irréductible de Γ contenant l'élément neutre e. Montrer que Γ_e est un sous-groupe distingué d'indice fini de Γ.*

Indication: on remarquera que la multiplication par un élément de Γ permute les composantes irréductibles.

b) Montrer que tout sous-groupe Zariski connexe de $\mathrm{GL}(V)$ est irréductible.

Exercice 1.4 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et G son adhérence de Zariski.*

a) Montrer que G est un groupe.

b) Montrer que le groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ est Zariski dense dans $[G, G]$.

c) Montrer que Γ est abélien si et seulement si G l'est.

d) Montrer que Γ est nilpotent si et seulement si G l'est.

e) Montrer que Γ est résoluble si et seulement si G l'est.

f) Soit Δ un sous-groupe de Γ et H l'adhérence de Zariski de Δ.

Montrer que Δ est distingué dans Γ si et seulement si H est distingué dans G

Exercice 1.5 *Soit k' une extension de k et $V' := k' \otimes_k V \simeq k'^m$ le k'-espace vectoriel obtenu par extension des scalaires.*

a) Montrer que la topologie de Zariski de V est induite par celle de V'.

b) Montrer que, pour une partie E de V, les notions d'irréducibilité, de Zariski connexité,... ne sont pas modifiées par une telle extension des scalaires.

2 Torsion dans les groupes linéaires

Nous commencerons ce chapitre en montrant qu'en caractéristique nulle, un groupe linéaire de type fini est virtuellement sans torsion (lemme 2.1).

Dans le groupe de Lie $\mathbb{R}^p$, il est facile de construire des éléments aussi petits que l'on veut qui engendrent un réseau. La proposition 2.5 est une sorte de réciproque.

Nous en déduirons que les sous-groupes de torsion des groupes de Lie sont virtuellement abéliens (proposition 2.8). Un tel énoncé est utile pour démontrer l'alternative de Tits (théorème 3.10) pour des groupes qui ne sont pas de type fini.

2.1 Groupes linéaires sans torsion

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.1 (Selberg) *Soient k un corps de caractéristique nulle et m un entier. Tout sous-groupe de type fini du groupe* $\mathrm{GL}(m,k)$ *est virtuellement sans torsion.*

Le cas qui nous intéresse le plus est le cas où $k = \mathbb{R}$. Cependant, la démonstration est basée sur une idée qui reviendra dans ce cours: changer de corps k pour en trouver un plus adapté à notre problème!

Un mot sur l'intérêt géométrique de ce lemme avant d'en donner la démonstration. Soit X une variété C^∞ et Γ un groupe discret de difféomorphismes de X dont l'action sur X est propre[1]. Alors le quotient $V = \Gamma\backslash X$ est une variété C^∞ si et seulement si Γ n'a pas de torsion. En particulier, lorsque le quotient V est compact[2], il existe donc un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ tel que le "revêtement fini" $V' = \Gamma'\backslash X$ de V est une variété C^∞. Nous rencontrerons de nombreux exemples de cette situation dans la suite de ce cours.

Démonstration Cette proposition est une conséquence de la proposition suivante qui est un tout petit peu plus précise:

Un élément g de $\mathrm{GL}(m,k)$ est dit *unipotent* si 1 est sa seule valeur propre et *virtuellement unipotent* si une puissance g^n, avec $n \geq 1$, est unipotente. En particulier, le seul élément unipotent d'ordre fini est l'identité.

Proposition 2.2 *Soient k un corps de caractéristique nulle et m un entier. Tout sous-groupe de type fini du groupe* $\mathrm{GL}(m,k)$ *contient un sous-groupe d'indice fini Γ' tel que les seuls éléments de Γ' virtuellement unipotents sont les éléments unipotents.*

Démonstration Procédons par étapes:

[1] i.e. pour tout compact K de X, il n'y a qu'un nombre fini de γ dans Γ tels que $\gamma K \cap K \neq \emptyset$

[2] Γ est alors automatiquement de type fini.

1 er cas: k est le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Soit E une partie finie formée de générateurs de Γ et de leurs inverses. Soit s le produit des dénominateurs des coefficients des éléments de E et A l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{s}]$. Le groupe Γ est inclus dans le groupe $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(m, A)$ des matrices à coefficients dans A dont l'inverse est aussi à coefficients dans A. Il suffit de montrer le lemme pour Γ_0.

Soit p un nombre premier supérieur à $2m$ et à s. La surjection de A sur le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ induit un morphisme de groupes de Γ_0 dans le groupe fini $\mathrm{GL}(m, \mathbb{F}_p)$. Le noyau Γ'_0 de ce morphisme est d'indice fini. Montrons qu'il est sans torsion.

Soit g un élément de Γ'_0 dont toutes les valeurs propres sont des racines de l'unité. Etudions la trace de g.

- $\mathrm{Tr}(g)$ est une somme de racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est donc un entier algébrique. Or les seuls entiers algébriques de l'anneau A sont les entiers. Donc $\mathrm{Tr}(g)$ est dans $\mathbb{Z}$.
- $\mathrm{Tr}(g)$ est une somme de m racines de l'unité. Donc son module est majoré par m.
- $\mathrm{Tr}(g) - m = \mathrm{Tr}(g - e)$ est un multiple de p dans A. Donc $\mathrm{Tr}(g)$ est dans $m+p\mathbb{Z}$.

La seule possibilité est donc $\mathrm{Tr}(g) = m$: toutes les valeurs propres de g valent 1.

2 ème cas: k est le corps $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_r)$ des fractions rationnelles.

La démonstration est identique au premier cas: il existe un polynôme f non nul à coefficients entiers tel que Γ est inclus dans le groupe $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(m, A)$ où $A = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r, \frac{1}{f}]$.

Soit p un nombre premier suffisamment grand de sorte que $p > 2m$ et $f \not\equiv 0 \bmod p$. Notons $\overline{\mathbb{F}}_p$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ et choisissons $(a_1, \ldots, a_r)$ dans $(\overline{\mathbb{F}}_p)^r$ tels que $f(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$. La surjection de A sur le corps fini $A_p = \mathbb{F}_p[a_1, \ldots, a_r]$ qui envoie X_i sur a_i, induit un morphisme de groupes de Γ_0 dans le groupe fini $\mathrm{GL}(m, A_p)$. Puisqu'encore les seuls entiers algébriques de l'anneau A sont les entiers, on prouve comme ci-dessus, que le noyau Γ'_0 de ce morphisme est d'indice fini dans Γ_0 et est sans torsion.

3 ème cas: Cas général.

Soient $y_1, \ldots, y_s$ les coefficients d'une famille finie de générateurs de Γ. On a l'inclusion $\Gamma \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_s))$. On peut donc supposer que k est une extension de type fini de $\mathbb{Q}$. Soient $x_1, \ldots, x_r$ une famille maximale algébriquement indépendante de k. Le corps $F = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_r)$ est un corps de fractions rationnelles et k est une extension finie de degré d de F.

Un espace vectoriel de dimension m sur k est un espace vectoriel de dimension md sur F. On a donc les inclusions: $\Gamma \subset \mathrm{GL}(m, k) \subset \mathrm{GL}(md, F)$. Le $2^{\text{ème}}$ cas prouve alors que Γ contient un sous-groupe d'indice fini Γ' sans torsion. $\diamondsuit$

Remarques - Le sous-groupe Γ' est de type fini car tout sous-groupe d'indice fini Γ' d'un groupe de type fini est encore de type fini (exercice 1.1).

- On peut supposer Γ' distingué dans Γ car *tout sous groupe d'indice fini Γ' d'un groupe Γ contient un sous-groupe d'indice fini Γ'' qui est distingué dans Γ.* En effet, on peut prendre pour Γ'' l'intersection des conjugués de Γ qui sont en nombre fini.

Corollaire 2.3 *En caractéristique zéro, tout groupe linéaire de torsion et de type fini est fini.*

Un groupe linéaire Γ est dit *unipotent* si tous ses éléments sont unipotents. Un tel groupe est nilpotent car l'adhérence de Zariski G de Γ est aussi unipotente et le théorème d'Engels affirme alors que dans une base convenable de V, G est formé de matrices unipotentes triangulaires supérieures. Le corollaire suivant est une conséquence directe de cette définition et de la proposition 2.2

Corollaire 2.4 *Soient k un corps de caractéristique nulle et m un entier. Soit Γ un sous-groupe de type fini du groupe $\mathrm{GL}(m,k)$ dont tous les éléments sont virtuellement unipotents. Alors Γ est virtuellement unipotent.*

2.2 Petits éléments des groupes discrets

Dans le groupe $\mathbb{R}^p$ et plus généralement dans de nombreux groupes linéaires réels nilpotents N, il est possible de construire des éléments aussi petits que l'on veut qui engendrent un sous-groupe discret Γ Zariski denses. La proposition suivante est une sorte de réciproque.

Proposition 2.5 (Zassenhaus) *Il existe un voisinage ouvert Ω de l'élément neutre e dans le groupe $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ tel que tout sous-groupe <u>discret</u> Γ engendré par une partie P de Ω est nilpotent.*

Remarques - Cette proposition est valable avec la même démonstration pour tous les groupes de Lie G.

- En utilisant dans la démonstration ci-dessous l'algèbre de Lie de G et l'application exponentielle, on obtient un résultat plus précis dû à Kazhdan et Margulis: *Il existe un voisinage ouvert Ω de l'élément neutre e tel que toute partie P de Ω qui engendre un groupe discret est incluse dans un sous-groupe nilpotent connexe de G* (Voir [34] chapitre 8). Nous utiliserons ce raffinement dans la démonstration de la proposition 2.9.

Démonstration Cela résulte immédiatement des deux lemmes ci-dessous. $\diamondsuit$

Pour toutes parties P de G, on définit $P^{(n)}$ par récurrence: $P^{(1)} = P$ et $P^{(n)} = \{ghg^{-1}h^{-1} \ / \ g \in P^{(i)} \ , \ h \in P^{(n-i)}$ avec $0 < i < n$ $\}$.

Lemme 2.6 *Il existe un voisinage Ω de e dans le groupe $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ tel que la partie $\Omega^{(2)}$ est incluse dans Ω et la suite de parties $\Omega^{(n)}$ converge vers $\{e\}$.*

Remarque - Un tel ouvert Ω sera appelé *bon ouvert.*

- Choisissons une distance riemannienne d sur G. La deuxième assertion signifie que, $\lim_{n\to\infty}(\sup\{d(x,e) \ / \ x \in \Omega^{(n)}\}) = 0$

Démonstration On va prendre pour Ω une boule $B(e, \varepsilon)$ de rayon ε suffisamment petit. Notons Φ l'application de $G \times G$ dans G donnée par $\Phi(g,h) = ghg^{-1}h^{-1}$. Cette application Φ est de classe C^∞ et on a les égalités, pour tout g dans G, $\Phi(g,e) = \Phi(e,g) = e$. Donc, pour g, h dans une boule ouverte $B(e, \alpha)$ centrée en e suffisamment petite, il existe une constante K telle que,

$$d(e, \Phi(g,h)) \leq K d(e,g) d(e,h) .$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{1}{2K}$. Car on montre alors par récurrence sur n l'inégalité, pour tout x dans $\Omega^{(n)}$, $d(x,e) \leq 2^{-n+1}\varepsilon$. ♢

Lemme 2.7 *Soit $n \geq 1$. Tout groupe Γ engendré par une partie P telle que $P^{(n)} = \{e\}$ est nilpotent.*

Démonstration Notons $Q^{(i)}$ la réunion des parties $P^{(j)}$ pour $j \geq i$ et Γ_i le sous-groupe de Γ engendré par $Q^{(i)}$. On a donc une suite décroissante de sous-groupes: $\Gamma = \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_i \supset \cdots$

Montrons par récurrence décroissante sur i que Γ_i est distingué dans Γ. C'est vrai pour $\Gamma_n = \{e\}$. Si Γ_i est distingué dans Γ, notons p_i la projection naturelle de Γ dans Γ/Γ_i. Par construction, les parties génératrices $p_i(Q^{(1)})$ de Γ/Γ_i et $p_i(Q^{(i-1)})$ de Γ_{i-1}/Γ_i commutent. Donc Γ_{i-1}/Γ_i est un sous-groupe central de Γ/Γ_i. Ceci prouve que Γ_{i-1} est distingué dans Γ.

Ceci prouve aussi que Γ est nilpotent. ♢

2.3 Groupes linéaires de torsion

L'ensemble F des éléments de torsion d'un groupe abélien est un sous-groupe. La proposition suivante qui est un corollaire de la proposition 2.5 montre qu'on obtient ainsi presque tous les groupes de torsion qui sont linéaires.

Proposition 2.8 (Schur) *En caractéristique 0, tout groupe linéaire Γ de torsion contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

Remarques - La différence essentielle avec le corollaire 2.3 est qu'on ne suppose pas Γ de type fini.

- On peut aussi montrer qu'il existe un entier $r = r(m)$ qui ne dépend que de la dimension m de l'espace vectoriel V sur lequel agit notre groupe linéaire tel que le sous-groupe abélien puisse être choisi d'indice inférieur à r. Nous n'en aurons pas besoin.

Démonstration Il suffit de montrer que la composante Zariski connexe de l'adhérence de Zariski de Γ est abélienne. Pour cela, on peut remplacer Γ par un sous-groupe dénombrable ayant même adhérence de Zariski. Le corps engendré par les coefficients de Γ est dénombrable et s'identifie donc à un sous-corps de $\mathbb{C}$. On peut donc supposer que $k = \mathbb{C}$. La proposition est donc une conséquence de la proposition suivante. ♢

Proposition 2.9 *Tout sous-groupe Γ de torsion du groupe* $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ *contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

Remarques -Cette proposition et sa démonstration sont encore valables pour tout groupe de Lie réel connexe G.

- On peut aussi montrer qu'il existe un entier $r = r(G)$ tel que le sous-groupe abélien puisse être choisi d'indice inférieur à r. Nous n'en aurons pas besoin.

- Pour démontrer, cette proposition, nous utiliserons le fait que G contient un sous-groupe compact maximal K, que K est connexe et que tout sous-groupe compact de G est inclus dans un conjugué de K. Ce fait est particulièrement élémentaire pour le groupe $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. Dans ce cas, on prend pour K le groupe $\mathrm{U}(m)$. Il s'agit alors de montrer que tout sous groupe compact C de $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ préserve une forme hermitienne positive sur $\mathbb{C}^m$. Celle-ci s'obtient en moyennant une forme hermitienne positive quelconque à l'aide d'une mesure de Haar sur C.

Démonstration Montrons tout d'abord que l'on peut supposer $\Gamma \subset K$. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K. Soit B la sous-algèbre associative de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathrm{Ad}(\Gamma)$. Elle est de dimension finie, donc il existe un sous-groupe Γ' de type fini tel que $\mathrm{Ad}(\Gamma')$ engendre B. Le corollaire 2.3 prouve que Γ' est fini. On peut donc le supposer inclus dans K. On a donc, pour tout b dans B, $b(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}$. Donc Γ normalise K et, pour tout γ dans Γ, le groupe engendré par γ et K est compact. La maximalité de K impose que γ est dans K. Finalement, on a $\Gamma \subset K$.

Soient Ω un ouvert de K comme dans la proposition 2.5, O un ouvert de K tel que $O.O^{-1} \subset \Omega$ et $r = \mathrm{vol}(K)/\mathrm{vol}(O)$ où le volume est calculé pour une mesure de Haar de K. Soit Γ_0 le sous groupe engendré par $\Omega \cap \Gamma$.

D'une part, l'indice de Γ_0 dans Γ est majoré par r. Sinon on pourrait trouver deux représentants γ_i et γ_j de Γ_0-classes à gauche distinctes telles que $\gamma_i O \cap \gamma_j O \neq \emptyset$. On aurait alors $\gamma_j^{-1}\gamma_i \in O.O^{-1} \cap \Gamma \subset \Omega \cap \Gamma \subset \Gamma_0$. Contradiction.

D'autre part, la combinaison des propositions 2.1 et 2.5 assure que les sous groupes de type fini de Γ_0 sont inclus dans des sous-groupes nilpotents connexes de K. Le lemme 2.10 assure que ces groupes sont abéliens. Le groupe Γ_0 est donc aussi abélien. $\diamondsuit$

Lemme 2.10 *Tout groupe linéaire réel N nilpotent, compact et connexe est abélien.*

Remarque On peut bien sûr remplacer dans ce lemme "linéaire" par "de Lie".

Démonstration Soit X un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N. Par compacité de N, il existe une suite croissante de réels t_n telle que la suite $\exp(t_nX)$ converge vers e dans N. Mais l'endomorphisme $\mathrm{ad}X$ de $\mathfrak{n}$ est nilpotent et la suite $\mathrm{Ad}(\exp(t_nX)) = e^{t_n \mathrm{ad}X}$ ne peut pas converger vers l'identité à moins que $\mathrm{ad}X$ ne soit nul. Donc N est abélien. $\diamondsuit$

Le corollaire suivant ramènera les démonstrations du théorème 3.10 de Tits et du théorème 8.3 d'Auslander au cas des groupes de type fini.

Corollaire 2.11 *Soient k un corps de caractéristique nulle et m un entier. Soit Γ un sous-groupe du groupe* $\mathrm{GL}(m,k)$.

a) Si tous les sous-groupes de type fini de Γ sont virtuellement résolubles alors Γ aussi.

b) Si tous les sous-groupes de type fini de Γ sont résolubles alors Γ aussi.

Démonstration a) Comme dans la proposition 2.8, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$.

On note G l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. On peut supposer que G est Zariski connexe. Pour chaque sous-groupe Δ de type fini de Γ, on note $Z_e(\Delta)$ la composante Zariski connexe de l'adhérence de Zariski de Δ dans G. Si Δ et Δ' sont deux sous-groupes de type fini de Γ tels que $\Delta \subset \Delta'$, on a l'inclusion $Z_e(\Delta) \subset Z_e(\Delta')$.

Un sous-groupe Zariski fermé et Zariski connexe de G est entièrement déterminé par son algèbre de Lie. Donc toute suite croissante de sous-groupes Zariski fermés et Zariski connexes est stationnaire. On en déduit que la réunion R des sous-groupes $Z_e(\Delta)$ est égale à l'un d'eux. C'est donc un sous groupe résoluble et distingué de G.

Pour tout élément γ de Γ, on note $<\gamma>$ le groupe engendré par γ. Comme le groupe $Z_e(<\gamma>)$ est inclus dans R, il existe un entier n tel que γ^n est dans $Z_e(<\gamma>)$. On en déduit que l'image Γ' de Γ dans le groupe quotient $H := G/R$ est un groupe de torsion.

Notons $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ la représentation adjointe de H dans son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Comme G est Zariski connexe, le noyau de Ad coïncide avec le centre de H. La proposition 2.9 prouve que le groupe de torsion $\mathrm{Ad}(\Gamma')$ est virtuellement abélien et donc que le groupe Γ est virtuellement résoluble.

b) La composante Zariski connexe G_e de Γ est un sous-groupe d'indice fini de G. On peut donc trouver un sous-groupe de type fini Δ de Γ tel que $G = \Delta G_e$. Par hypothèse, le sous-groupe Δ est résoluble. Par l'assertion a), le sous-groupe distingué G_e est résoluble. Donc G est résoluble et Γ aussi. $\diamondsuit$

Remarques - Dans ce corollaire, "résoluble" ne peut pas être remplacé par "nilpotent". Par exemple, le groupe linéaire Γ suivant n'est pas nilpotent mais tous ses sous-groupes de type fini le sont:

$$\Gamma := \{\gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \;/\; \theta = 2^{-n}k\pi \text{ avec } n \geq 0\ ,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \varepsilon = \pm 1\ \}.$$

- Ce corollaire est encore valable dans tout groupe de Lie connexe G: c'est maintenant un exercice laissé au lecteur.

- Ce corollaire doit être rapproché de l'énoncé suivant: *Tout sous groupe discret résoluble de* $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ *est de type fini.*

3 Sous-groupes libres des groupes linéaires

Le but de ce chapitre est de montrer l'alternative suivante due à J.Tits:

En caractéristique 0, un groupe linéaire Γ soit contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, soit contient un groupe libre à deux générateurs.

Nous introduirons progressivement les arguments utilisés dans la preuve en étudiant tout d'abord des cas particuliers. Comme souvent en mathématiques, ces cas particuliers sont la clé pour la compréhension du cas général.

3.1 Construction de groupes libres

Voici un critère pour qu'un groupe soit libre.

Lemme 3.1 (Tennis de table) *Soient G un groupe qui agit sur un ensemble X, G_j des sous-groupes de G qui engendrent G, X_j des parties de X, j décrivant un ensemble d'indices J, et x un élément de X hors des X_j. On suppose que, pour tout g dans $G_j - \{e\}$ et tout $j' \neq j$, on a $g.x \in X_j$ et $g(X_{j'}) \subset X_j$.*

Alors G est le produit libre des G_j.

Ceci signifie que tout élément de G a une *unique* écriture comme produit d'éléments de $G_j - \{e\}$. Il est équivalent de dire que pour toute suite finie $g_1, \ldots, g_n$ dans G telles que, pour tout k, g_k est dans G_{j_k} et $j_k \neq j_{k+1}$, on a $g_1 \cdots g_n \neq e$.

Démonstration Soient $g_1, \ldots, g_n$ comme ci dessus. L'hypothèse implique que $g_1 \cdots g_n.x$ est dans X_{j_1} et donc est différent de x. Ce qui prouve bien que $g_1 \cdots g_n \neq e$. $\diamondsuit$

Remarque Réciproquement, si G est le produit libre des groupes G_j, on peut trouver de tels X,x,X_j... Il suffit de prendre $X = G$ sur lequel G agit par multiplication à gauche, $x = e$ et X_j les mots qui commencent par un élément de $G_j - \{e\}$.

3.2 Groupes de Schottky dans PSL(2,$\mathbb{C}$)

Montrons comment on utilise ce lemme, pour construire un sous-groupe libre du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$. On considère l'action naturelle de G sur la droite projective $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. X est l'ensemble des droites de $\mathbb{C}^2$ et l'action est donc donnée par la formule: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.x = \frac{ax+b}{cx+d}$. Il y a trois types d'éléments $g \neq e$ dans G.

- *élément elliptique:* il est conjugué à l'élément $\pm\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Un tel élément a deux points fixes dans X. Ceux-ci sont entourés par des cercles invariants.

- *élément parabolique:* il est conjugué à l'élément $\pm\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un tel élément a un seul point fixe par lequel passe une famille de cercles invariants.

- *élément loxodromique*[3]*:* il est conjugué à l'élément $\pm\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| \neq 1$. Un tel élément g a deux points fixes dans X, l'un attracteur x_g^+ et l'autre répulseur x_g^- et on a pour tout $x \neq x_g^{\mp}$, $\lim_{n\to\pm\infty} g^n x = x_g^{\pm}$. On peut alors trouver deux disques ouverts D^+ et D^- disjoints tels que $g(X - \overline{D^-}) = D^+$. Lorsque λ est réel, on dit que g est hyperbolique.

La définition qui suit est très provisoire.

Définition 3.2 *Un groupe de Schottky Γ est un sous-groupe de G engendré par t éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ pour lesquels il existe $2t$ disques ouverts $D_1^+, \ldots, D_t^+, D_1^-, \ldots, D_t^-$ disjoints tels que, pour tout j, $\gamma_j(X - \overline{D_j^-}) = D_j^+$ et $\gamma_j^{-1}(X - \overline{D_j^+}) = D_j^-$*

Remarque - En particulier les γ_j sont loxodromiques.

- Fixons des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ loxodromiques de G avec des points fixes distincts. On peut alors trouver p tel que $\gamma_1^p, \ldots, \gamma_t^p$ engendrent un groupe de Schottky.

Lemme 3.3 *Un groupe de Schottky est libre et discret.*

Démonstration La liberté résulte du lemme 3.1 avec $X_j = D_j^- \cup D_j^+$ et x un point du complémentaire de l'adhérence de tous les disques $D_j^{\pm}$.

La discrétude résulte d'un raisonnement analogue: une suite w_n d'éléments de G telle que $w_n \neq e$ ne peut converger vers e car la suite $w_n x$ qui prend ses valeurs dans les disques $D_j^{\pm}$ convergerait vers x, ce qui contredit le choix de x. $\diamondsuit$

Remarque Notons F le complémentaire dans X de la réunion des disques $D_j^{\pm}$ et $U = \cup_{g\in\Gamma} gF$. L'argument prouve aussi que le groupe Γ agit proprement sur U et que F est un domaine fondamental compact pour l'action de Γ sur U. Cet ouvert U est aussi le plus grand ouvert de X sur lequel Γ agit proprement. En effet, le fermé Λ complémentaire de U dans X est d'intérieur vide et, pour tout x dans U, on a l'égalité: $\Lambda = \overline{\Gamma x} - \Gamma x$. Ce fermé Λ est appelé ensemble limite de Γ dans X.

3.3 La dynamique de Schottky

Généralisons la méthode de la partie précédente. Soit Γ un groupe qui agit sur un espace métrique compact X et γ un élément de Γ. Un point fixe x_γ^+ de γ dans X est dit *attracteur* si il existe un voisinage U de x_γ^+ tel que, pour tout autre voisinage U' de x_γ^+, on a l'inclusion $\gamma^n(U) \subset U'$ pour $n \gg 0$. L'ensemble $B^+ = \{x \in X \ / \ \lim_{n\to\infty} \gamma^n x = x_\gamma^+\}$ est un ouvert appelé *bassin d'attraction* de x_γ^+. Un point fixe x_γ^- de γ dans X est dit *répulseur* s'il est attracteur pour γ^{-1} et on appelle *bassin de répulsion* le bassin d'attraction pour γ^{-1}.

Le lemme suivant est une variante du lemme 3.1. Il ramène l'alternative de Tits à la recherche de deux éléments γ_1, γ_2 de notre groupe linéaire, et d'un espace X sur lequel ces deux éléments agissent avec une dynamique bien particulière que nous appellerons *dynamique de Schottky.*

[3]Les orbites d'un tel élément g sont sur des courbes loxodromiques, du grec *loxos* oblique et *dromos* courbe: ce sont les courbes qui font un angle constant avec les méridiens: ce sont donc elles que suivent les bateaux qui gardent un cap constant.

Lemme 3.4 *Soient* Γ *un groupe qui agit sur un espace métrique compact* X*. Soient* $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ *des éléments de* Γ *tels que, en notant* $E := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_t^{-1}\}$

- pour tout g *dans* E*,* g *a un point fixe attracteur* x_g^+ *dans* X *de bassin d'attraction* B_g^+*,*

- les points x_g^+ *sont distincts et l'intersection des bassins* B_g^+ *est non-vide,*

- pour tout g*,* h *dans* E*, tels que* $g \neq h^{-1}$*,* x_h^+ *est dans* B_g^+*.*

Alors, il existe $p > 0$ *tel que le groupe engendré par* $\gamma_1^p, \ldots, \gamma_t^p$ *est libre*

Démonstration On choisit un point x dans l'intersection des B_g^+,et des voisinages compacts disjoints K_g^+ des attracteurs x_g^+ ne contenant pas x et de sorte que, pour $g \neq h^{-1}$, K_h^+ soit inclus dans B_g^+. Notons L_g^+ la réunion des K_h^+ pour $h \neq g^{-1}$. On choisit p tel que, pour tout g dans E, $g^p(L_g^+) \subset K_g^+$ et On applique le lemme 3.1 avec $X_j = K_{\gamma_j} \cup K_{\gamma_j^{-1}}$.$\diamondsuit$

Remarque Contrairement au cas où $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, il n'existe pas en général d'ouvert U de X sur lequel Γ agit proprement avec un quotient $\Gamma \backslash U$ compact.

L'idée naïve, pour montrer l'alternative de Tits, est de prendre pour X, l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de l'espace vectoriel sur lequel agit notre groupe linéaire. On est alors amené à rechercher des éléments γ de ce groupe ayant une "unique valeur propre de plus grand module" et une "unique valeur propre de plus petit module". Les droites propres correspondantes sont alors les points x_γ^+ et x_γ^-.

La transformation de cette idée naïve en une démonstration nécessite un soupçon de géométrie algébrique, une pincée de théorie des représentations et un rien de corps p-adiques.

L'utilisation des valeurs absolues p-adiques est cruciale même lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$. En effet, si notre groupe est inclus dans le groupe orthogonal $\mathrm{SO}(m)$, les modules des valeurs propres sont tous égaux à 1! L'astuce consistera alors à changer de corps de base et à injecter notre groupe Γ dans un groupe linéaire à coefficients p-adiques de sorte que la valeur absolue p-adique d'au moins une valeur propre d'un élément de Γ soit strictement supérieur à 1...

3.4 Eléments proximaux dans $\mathbb{P}(V)$

Soit k un corps local[4] muni d'une valeur absolue notée $|.|$. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie m et $X = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V: c'est l'ensemble des droites de V. On munit V d'une norme $\|.\|$ et on définit une distance d sur X par

$$d(x_1, x_2) = \inf\{\|v_1 - v_2\| \;/\; v_i \in x_i \text{ et } \|v_i\| = 1 \;\; \forall i = 1, 2\} .$$

X est alors un espace métrique compact.

Soit g un élément de $\mathrm{End}(V)$. Pour $\lambda > 0$, on note $V_\lambda = V_\lambda(g)$ le plus grand sous-espace vectoriel g-invariant de V dans lequel toutes les valeurs propres α de g vérifient

[4] Le lecteur peut supposer en première lecture que $k = \mathbb{R}$ même si, comme nous venons de le dire, cela ne suffira pas pour conclure.

$|\alpha| = \lambda$. Bien sûr une valeur propre de g est dans une extension finie k' de k. On a muni implicitement cette extension de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de k. L'espace vectoriel V se décompose en une somme directe des sous-espaces g-invariants non nuls V_λ. Rangeons les valeurs propres de g répétées avec multiplicité $\alpha_i = \alpha_i(g)$ de sorte que leur valeur absolue $\lambda_i = \lambda_i(g) := |\alpha_i|$ soient en ordre décroissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$. Le réel $\lambda_1(g)$ s'appelle le *rayon spectral* de g. On pose $V_g^+ = V_{\lambda_1}$, $m_g = \dim V_g^+$ et $V_g^< = \bigoplus_{\lambda \neq \lambda_1} V_\lambda$.

On dit que g est *proximal dans* $\mathbb{P}(V)$ si $m_g = 1$ i.e. si $\lambda_1 > \lambda_2$.

On appelle projecteur un endomorphisme π tel que $\pi^2 = \pi$. Un projecteur est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si il est de rang 1.

Lemme 3.5 *Soient k un corps local et V un k-espace vectoriel de dimension m. Un élément g de $\mathrm{GL}(V)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si son action sur $\mathbb{P}(V)$ a un point fixe attracteur x_g^+. Ce point fixe x_g^+ est la droite V_g^+ et le bassin d'attraction B_g^+ est le complémentaire de l'hyperplan $X_g^< := \mathbb{P}(V_g^<)$.*

Démonstration C'est clair. ♢

Lemme 3.6 *Soient k un corps local, V un k-espace vectoriel de dimension m, g un élément de $\mathrm{End}(V)$ et $p \geq 1$. L'ensemble $E_p := \{g \in \mathrm{End}(V) \ / \ m_g \leq p\}$ est un ouvert de $\mathrm{End}(V)$.*

En particulier, l'ensemble des éléments proximaux dans $\mathbb{P}(V)$ est ouvert.

Il s'agit bien sûr d'ouverts pour la topologie localement compacte...

Démonstration Le polynôme caractéristique de g dépend continument de g. Les réels $\lambda_i(g)$ aussi. Donc, $E_p = \{g \ / \ \lambda_1(g) > \lambda_{p+1}(g)\}$ est ouvert. ♢

Pour $p \geq 1$, on note $\Lambda^p g$ l'action de g dans $\Lambda^p V$. Elle est donnée par $\Lambda^p g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_p$.

Lemme 3.7 *Soient k un corps local, V un k-espace vectoriel de dimension m, g un élément de $\mathrm{End}V$ et $p \geq 1$. Alors*

a) Si $p = m_g$, alors $\Lambda^p g$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

b) Si $\Lambda^p g$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$, alors $p \geq m_g$.

La notation $\lim_{n \in S}$ signifie la limite quand n tend vers l'infini dans la suite S.

Démonstration a) et b). Les modules des valeurs propres de $\Lambda^p g$ sont les réels $\mu_E = \prod_{i \in E} \lambda_i$ où E est une partie à p éléments de $\{1, \ldots, m\}$. Le réel μ_E est maximal lorsque $E = \{1, \ldots, p\}$. Aucune autre partie E' n'atteint cette valeur si et seulement si $\lambda_p > \lambda_{p+1}$. C'est le cas pour $p = m_g$, mais jamais pour $p < m_g$. ♢

Terminons cette partie par un lemme qui nous sera utile dans le chapitre suivant.

Lemme 3.8 *Soient k un corps local, V un k-espace vectoriel de dimension m et g un élément de* $\mathrm{End}(V)$*.*

a) L'élément g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si il existe des constantes $c_n \in k$ telles que la suite $c_n g^n$ converge vers un projecteur π de rang 1*.*

b) Soit π_g la projection sur V_g^+ parallèlement à $V_g^<$. Si g est semisimple, il existe une suite S d'entiers et des constantes $c_n \in k$ telles que $\lim_{n\in S} c_n g^n = \pi_g$.

Démonstration a) Si g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$, la suite $c_n = \lambda_1^{-n}$ convient.

La réciproque résulte du lemme 3.6.

b) Soit c un élément de k tel que $|c| = \lambda_1$. Lorsque k n'est pas archimédien, l'existence d'un tel élément c n'est assurée que si on a pris la précaution de remplacer g par une puissance convenable. Notons $p = m_g$ et $x = (\frac{\alpha_1}{c}, \ldots, \frac{\alpha_p}{c})$. Cet élément engendre un sous-groupe relativement compact de $(k'^*)^p$. Il existe donc une suite croissante S telle que, pour tout $j = 1, \ldots, p$, on a $\lim_{n\in S}(\frac{\alpha_j}{c})^n = 1$. Posons $c_n = c^{-n}$, on a alors l'égalité $\lim_{n\in S} c_n g^n = \pi_g$. ♢

3.5 Proximalité de g et de son inverse

Le point b) du lemme ci-dessous n'est qu'un cas particulier de l'alternative de Tits mais il ramène le cas général à la recherche d'éléments proximaux dans $\mathbb{P}(V)$.

Lemme 3.9 *Soient k un corps local, V un k-espace vectoriel de dimension $m \geq 2$, Γ un sous-groupe Zariski connexe de* $\mathrm{GL}(V)$ *qui contient un élément proximal dans $\mathbb{P}(V)$. On suppose que V est irréductible. Alors*

a) Il existe un élément γ de Γ tel que γ et γ^{-1} sont proximaux dans $\mathbb{P}(V)$.

b) Γ contient un sous-groupe libre à deux générateurs.

Démonstration a) Soit g un élément de Γ qui est proximal dans $\mathbb{P}(V)$. Par compacité de $\mathbb{P}(\mathrm{End}V)$, il existe une suite d'entiers S et des constantes c_n et d_n telles que les limites dans $\mathrm{End}V$ $\pi = \lim_{n\in S} c_n g^n$ et $\sigma = \lim_{n\in S} d_n g^{-n}$ existent et sont non nulles. Comme g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$, π est de rang 1.

Par irréductibilité de V, on peut trouver un élément h_1 dans Γ tel que $h_1(\mathrm{Im}\pi) \not\subset \mathrm{Ker}\sigma$ et h_2 dans Γ tel que $h_2(\sigma h_1 \mathrm{Im}\pi) \not\subset \mathrm{Ker}\pi$. Considérons le produit $g_n = g^n h_2 g^{-n} h_1 \in \Gamma$. La limite $\lim_{n\in S} c_n d_n g_n = \pi h \sigma h^{-1}$ est alors un multiple non nul d'un projecteur de rang 1. D'après le lemme 3.6, l'élément $\gamma = g_n$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ pour $n \gg 0$.

Le même raisonnement s'applique aussi à γ^{-1} si on a pris la précaution, grace à la Zariski connexité de Γ, de choisir h_1 et h_2 vérifiant les deux conditions supplémentaires: $h_1^{-1}(\mathrm{Im}\pi) \not\subset \mathrm{Ker}\sigma$ et $h_2^{-1}(\sigma h_1^{-1}\mathrm{Im}\pi) \not\subset \mathrm{Ker}\pi$.

b) Prenons notre élément $\gamma \in \Gamma$ qui est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ ainsi que son inverse. Soit h un élément de Γ qui vérifie les 8 conditions: $h^{\pm 1} V_\delta^+ \not\subset V_{\delta'}^< \quad \forall \delta, \delta' \in \{\gamma, \gamma^{-1}\}$. Un tel élément h existe car, par irréductibilité de V, chacune de ces conditions définit un ouvert de Zariski non vide de Γ et que Γ est Zariski connexe.

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.4 aux deux éléments $\gamma_1 := \gamma$ et $\gamma_2 := h\gamma h^{-1}$. ♢

3.6 Alternative de Tits

Nous pouvons enfin démontrer l'alternative de Tits.

Théorème 3.10 (Tits) *En caractéristique* 0*, un groupe linéaire* Γ *soit contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, soit contient un groupe libre à deux générateurs.*

Démonstration Soient k un corps de caractéristique nulle, $V = k^m$ et Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(m, k)$ qui n'est pas virtuellement résoluble. On veut montrer que Γ contient un sous-groupe libre à 2 générateurs.

Grace au corollaire 2.11, on peut supposer que Γ est de type fini. On peut aussi supposer que le corps k est le corps engendré par les coefficients de générateurs de Γ. En particulier, ce corps k est de type fini. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut enfin supposer que Γ est Zariski connexe.

Le groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ est Zariski connexe et n'est pas résoluble. Il n'est donc pas virtuellement résoluble. Une combinaison des corollaires 2.4 et 2.11 assure qu'il existe un élément γ dans $[\Gamma, \Gamma]$ dont une valeur propre α n'est pas une racine de l'unité.

A l'aide du lemme 3.12 ci-dessous, remplaçons maintenant k par un corps localement compact K muni d'une valeur absolue pour laquelle le réel $|\alpha|$ est supérieur à 1.

Comme dans le lemme 3.7, on note $\lambda_1(\gamma) > 1$ la plus grande valeur absolue des valeurs propres de γ, V_γ^+ le sous-espace γ-invariant correspondant, $p = m_\gamma$ sa dimension et $W = \Lambda^p V$. Le groupe Γ agit sur W et l'élément $\Lambda^p\gamma$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$. Notons $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_l = W$ une suite de Jordan-Hölder, c'est à dire une suite croissante de sous-espaces vectoriels Γ-invariants de W telle que les sous-quotients W_i/W_{i-1} sont irréductibles. Soit V' l'unique sous-quotient dans lequel $\Lambda^p\gamma$ a une valeur propre de module égal à $\lambda_1(\gamma)^p$. Notons $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(V')$ l'action induite et $\Gamma' = \rho(\Gamma)$.

On veut appliquer le lemme 3.9 au groupe Γ'. Par construction Γ' est bien un sous-groupe Zariski connexe de $\mathrm{GL}(V')$ qui contient un élément proximal dans $\mathbb{P}(V)$ $\gamma' := \rho(\gamma)$ et V' est bien irréductible. Il reste à vérifier l'inégalité: $\dim V' \geq 2$. Cela résulte de ce que, d'une part, comme γ' est dans $[\Gamma', \Gamma']$, γ' est de déterminant 1 et, d'autre part, γ' a une valeur propre de module $\lambda_1(\gamma') = \lambda_1(\gamma)^p > 1$. Le lemme 3.9 prouve alors que Γ' contient un sous-groupe libre à 2 générateurs et donc Γ aussi. Ceci termine la démonstration de l'alternative de Tits. $\diamondsuit$

3.7 Rappels sur les corps locaux

Le but de ce rappel est de montrer le lemme ci-dessous qui est essentiel dans la démonstration de l'alternative de Tits (théorème 3.10).

- Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue $|.|_p$ donnée par $|p^n \frac{a}{b}|_p = p^{-n}$ si a et b sont des entiers premiers à p.

- On note $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ le corps des nombres réels. C'est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue habituelle $|.|_\infty$.

- En caractéristique 0, un *corps local* L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ pour p premier (on dit alors que L est un corps p-adique) ou de $\mathbb{Q}_\infty$ (on a alors $L = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 3.11 *Montrer qu'il existe, sur tout corps local, une unique valeur absolue qui prolonge celle du corps $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty$ qu'il contient.*
Indication:voir [44] .

- Un corps local L est donc un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_\infty$. Il est donc muni d'une topologie localement compacte non discrète pour laquelle les opérations de corps sont continues.
- Réciproquement, on peut montrer que tout corps topologique qui est localement compact et non discret est obtenu ainsi s'il est de caractéristique 0. Si il est de caractéristique finie il est de la forme $\mathbb{F}_q[T^{-1}, T]]$ où $\mathbb{F}_q$ est un corps fini. Nous n'aurons pas besoin de ces faits.

Lemme 3.12 (Existence d'une valeur absolue dilatante) *Soit K une extension de type fini de $\mathbb{Q}$ et λ un élément K^* qui n'est pas une racine de l'unité. Alors il existe une injection de K dans un corps local K_v muni d'une valeur absolue $|.|_v$ telle que $|\lambda|_v > 1$.*

Lorsque K est un corps de nombre c'est à dire une extension finie de $\mathbb{Q}$, on appelle place de K une injection de K à image dense dans un corps local K_v à isomorphisme près. Une place est donc la donnée sur K d'une valeur absolue qui prolonge l'une des valeurs absolues $|.|_p$ pour p premier ou $|.|_\infty$. La place est dite finie ou infinie selon que K_v contient $\mathbb{Q}_p$ pour p premier ou $\mathbb{Q}_\infty$.

Places finies Décrivons tout d'abord les places finies d'un corps de nombre K. Soient $n := [K : \mathbb{Q}]$ le degré de K sur $\mathbb{Q}$ et A l'anneau des entiers de K. C'est un anneau de Dedekind i.e. il est noethérien, intégralement clos et tout idéal premier non nul est maximal. Notons I le groupe des idéaux fractionnaires c'est à dire des A-sousmodules de type fini de K. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont dans I le produit est $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum a_i b_i \ / \ a_i \in \mathfrak{a} \ , \ b_i \in \mathfrak{b}\}$. Tout élément $\mathfrak{a}$ de I s'écrit de façon unique $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}\in P} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$ où P est l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A et $n_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ est dans $\mathbb{Z}$ (voir [Sam] ch.3) Le lemme basique suivant résulte aussitôt de cette discussion et des définitions.

Proposition 3.13 *On a une bijection entre l'ensemble P des idéaux premiers non nuls de A et l'ensemble des places finies de K. A chaque $\mathfrak{p}$ dans P, on associe la valeur absolue donnée par $|y|_{\mathfrak{p}} = q^{-n_{\mathfrak{p}}(Ay)}$ où q est un réel positif. La bijection inverse associe à chaque valeur absolue $|.|_v$ sur K l'idéal premier $\{a \in A \ / \ |a|_v < 1\}$ qui est non nul lorsque la place est finie.*

Soit p est le nombre premier générateur de l'idéal maximal $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Le corps complété $K_{\mathfrak{p}}$ de K est alors une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Places infinies Décrivons maintenant les places infinies de notre corps de nombres K. Soient x un élément primitif de K de sorte que $K = \mathbb{Q}[x]$. Le polynôme minimal P de x est de degré n. Soient x_1,...,x_{r_1} les racines réelles de P. Ecrivons $n = r_1 + 2r_2$ et rangeons les racines non réelles $x_{r_1+1}, \ldots, x_n$ de P de sorte que $x_{j+r_2} = \overline{x}_j$, pour $r_1 < j \leq r_1 + r_2$.

Ces racines définissent des injections σ_i de K dans $\mathbb{R}$ lorsque $i \le r_1$ et de K dans $\mathbb{C}$ sinon. Ces dernières sont conjuguées deux par deux. On note σ l'injection de K dans $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ dont les composantes sont $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1+r_2}$.

Proposition 3.14 *L'image $\sigma(A)$ de l'anneau des entiers est un réseau de $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$.*

Rappelons brièvement la démonstration de ce lemme basique pour lequel nous renvoyons à [Sam]. La formule $(x|y) = Tr_{K/\mathbb{Q}}(xy)$ définit une dualité sur K. L'anneau A est un $\mathbb{Z}$-module qui engendre K et qui est autodual, c'est à dire que l'on a l'égalité $A = \{y \in K \ / \ \forall x \in A \ (x|y) \in \mathbb{Z}\}$. En particulier A est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n. Soit $a_1, \dots, a_n$ une base de A, il faut montrer que $\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)$ sont indépendants sur $\mathbb{R}$. Cela résulte de la non nullité du déterminant: $\det(\sigma_i(a_j)_{1\le i,j\le n})$. Or si ce déterminant était nul, on aurait une relation $\sum_{1\le i\le n} \lambda_i \sigma_i = 0$ linéaire entre les σ_i ce qui est impossible entre des automorphismes de corps distincts par le lemme de Dedekind.

Démonstration du lemme 3.12 Procédons par étapes.

1^er cas: K est un corps de nombres.
Soit λ un élément de K tel que pour toute place v on a $|\lambda|_v \le 1$. L'étude des places finies (proposition 3.12.1) prouve que λ est dans l'anneau A des entiers. L'étude des places infinies (proposition 3.12.2) prouve alors que λ est une racine de l'unité car la suite $\sigma(\lambda^n)$ reste bornée et prend ses valeurs dans un ensemble discret.

2 ème cas: λ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.
Soit K' le corps de nombre $K' = \mathbb{Q}[\lambda]$. D'après le premier cas, il existe une valeur absolue $|.|_v$ de K' telle que $|\lambda|_v > 1$. Soient $\xi_1, \dots, \xi_r$ une famille maximale de K algébriquement indépendante sur K' et notons $K'' = K'(\xi_1, \dots, \xi_r)$. Le corps K'_v complété de K' n'est pas dénombrable, il est donc de degré de transcendance infinie et on peut prolonger l'injection j' de K' dans K'_v en une injection j'' de K'' dans K'_v. Comme K est une extension finie de K'', il existe une extension finie K_v de K'_v et une injection j de K dans K_v qui prolonge j'. La valeur absolue de K_v est la valeur absolue cherchée.

3 ème cas: λ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.
C'est plus facile. Dans ce cas on prend $K_v = \mathbb{C}$: on choisit $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2, \dots, \xi_r$ une famille maximale de K algébriquement indépendante sur $\mathbb{Q}$ et une injection j' du corps $K' = \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_r)$ dans $\mathbb{C}$ telle que $|j'(\lambda)| > 1$. Ça existe. Cette injection se prolonge en une injection j de K dans $\mathbb{C}$ car K est une extension finie de K'. $\diamondsuit$

Exemple Donnons un exemple où les seules valuations qui conviennent sont des valuations p-adiques. Prenons $K = \mathbb{Q}[i]$ et $\lambda = \frac{3+4i}{5}$. Ce n'est pas une racine de l'unité car ce n'est pas un entier: l'anneau des entiers de K est $A = \mathbb{Z}[i]$. Le corps K admet une seule place infinie donnée par l'injection naturelle dans $\mathbb{C}$ et on a $|\lambda|_\infty = 1$. Si v est une place finie qui ne divise pas 5 alors $|3+4i|_v = |5|_v = |\lambda|_v = 1$. Il ne reste plus que les deux places divisant 5 associées aux idéaux premiers $\mathfrak{p}^\pm = A(1 \pm 2i)$. On calcule $|\lambda|_{\mathfrak{p}^\pm} = 5^{\pm 1}$.

4 Sous-groupes Zariski denses des groupes semisimples

Le but de ce chapitre est de montrer que tout sous-groupe Zariski dense d'un groupe semisimple G contient beaucoup d'éléments "loxodromiques" (théorème 4.14). L'existence de ces éléments sera très utile dans les chapitres suivants. La définition des éléments "loxodromiques" est élémentaire lorsque $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$: il s'agit des éléments qui ont des valeurs propres simples et de modules distincts.

Nous commencerons ce chapitre par ce cas particulier car la démonstration est aussi plus élémentaire. et les principales idées s'adapteront au cas général.

4.1 Sous-groupes Zariski denses de SL(m,$\mathbb{R}$)

Proposition 4.1 *Soit* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense du groupe* $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$.

Alors l'ensemble des éléments de Γ *ayant* n *valeurs propres réelles positives distinctes est encore Zariski dense.*

Remarques - Un *sous-semigroupe* est simplement une partie stable par produit. C'est bien sûr le cas des sous-groupes qui est le plus intéressant. Mais nous verrons comment les sous-semigroupes s'introduisent subrepticement dans la démonstration.

- La démonstration de cette proposition nécessite quelques rappels qui occupent les parties suivantes.

- La principale difficulté est l'*existence* d'éléments à valeurs propres simples et positives.

- Il est facile de voir que Γ contient des éléments dont les valeurs propres sont distinctes. En effet, le discriminant D du polynôme caractéristique est un polynôme non nul sur $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$, il est donc non nul sur Γ. Notons G_{reg} l'ouvert de Zariski des matrices ayant des valeurs propres simples: $G_{reg} = \{g \in G \ / \ D(g) \neq 0\}$. Cet ouvert de Zariski a plusieurs composantes connexes pour la topologie usuelle. L'une d'elle G_{pos} est justement formée des éléments ayant des valeurs propres simples et positives.

- Il est possible de construire des sous-groupes Zariski denses de $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ inclus dans G_{pos} dès que $m \not\equiv 2$ modulo 4.

- Nous montrerons cette proposition sous la forme équivalente suivante: *Pour* $k = \mathbb{R}$, *tout sous-groupe Zariski dense* Γ *de* $\mathrm{SL}(m, k)$, *contient un ensemble Zariski dense d'éléments* g *dont les modules des valeurs propres sont distincts:* $\lambda_1(g) > \cdots > \lambda_m(g)$. On ne peut pas remplacer dans cet énoncé $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Exemple: le groupe unitaire $\Gamma = \mathrm{U}(m)$. On ne peut pas non plus remplacer $\mathbb{R}$ par le corps $\mathbb{Q}_p$. Exemple: le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(m, \mathbb{Z}_p)$ des matrices à coefficients entiers p-adiques.

4.2 L'adhérence de Zariski des semigroupes

Les deux lemmes démontrés dans cette partie sont plutôt des exercices corrigés sur l'adhérence de Zariski des semigroupes.

Lemme 4.2 *Soient k un corps et Δ un semigroupe inclus dans* $\mathrm{GL}(m, k)$*.*
Alors l'adhérence de Zariski $\overline{\Delta}$ de Δ dans $\mathrm{GL}(m, k)$ *est un groupe.*

Remarque Nous utiliserons ce lemme sous la forme équivalente suivante:
Soient k un corps, $g \in \mathrm{GL}(m, k)$ et $n_0 \geq 0$.
Alors la suite $(g^n)_{n \geq n_0}$ est Zariski dense dans le groupe $<g>$ engendré par g.

Démonstration Soient $V = k^m$, $k[\mathrm{End}V]$ l'algèbre des polynômes sur $\mathrm{End}(V)$ à valeurs dans k, $I = \{P \in k[\mathrm{End}V] \ / \ \forall x \in \Delta \ P(x) = 0\}$ et $I^d = \{P \in I \ / \ \mathrm{d}^o P = d\}$.

Montrons tout d'abord l'implication facile: $x, y \in \overline{\Delta} \Longrightarrow xy \in \overline{\Delta}$. Soit P dans I. Pour x dans Δ, le polynôme $y \to P(xy)$ est nul sur Δ et donc aussi sur $\overline{\Delta}$. Donc, pour y dans $\overline{\Delta}$, le polynôme $x \to P(xy)$ est nul sur Δ et donc aussi sur $\overline{\Delta}$. Ceci prouve que si x et y sont dans $\overline{\Delta}$, on a $P(xy) = 0$, et donc xy est dans $\overline{\Delta}$.

Il reste à montrer l'implication: $x \in \overline{\Delta} \Longrightarrow x^{-1} \in \overline{\Delta}$. Fixons x dans $\overline{\Delta}$ et notons $T_x$la bijection linéaire de $k[\mathrm{End}(V)]$ sur lui même définie par $T_x(P)(y) = P(xy)$, pour tout P dans $k[\mathrm{End}(V)]$ et y dans $\mathrm{End}(V)$. On a l'inclusion $T_x(I^d) \subset I^d$ car x est dans $\overline{\Delta}$. On en déduit l'égalité $T_x(I^d) = I^d$ car I^d est de dimension finie. Donc $T_x^{-1}(I) = I$. On écrit alors, pour tout P dans I, $P(x^{-1}) = (T_x^{-2}(P))(x) = 0$. Donc x^{-1} est dans Δ. $\diamondsuit$

Question *Soient g un élément de $G = \mathrm{GL}(m, k)$ et S une suite infinie. On suppose que le groupe $< g >$ engendré par g est Zariski connexe. Montrer que la suite $(g^n)_{n \in S}$ est Zariski dense dans $<g>$.*

Cette assertion est probablement aussi vraie dans n'importe quel groupe algébrique G (linéaire ou non).

Exercice 4.3 *Montrer que tout sous-groupe Zariski connexe de* $\mathrm{GL}(V)$ *est irréductible.*
Indication: on utilisera l'exercice 1.3 et les remarques suivantes pour toute partie E d'un espace vectoriel W.
(i) Si E est Zariski connexe, son adhérence de Zariski est encore Zariski connexe.
(ii) E est irréductible si et seulement si son adhérence de Zariski. est irréductible.

Exercice 4.4 *Soit Δ un sous-semigroupe Zariski connexe de* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ *Soit E une partie Zariski dense de Δ. Montrer que l'ensemble $\{g^2 \ / \ g \in E\}$ est encore Zariski dense dans Δ.*

Le lemme suivant est propre au cas réel.

Lemme 4.5 *Tout sous-semigroupe compact H de* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ *est un groupe Zariski fermé.*

Démonstration Le fait que H est un groupe est une propriété générale des sous-semigroupes compacts des groupes topologiques métrisables. En effet, soit h un élément de H. Par compacité, il existe une suite n_i strictement croissante telle que la suite h^{n_i} converge. Soit $p_i = n_{i+1} - n_i - 1$, la suite h^{p_i} converge vers l'élément h^{-1} qui est donc dans H. Donc H est un groupe.

Montrons maintenant que H est Zariski fermé. Pour cela,il suffit de construire pour tout élément y de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ qui n'est pas dans H, un polynôme P nul sur H tel que $P(y) \neq 0$.

Soit φ une fonction continue sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ à valeurs réelles, nulle sur H et égale à 1 sur le compact $Hy = \{hy \ / \ h \in H\}$. Le théorème de Stone-Weierstrass permet de construire un polynôme Q proche de cette fonction φ sur le compact $H \cup Hy$. Par exemple tel que $Q(h) \leq \frac{1}{3}$ et $Q(hy) \geq \frac{2}{3}$ pour tout h dans H.

Notons dh la mesure de Haar sur H de masse totale 1 et R la moyene des polynômes obtenus à partir de Q par translation par un élément de H: R est défini par $R(x) = \int_H Q(hx)dh$ pour tout x dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$. Le polynôme R est égal à une constante $C \leq \frac{1}{3}$ sur H et à une constante $C' \geq \frac{2}{3}$ sur Hy. Donc le polynôme $P = R - C$ convient. $\diamondsuit$

4.3 Modules simples

Rappelons deux résultats bien classiques de la théorie des représentations de dimension finie qui nous seront utiles.

Soient k un corps, V un k espace vectoriel de dimension finie m et X une famille d'endomorphismes de V. On dit que V est *irréductible* ou *simple* (relativement à X) si $\{0\}$ et V sont les seuls sous-espaces de V invariants par tous les éléments de X.

On note $\mathrm{End}_X(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \ / \ \forall x \in X \ xf = fx\}$ le commutant de X. Cette famille X peut être un groupe,une algèbre de Lie... on peut toujours considérer l'algèbre associative A qu'elle engendre. L'espace vectoriel V est alors un A-module et on a bien sûr $\mathrm{End}_A(V) = \mathrm{End}_X(V)$.

Lemme 4.6 (Schur) *Soient k un corps, A une k-algèbre associative de dimension finie et V un A module irréductible. Alors le commutant $\mathrm{End}_A(V)$ est une algèbre à division.*

Lorsque k est algébriquement clos, cette algèbre à division $\mathrm{End}_A(V)$ est le corps k des endomorphismes scalaires.

Démonstration Soit f un élément non nul du commutant, on veut montrer que f est bijectif; l'inverse f^{-1} sera alors automatiquement dans ce commutant. Pour cela on remarque que le noyau de f est A-invariant et donc nul par irréductibilité de V.

L'algèbre à division $\mathrm{End}_A(V)$ est de dimension finie sur k, elle est donc égale à k lorsque celui-ci est algébriquement clos. $\diamondsuit$

Lemme 4.7 (Burnside) *Soient k un corps algébriquement clos, V un k espace vectoriel de dimension finie m et A une sous-algèbre associative de $\mathrm{End}(V)$ telle que V est un A module irréductible. Alors $A = \mathrm{End}(V)$.*

Démonstration Prenons b dans $\mathrm{End}(V)$ et montrons que b est dans A.

Notons $V_1, \ldots, V_m$ m copies de V et $E = \bigoplus_{1 \leq j \leq m} V_j$. L'algèbre $\mathrm{End}(V)$ agit sur E par la formule $x.(v_1, \ldots, v_m) = (xv_1, \ldots, xv_m)$. Le lemme de Schur prouve que $\mathrm{End}_A(E)$ est formé de matrices blocs dont les blocs sont des matrices scalaires allant de V_j à $V_{j'}$. En particulier tout endomorphisme de E qui commute à A commute à b.

Soient $f_1, \dots, f_m$ une base de V, f l'élément de E $f = (f_1, \dots, f_m)$ et $M = Af$. Le A-sous-module M de E admet un supplémentaire A-invariant F: prendre F de la forme $\bigoplus_{j\in J} V_j$ où J est une partie maximale de $\{1, \dots, m\}$ telle que $F \cap M = \{0\}$. On a forcément $F \oplus M = E$. Sinon on pourrait trouver j tel que $V_j \not\subset F \oplus M$ d'où $V_j \cap (F \oplus M) = \{0\}$ par irréductibilité de V_j, ce qui contredit la maximalité de J.

La projection π de E sur M parallèlement à F commute à A et donc aussi à b. On peut alors écrire $b.f = b.\pi(f) = \pi(b.f) \in A.f$ Donc b est dans A. $\diamondsuit$

4.4 Valeurs propres de même module

Dans cette partie, on montre en particulier que notre groupe Γ contient des éléments γ dont les valeurs propres n'ont pas toutes le même module.

Lemme 4.8 *Soient $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $V = k^m$ et $H \subset \mathrm{End}(V)$ un sous-semigroupe tel que V est irréductible et tel que tout élément de H a toutes ses valeurs propres de module inférieur ou égal à 1. Alors H est relativement compact.*

Remarque L'hypothèse "V irréductible" est utile. Comme le prouvent le groupe H' des matrices unipotentes triangulaires supérieures et le semigroupe H'' des matrices nilpotentes triangulaires supérieures.

Démonstration On se ramène tout d'abord au cas du corps de base $k = \mathbb{C}$:

- Si $\mathrm{End}_H(V) = \mathbb{R}$, alors l'espace vectoriel complexifié $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est encore irréductible comme H-module. En effet, tout sous-espace H-invariant de $V_{\mathbb{C}}$ autre que $V_{\mathbb{C}}$ et $\{0\}$ serait en somme directe avec son conjugué et un projecteur associé à cette somme directe serait un élément de $\mathrm{End}_H(V_{\mathbb{C}}) = (\mathrm{End}_H(V))_{\mathbb{C}}$. Contradiction.

- Sinon le commutant $\mathrm{End}_H(V)$ contient un corps isomorphe à $\mathbb{C}$. On peut donc regarder V comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Supposons donc $k = \mathbb{C}$. Le sous-espace vectoriel A de $\mathrm{End}(V)$ engendré par H est une algèbre. Le théorème de Burnside (lemme 4.7) prouve que $A = \mathrm{End}(V)$. La forme bilinéaire symétrique sur A donnée par $(a, b) \to \mathrm{Tr}(ab)$ est non dégénérée: pour tout élément a non nul de A, on peut trouver un élément b de A tel que $\mathrm{Tr}(ab) \neq 0$; par exemple $b = {}^t\,\overline{a}$.

Choisissons une famille (h_i) d'éléments de H qui forment une base de l'espace vectoriel A et notons (e_i) la base de A duale. On a l'égalité, pour tout g dans H: $g = \sum_i \mathrm{Tr}(gh_i)e_i$. Les éléments gh_i sont dans H. L'hypothèse sur les valeurs propres des éléments de H assure que, pour tout i, $|\mathrm{Tr}(gh_i)| \leq m$. Donc H est borné. $\diamondsuit$

Lemme 4.9 *Soit H un sous-semigroupe de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$. On suppose que tout élément de H a toutes ses valeurs propres de même module. Alors il en est de même des éléments de l'adhérence de Zariski de H.*

Remarque C'est ce lemme qui n'est valable ni sur le corps de base $\mathbb{C}$ ni sur le corps de base $\mathbb{Q}_p$. Par exemple, le groupe unitaire $U(m)$ est compact et est Zariski dense dans le groupe complexe $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. De même le groupe compact $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z}_p)$ est Zariski dense dans $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Q}_p)$.

Démonstration On peut suposer que H contient les matrices scalaires.

Introduisons les sous-semigroupes H' et H'' de H formés des matrices de déterminant respectivement ± 1 et 0. Les matrices de H' n'ont que des valeurs propres de module 1 tandis que les matrices de H'' sont nilpotentes. Choisissons un drapeau maximal $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{R}^m$ de sous-espaces vectoriels H-invariants et notons $W_i = V_i/V_{i-1}$, $m_i = \dim(W_i)$ et H_i, H_i', H_i'' les images de H, H' et H'' dans $\mathrm{GL}(W_i)$.

Par construction l'espace W_i est irréductible sous H_i. Le lemme 4.8 prouve que le semigroupe $H_i' \cup H_i''$ est relativement compact. Comme H_i'' est formé de matrices nilpotentes, on a $H_i'' = \{0\}$. D'autre part, l'adhérence de H_i' est un sous-semigroupe compact de $\mathrm{GL}(W_i)$. C'est donc un sous-groupe compact (lemme 4.5) et il existe une base de $\mathbb{R}^m$ telle que H_i' est inclus dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(m_i)$. Donc H est inclus dans le semigroupe H_{max} formé des matrices

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda h_1 & * & * & * \\ \hline 0 & \lambda h_2 & * & * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda h_r \end{array}\right)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h_i \in \mathrm{O}(m_i)$. Ce semigroupe H_{max} est Zariski fermé et chacun de ses éléments a toutes ses valeurs propres de même module. $\diamondsuit$

4.5 L'action sur $\Lambda^{\frac{m(m-1)}{2}}(\mathrm{End}V)$

Soit $V := \mathbb{R}^m$. Pour g dans $\mathrm{GL}(V)$, on note $\mathrm{Ad}g$ l'action adjointe de g sur $\mathrm{End}V$ donnée par $\mathrm{Ad}g(A) = gAg^{-1}$ et $\rho(g) = \Lambda^{\frac{m(m-1)}{2}}(\mathrm{Ad}g)$ l'action de g sur l'espace vectoriel $V' = \Lambda^{\frac{m(m-1)}{2}}(\mathrm{End}V)$.

Le lemme suivant fait le lien entre la notion de proximalité dans $\mathbb{P}(V)$ et la proposition 4.1 que l'on veut démontrer.

Lemme 4.10 *Pour tout élément g de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, on a l'équivalence:*
Les valeurs propres de g sont simples et de modules distincts $\Longleftrightarrow$ $\rho(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V')$.

Remarque - g^2 a alors m valeurs propres positives et simples.
- Le semigroupe $\rho(\Gamma)$ de la proposition 4.1 est encore Zariski dense dans $\rho(G)$.

Démonstration Rangeons de nouveau les modules des valeurs propres de g répétées avec multiplicité par ordre décroissant: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$. Les modules des valeurs propres de $\rho(g)$ sont les réels $\mu_I = \prod_{(i,j)\in I} \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ où I est un ensemble de $\frac{m(m-1)}{2}$ couples (i, j).

En particulier, ce réel μ_I est maximal lorsque $I = \{(i, j) \ / \ i < j\}$. Aucun autre ensemble I' n'atteint cette valeur si et seulement si la suite des modules $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ est strictement décroissante. $\diamondsuit$

4.6 Zariski densité de Γ_μ

Le but de cette partie est de terminer la

Démonstration de la proposition 4.1 On a donc un sous-semigroupe Γ Zariski dense dans $G = \mathrm{SL}(V)$. Conformément aux notations des lemmes 3.7 et 4.10, on note, pour g dans G, $V'^{+}(\rho(g))$ la somme des sous-espaces caractéristiques de $\rho(g)$ pour les valeurs propres de module maximum, et $\mu_g = m_{\rho(g)}$ la dimension de cette somme. Soit μ l'entier $\mu = \inf_{g\in\Gamma} \mu_g$. On veut montrer que les éléments de Γ qui atteignent ce minimum sont Zariski denses et que $\mu = 1$. C'est exactement ce qu'affirment les deux lemmes suivants. $\diamondsuit$

Lemme 4.11 *Soit* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$. *L'ensemble* $\Gamma_\mu := \{g \in \Gamma \ / \ \mu_g = \mu\}$ *est Zariski dense dans* G.

Démonstration Montrons tout d'abord comment un élément de Γ_μ permet d'en construire beaucoup d'autres. Fixons g dans Γ_μ et notons $W := V'^{+}(\rho(g))$. Par définition, on a $\mu = \dim W$. Notons $\sigma \in \mathrm{End}(\Lambda^\mu V')$ le projecteur de rang 1 sur la droite $\Lambda^\mu W$ parallèlement à la somme des autres espaces caractéristiques de $\Lambda^\mu\rho(g)$. Les lemmes 3.7 et 3.8 prouvent qu'il existe des constantes c_n telles que $\lim_{n\to\infty} c_n\Lambda^\mu\rho(g^n) = \sigma$.

Notons G_1 l'ouvert de Zariski non vide de G: $G_1 = \{x \in G \ / \ \Lambda^\mu\rho(x)(\mathrm{Im}\sigma) \not\subset \mathrm{Ker}\sigma\}$. Choisissons x dans $\Gamma \cap G_1$. L'élément $\sigma' = \sigma.\Lambda^\mu\rho(x)$ est donc un multiple non nul d'un projecteur de rang 1 et on a $\lim_{n\to\infty} c_n\Lambda^\mu(g^n x) = \sigma'$. Donc, par le lemme 3.6 il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\Lambda^\mu\rho(g^n x)$ est proximal dans $\mathbb{P}(\Lambda^\mu V')$. Le lemme 3.7 prouve alors que $g^n x$ est dans Γ_μ.

Le lemme 4.2 prouve que l'élément x est dans l'adhérence de Zariski de la suite $(g^n x)_{n\geq n_0}$. Donc $\Gamma \cap G_1$ est inclus dans l'adhérence de Zariski de Γ_μ et G aussi. $\diamondsuit$

Lemme 4.12 *Soit* Γ *un sous-semigroupe Zariski dense de* $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$. *On a l'égalité* $\mu = 1$.

Démonstration Supposons par l'absurde que $\mu > 1$. Rappelons qu'un élément g du groupe $G = \mathrm{SL}(V)$ est dit *régulier* si les valeurs propres de g sont simples et que l'ensemble G_{reg} des éléments réguliers de G est un ouvert de Zariski.

Choisissons, à l'aide du lemme 4.11, un élément régulier g de Γ_μ. Comme g est semisimple, on peut écrire $g = g_e g_h = g_h g_e$ où g_e est elliptique (i.e. g_e est semisimple et ses valeurs propres sont de module 1) et g_h est hyperbolique (i.e. g_h est semisimple et ses valeurs propres sont positives). Quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que g_h est inclus dans le groupe A_G des matrices diagonales à coefficients positifs et que les coefficients diagonaux de g_h forment une suite décroissante.

Soient $W := V'^{+}(\rho(g))$ et $\pi := \pi_{\rho(g)}$ le projecteur g-invariant sur W (voir lemme 3.8). Comme π est aussi égal à $\pi_{\rho(g_h)}$, le sous espace W est A_G-invariant. Notons φ l'application de G dans $\mathrm{End}W$ donnée par $\varphi(x) = \pi\rho(x)\pi$ et notons H le *sous-semigroupe* de $\mathrm{End}W$ engendré par $\varphi(\Gamma)$. Bien sûr l'adhérence de Zariski de H contient $\varphi(G)$ et donc $\varphi(A_G)$. On peut choisir a dans A_G tel que $\rho(a)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V')$ et tel que $V'^{+}(\rho(a))$ est inclus dans W. Il suffit pour cela que les coefficients diagonaux de a forment une suite strictement décroissante. Mais alors, comme $\mu = \dim W \geq 2$, $\varphi(a)$ admet au moins 2 valeurs propres distinctes.

Il existe donc, d'après le lemme 4.9 un élément h de H dont les valeurs propres n'ont pas toutes le même module. Ecrivons $h = \pi\rho(g_1)\pi\rho(g_2)\cdots\pi\rho(g_l)\pi$ avec les g_i dans Γ. D'après le lemme 3.8, il existe une suite S et des réels c_n tels que $\lim_{n\in S} c_n\rho(g)^n = \pi$. Posons $x_n = g^n g_1 g^n g_2 \cdots g^n g_l g^n \in \Gamma$. On a donc $\lim_{n\in S} c_n^{l+1}\rho(x_n) = h$. Le lemme 3.6 prouve alors que, pour $n \gg 0$, on a $\mu(x_n) \leq m(h) < \mu$. Contradiction. ♢

4.7 Eléments loxodromiques des sous-groupes Zariski denses

La fin de ce chapitre est consacrée à la généralisation de la proposition 4.1, c'est à dire à l'existence d'éléments loxodromiques dans un sous-groupe Zariski dense d'un groupe semisimple. On y utilise des propriétés de base sur les algèbres de Lie et les groupes linéaires réels semisimples qu'on admettra.

Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe[5] et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour g dans G, on note $\mathfrak{g}_g$ la somme des espaces caractéristiques de $\mathrm{Ad}g$ associés aux valeurs propres de module 1.

Définition 4.13 *Un élément g de G est dit "loxodromique" ou "$\mathbb{R}$-régulier" ou encore "proximal sur la variété drapeau" si* $\dim \mathfrak{g}_g = \inf_{h\in G} \dim \mathfrak{g}_h$.

Exemple Lorsque $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ un élément g de G est loxodromique si et seulement si les valeurs propres de g^2 sont simples et positives.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème central de ce chapitre qui généralise la proposition 4.1

Théorème 4.14 *Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense d'un groupe linéaire réel semisimple connexe.*

Alors l'ensemble des éléments loxodromiques de Γ est encore Zariski dense dans G.

Démonstration On suit pas à pas celle donnée ci-dessus pour $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$. Le théorème résulte des trois lemmes ci-dessous. ♢

Precisons tout d'abord quelle est la représentation de G qui remplacera celle introduite dans la partie 4.5.

Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, Σ le système de racines restreintes et Σ^+ un système de racines positives. Pour λ dans Σ, on note $\mathfrak{g}_\lambda$ l'espace radiciel correspondant

[5]L'hypothèse "groupe linéaire réel semisimple connexe" reviendra fréquemment dans la suite du texte. Elle signifie que G est un sous-groupe fermé connexe du groupe $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie est semisimple. Elle équivaut à "composante connexe (pour la topologie de la norme) du groupe des points réels d'un groupe algébrique semisimple défini sur $\mathbb{R}$".

et $m_\lambda := \dim \mathfrak{g}_\lambda$. Soient $\mathfrak{n} = \oplus_{\lambda\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\lambda$ et $d = \dim \mathfrak{n} = \sum_{\lambda\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\lambda$. Soit ρ la représentation de G dans $\Lambda^d\mathfrak{g}$ donnée par $\rho(g) = \Lambda^d(\mathrm{Ad}g)$.

Le premier lemme remplace le lemme 4.10.

Lemme 4.15 *Un élément g d'un groupe linéaire réel semisimple connexe G est loxodromique si et seulement si $\rho(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V')$.*

Démonstration Soit $g = g_e g_h g_u$ la décomposition de Jordan de g. On écrit $g_h = e^X$ avec X hyperbolique. Quitte à remplacer g par un conjugué, on peut supposer que, pour tout λ dans Σ^+, on a $\lambda(X) \geq 0$.

Le plus grand module des valeurs propres de $\rho(g)$ est $\mu = \prod_{\lambda\in\Sigma^+} e^{m_\lambda\lambda(X)}$. Ce module apparait une seule fois si et seulement si, pour tout λ dans Σ^+, on a $\lambda(X) > 0$. C'est à dire si g est loxodromique. $\diamondsuit$

Conformément aux notations des lemmes 3.7 et 4.10, on note, pour g dans G, $V'^+(\rho(g))$ la somme des sous-espaces caractéristiques de $\rho(g)$ pour les valeurs propres de module maximum, et $\mu_g = m_{\rho(g)}$ la dimension de cette somme. Soit μ l'entier $\mu = \inf_{g\in\Gamma}\mu_g$.

Les lemmes 4.11 et 4.12 sont inchangés:

Lemme 4.16 *Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense d'un groupe linéaire réel semisimple connexe. L'ensemble $\Gamma_\mu := \{g \in \Gamma \ / \ \mu_g = \mu\}$ est Zariski dense dans G.*

Démonstration Inchangée. $\diamondsuit$

Lemme 4.17 *Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense d'un groupe linéaire réel semisimple connexe. On a l'égalité $\mu = 1$.*

Démonstration Nous recopions la démonstration bien qu'il n'y ait que peu de changements.

Supposons par l'absurde que $\mu > 1$. Choisissons, à l'aide du lemme 4.11, un élément régulier g de Γ_μ. Comme g est semisimple, on peut écrire $g = g_e g_h = g_h g_e$ où g_e est elliptique et $g_h = e^X$ est hyperbolique. L'élément X est inclus dans un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$. On note A_G le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. On choisit un système de racines positives Σ^+ tel que, pour tout λ dans Σ^+, on a $\lambda(X) \geq 0$.

Soient $W := V'^+(\rho(g))$ et $\pi := \pi_{\rho(g)}$ le projecteur g-invariant sur W (voir lemme 3.8). Comme π est aussi égal à $\pi_{\rho(g_h)}$, le sous espace W est A_G-invariant. Notons φ l'application de G dans $\mathrm{End}W$ donnée par $\varphi(x) = \pi\rho(x)\pi$ et notons H le *sous-semigroupe* de $\mathrm{End}W$ engendré par $\varphi(\Gamma)$. Bien sûr l'adhérence de Zariski de H contient $\varphi(G)$ et donc $\varphi(A_G)$. On peut choisir a dans A_G tel que $\rho(a)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V')$ et tel que $V'^+(\rho(a))$ est inclus dans W. Il suffit pour cela de prendre $a = \exp Y$ où Y est un élément de $\mathfrak{a}$ tel que, pour tout λ dans Σ^+, on a $\lambda(Y) > 0$. La plus grande valeur propre de $\rho(a)$ est de multiplicité 1 et son espace propre est inclus dans W. Mais alors, comme $\mu = \dim W \geq 2$, $\varphi(a)$ admet au moins 2 valeurs propres distinctes.

La fin de la démonstration est alors la même que celle du lemme 4.12. $\diamondsuit$

5 Proximalité

Nous rassemblons dans cette partie quelques propriétés des éléments proximaux dans $\mathbb{P}(V)$ dont nous aurons besoin dans la partie 6.

5.1 (r,ε)-Proximalité dans $\mathbb{P}$(V)

On reprend les notations de la partie 3.4: Soient $k = \mathbb{R}$ (ou plus généralement n'importe quel corps local), V un k-espace vectoriel de dimension finie, $X = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V. On munit V d'une norme $\|.\|$ et on définit une distance d sur X par
$d(x_1, x_2) = \inf\{\|v_1 - v_2\| \ / \ v_i \in x_i \text{ et } \|v_i\| = 1 \ \ \forall i = 1, 2 \ \}$.

Si X_1, X_2 sont deux fermés de X, on note $\delta(x_1, X_2) = \inf\{d(x_1, x_2) \ / \ x_2 \in X_2\}$ et $d(X_1, X_2) = \sup\{\delta(x_i, X_j) \ / \ x_i \in X_i \text{ et } \{i, j\} = \{1, 2\} \ \}$ la distance de Hausdorff entre X_1 et X_2.

Rappelons qu'un élément g de $\mathrm{End}(V) - 0$ est dit proximal dans $\mathbb{P}(V)$ s'il a une seule valeur propre α telle que $|\alpha| = \lambda_1(g)$ et si cette valeur propre est simple. Cette valeur propre α est alors dans k et on note $x_g^+ \in X$ la droite propre correspondante. On note v_g^+ un vecteur de x_g^+ de norme 1, $V_g^<$ l'hyperplan g-invariant supplémentaire à x_g^+ et $X_g^< := \mathbb{P}(V_g^<)$.

Dans la définition qui suit, on impose un contrôle uniforme sur la proximalité dans $\mathbb{P}(V)$. Le réel r contrôle tout d'abord la "géométrie" de g, le réel ε contrôle ensuite sa "dynamique". On fixe $0 < \varepsilon \leq r$ et on note $b_g^\varepsilon := \{x \in X \ / \ d(x, x_g^+) \leq \varepsilon\}$ et $B_g^\varepsilon := \{x \in X \ / \ \delta(x, X_g^<) \geq \varepsilon\}$. Remarquons que b_g^ε est inclus dans B_g^ε dès que $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 2r$.

Définition 5.1 *Soit $0 < \varepsilon \leq r$. Un élément g proximal dans $\mathbb{P}(V)$ est dit (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 2r$, $g(B_g^\varepsilon) \subset b_g^\varepsilon$ et $g|_{B_g^\varepsilon}$ est ε-Lipschitzienne.*

Remarques. - L'action d'un élément g de $\mathrm{End}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ n'est défini qu'en dehors du noyau $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} g)$. Il résulte des notations que la boule B_g^ε ne rencontre pas ce noyau.

- La condition "ε-Lipschitzienne" signifie que pour tout x, y dans B_g^ε, $d(gx, gy) \leq \varepsilon d(x, y)$.

- Si g est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$ alors g^n est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$, pour tout $n \geq 1$.

- Pour tout élément g proximal dans $\mathbb{P}(V)$ et tout $r \geq \varepsilon > 0$ tel que $2r \leq \delta(x_g^+, X_g^<)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, g^n est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

Voici une condition suffisante de proximalité dans $\mathbb{P}(V)$.

On appelle hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ une partie Y de la forme $Y = \mathbb{P}(W)$ où W est un hyperplan de V.

Lemme 5.2 (Critère de proximalité) *Soient g dans $\mathrm{GL}(V)$, x^+ dans $\mathbb{P}(V)$, Y un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et $r \geq \varepsilon > 0$. On note $b^\varepsilon := \{x \in X \ / \ d(x, x^+) \leq \varepsilon\}$ et $B^\varepsilon := \{x \in X \ / \ \delta(x, Y) \geq \varepsilon\}$. On suppose que $\delta(x^+, Y) \geq 6r$, $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$ et $g|_{B^\varepsilon}$ est ε-Lipschitzienne.*

Alors g est $(2r, 2\varepsilon)$-proximal dans $\mathbb{P}(V)$, $d(x_g^+, x^+) \leq \varepsilon$ et $d(X_g^<, Y) \leq \varepsilon$.

Démonstration. La restriction de g à B^ε est une contraction ε-Lipschitzienne. Elle a donc un point fixe attracteur x_g^+. Donc g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$. Comme $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$, on a $d(x_g^+, x^+) \leq \varepsilon$. Comme B^ε est inclus dans le bassin d'attraction de x_g^+, on a $X_g^< \cap B^\varepsilon = \emptyset$, c'est à dire $d(X_g^<, Y) \geq \varepsilon$.

On en déduit alors que $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 4r$, puis que $g(B_g^{2\varepsilon}) \subset g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon \subset b_g^{2\varepsilon}$ et enfin que $g|_{B_g^{2\varepsilon}}$ est ε-Lipschitzienne. Donc g est $(2r, 2\varepsilon)$-proximal dans $\mathbb{P}(V)$. $\diamondsuit$

5.2 Norme et rayon spectral des éléments (r,ε)-proximaux

Le lemme 3.6 affirme que la condition "proximal dans $\mathbb{P}(V)$" est une condition ouverte pour la topologie de la norme. Le lemme suivant affirme que la condition "(r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$" est une condition fermée.

Lemme 5.3 *Soit* $0 < \varepsilon \leq r$ *. L'ensemble des éléments de* $\mathrm{End}(V)$ (r, ε)*-proximaux dans* $\mathbb{P}(V)$ *est un fermé de* $\mathrm{End}(V) - 0$.

Démonstration. Soit (g_n) une suite de transformations (r, ε)-proximales dans $\mathbb{P}(V)$ qui converge vers un élément g non nul. Montrons tout d'abord que g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{n\to\infty} x_{g_n}^+ = x^+$ et $\lim_{n\to\infty} X_{g_n}^< = Y$ où cette limite est prise pour la distance de Hausdorff. On note $b^\varepsilon := \{x \in X \ / \ d(x, x^+) \leq \varepsilon\}$ et $B^\varepsilon := \{x \in X \ / \ \delta(x, Y) \geq \varepsilon\}$. On a alors $\lim_{n\to\infty} b_{g_n}^\varepsilon = b^\varepsilon$ et $\lim_{n\to\infty} B_{g_n}^\varepsilon = B^\varepsilon$. On a donc $\delta(x^+, Y) \geq 2r$, $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$ et $g|_{B^\varepsilon}$ est une contraction ε-Lipschitzienne. Donc g a un point fixe attracteur x_g^+ dans b^ε. Ce qui prouve que g est proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

La continuité des applications $g \to x_g^+$ et $g \to X_g^<$ assurent que $x = x_g^+$ et $Y = X_g^<$ et donc g est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$. $\diamondsuit$

Le lemme suivant affirme que, pour un élément (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$, le rayon spectral $\lambda_1(g)$ est une bonne approximation de la norme de g.

Lemme 5.4 *Soient* V *un* k*-espace vectoriel de dimension finie et* $0 < \varepsilon \leq r$*. Il existe des constantes* $c_{r,\varepsilon} \in]0, 1[$ *telles que, pour tout* $r > 0$*, on a* $\lim_{\varepsilon\to 0} c_{r,\varepsilon} = 1$ *et, pour toute transformation linéaire* g *de* V (r, ε)*-proximale dans* $\mathbb{P}(V)$*, on a* $c_{r,\varepsilon}\|g\| \leq \lambda_1(g) \leq \|g\|$.

Démonstration. Cela résulte des deux faits suivants:

Les ensembles $P_{r,\varepsilon} := \{g \in \mathrm{End}(V) \ / \ g$ est $(r, \varepsilon)-$proximal dans $\mathbb{P}(V)$ et de norme $1\}$ sont compacts (lemme 5.3).

L'application $g \to \lambda_1(g)$ est continue et vaut 1 sur le compact $P_r := \cap_{\varepsilon>0} P_{r,\varepsilon}$. $\diamondsuit$

5.3 Le résultat de finitude d'Abels-Margulis-Soifer

Proposition 5.5 (A-M-S) *Soient k un corps local, V un k-espace vectoriel de dimension $m \geq 2$, Γ un sous-groupe Zariski connexe de $\mathrm{GL}(V)$ qui contient un élément h_0 proximal dans $\mathbb{P}(V)$. On suppose que V est irréductible.*

Alors, on peut trouver $r = r(\Gamma)$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq r$, il existe une partie finie F de Γ telle que, pour tout g dans G, il existe h dans F tel que gh est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

Commençons la démonstration par un lemme:

Lemme 5.6 *Soit $V = \mathbb{R}^m$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $D_\varepsilon \geq 1$ telle que, pour tout g dans $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$, il existe un hyperplan Y_g de $\mathbb{P}(V)$ tel que la restriction de g à la boule $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{P}(V) \ / \ \delta(x, Y_g) \geq \varepsilon\}$ est D_ε-Lipschitzienne.*

Remarques - L'hyperplan Y_g ne dépend pas de ε.
- La boule B_ε n'est pas en général g-invariante.

Démonstration La décomposition de Cartan pour $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ que nous reverrons dans le lemme 6.1 permet d'écrire $g = k_1 a k_2$ avec k_1, k_2 dans $\mathrm{SO}(m)$ et $a = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ avec $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m > 0$. Les transformations k_1 et k_2 sont 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{P}(V)$. Il suffit donc de montrer notre assertion pour $g = a$. On prend alors $Y_g = \mathbb{P}(W)$ où W est l'hyperplan de V engendré par $e_2, \ldots, e_m$. En effet, munissons W de la distance induite par sa norme. L'application $\varphi : W \to \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(W)$ donnée par $\varphi(w) = \mathbb{R}(e_1 + w)$ est un homéomorphisme localement bilipschitzien. Avec cette identification, l'action induite sur W est donnée par $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(0, x_2, \ldots, x_m) = (0, \frac{\mu_2}{\mu_1} x_2, \ldots, \frac{\mu_m}{\mu_1} x_m)$. Elle est 1-Lipschitzienne. Donc g est D_ε-Lipschitzienne sur B_ε ou la constante D_ε est le produit des constantes de Lipschitz de φ^{-1} sur B_ε et de φ sur $\varphi^{-1}(B_\varepsilon)$. $\diamondsuit$

On dira qu'une famille de droites de V est *en position générale* si toute sous-famille à p éléments avec $p \leq \dim V$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension p. On dira qu'une famille d'hyperplans de V est *en position générale* si la famille des droites de V^* orthogonales l'est.

Démonstration de la proposition 5.5

On note x_0^+ l'attracteur de h_0 dans $\mathbb{P}(V)$, $V_0^<$ son supplémentaire h_0-invariant et $X_0^< = \mathbb{P}(V_0^<)$. Comme V est irréductible et que Γ est Zariski connexe, on peut construire, par récurrence, une suite $g_1, \ldots, g_t$ dans Γ telle que, en notant $x_j^+ := g_j(x_0^+)$ et $X_j^< = g_j(X_0^<)$, on a

i) $x_j^+ \notin X_k^< \quad \forall\, 1 \leq j, k \leq t$.
ii) La famille de droites $(x_j^+)_{1 \leq j \leq t}$ est en position générale.
iii) La famille d'hyperplans $(X_j^<)_{1 \leq j \leq t}$ est en position générale.

On suppose $t \geq m$ et on choisit le réel r de sorte que:

i) $\delta(x_j^+, X_k^<) > 6r \quad \forall\, 1 \leq j, k \leq t$.
ii) Pour tout hyperplan Y de $\mathbb{P}(V^*)$ il existe j tel que $\delta(x_j^+, Y) > 6r$.
iii) Pour tout point x de $\mathbb{P}(V)$ il existe k tel que $\delta(x, X_k^<) > 6r$.

Soit maintenant $0 < \varepsilon < r$ et posons $\eta = \varepsilon D_r^{-1} \leq \varepsilon$ où D_r est la constante du lemme 5.6 . Choisissons un entier n_0 suffisamment grand pour que les éléments $h_j := g_j h_0^{n_0} g_j^{-1}$ soient (r, η)-proximaux dans $\mathbb{P}(V)$. On prend alors $F = \{h = h_j h_k \ / \ 1 \leq j, k \leq t\}$.

On note b_j^ε et B_j^ε pour $b_{h_j}^\varepsilon$ et $B_{h_j}^\varepsilon$. Pour tout g dans Γ, on peut choisir j tel que $\delta(x_j^+, Y_g) > 6r$, puis k tel que $\delta(g(x_j^+), X_k^<) > 6r$. On a alors les inclusions:

$$gh_j h_k(B_k^\varepsilon) \subset gh_j(b_k^\eta) \subset gh_j(B_j^\eta) \subset g(b_j^\eta) \subset b(g(x_j^+), \varepsilon)$$

et la restriction de $gh_j h_k$ à B_k^ε est ε-Lipschitzienne. Le lemme 5.2 prouve alors que $gh_j h_k$ est $(2r, 2\varepsilon)$-proximal. $\diamondsuit$

5.4 Produit d'éléments (r,ε)-proximaux dans $\mathbb{P}$(V)

La proposition suivante donne une approximation de $\lambda_1(g)$ et de $\|g\|$ lorsque g est un mot dont les lettres sont des éléments (r, ε)-proximaux dans $\mathbb{P}(V)$.

Soient g, h deux éléments de $\mathrm{End}(V)$ proximaux dans $\mathbb{P}(V)$ on note β l'élément de k défini par l'égalité: $v_h^+ - \beta v_g^+ \in V_g^<$. On pose $\nu_1(g, h) = |\beta|$

Si $g_0, \ldots, g_l$ sont des éléments de $\mathrm{End}(V)$ proximaux dans $\mathbb{P}(V)$ tels que $g_0 = g_l$, le produit $\nu_1(g_l, \ldots, g_0) = \prod_{1 \leq j \leq l} \nu_1(g_j, g_{j-1})$ ne dépend pas des choix faits.

Proposition 5.7 *Pour tout $0 < \varepsilon \leq r$ il existe des constantes $C_{r,\varepsilon} > 0$ telles que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_{r,\varepsilon} = 1 \ \ , \text{pour tout } r > 0,$$

et, si $g_1, \ldots, g_l$ sont des transformations linéaires (r, ε)-proximales dans $\mathbb{P}(V)$ vérifiant (en notant $g_0 = g_l$)

$$\delta(x_{g_{j-1}}^+, X_{g_j}^<) \geq 6r \ \text{ pour } \ j = 1, \ldots, l \ .$$

Alors, pour tout $n_1, \ldots, n_l \geq 1$, le produit $g = g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)$-proximal dans $\mathbb{P}(V)$ et on a

$$C_{r,\varepsilon}^{-l} \nu_1(g_l, \ldots, g_0) \leq \frac{\lambda_1(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda_1(g_l)^{n_l} \cdots \lambda_1(g_1)^{n_1}} \leq C_{r,\varepsilon}^l \nu_1(g_l, \ldots, g_0) \ \text{ et}$$

$$C_{r,\varepsilon}^{-l} \nu_1(g_l, \ldots, g_0) \leq \frac{\|g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}\|}{\lambda_1(g_l)^{n_l} \cdots \lambda_1(g_1)^{n_1}} \leq C_{r,\varepsilon}^l \nu_1(g_l, \ldots, g_0) \ \ .$$

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 5.8 *Pour tout $0 < \varepsilon < r$, il existe des constantes $d_{r,\varepsilon} > 0$ telles que, pour tout $r > 0$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} d_{r,\varepsilon} = 1$, et pour tout hyperplan W de V et tout triplets de points v, v', w de V de norme 1 vérifiant $\delta(kv, \mathbb{P}(W)) \geq r$, $\delta(kv', \mathbb{P}(W)) \geq r$, $d(kv, kv') \leq \varepsilon$ et $w \notin W$ les nombres $\alpha \in k$ et $\alpha' \in k$ définis par $v - \alpha w \in W$ et $v' - \alpha' w \in W$ vérifient les inégalités $d_{r,\varepsilon}^{-1} \leq \frac{|\alpha'|}{|\alpha|} \leq d_{r,\varepsilon}$.*

Démonstration C'est une conséquence de la compacité de l'ensemble de tels triplets (W,v,v') et de la continuité de l'application $(W,v,v') \to \frac{\alpha'}{\alpha}$. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition 5.7 Notons x_j^+, v_j^+, $X_j^<$, $V_j^<$, B_j^ε, b_j^ε pour $x_{g_j}^+$, $v_{g_j}^+$, etc... Comme g_j^n est (r,ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$, que $x_{g_j^n}^+ = x_j^+$ et que $X_{g_j^n}^< = X_j^<$, on peut supposer $n_j = 1$, pour tout $j = 1,\dots,l$.

On a l'inclusion $g_1(B_1^\varepsilon) \subset b_1^\varepsilon \subset B_2^\varepsilon$ car $\delta(x_1^+, X_2^<) \geq 2r \geq 2\varepsilon$. De même, $g_2 g_1(B_1^\varepsilon) \subset b_2^\varepsilon$ et, après itération, $g(B_1^\varepsilon) \subset b_l^\varepsilon$ et $g|_{B_1^\varepsilon}$ est ε-Lipschitzienne. On peut appliquer le lemme 5.2 car $\delta(x_l^+, X_1^<) \geq 6r$. On obtient que g est $(2r, 2\varepsilon)$-proximal dans $\mathbb{P}(V)$ et que $x_g^+ \in b_l^\varepsilon$.

Soient $w_0 = v_g^+$, $y_0 = x_g^+$ et, pour $j = 1,\dots,l$,

$$w_j = g_j w_{j-1} \ \text{ et } \ y_j = g_j y_{j-1} \ .$$

Par construction, on a

$$y_j \in b_j^\varepsilon \ \text{ pour } \ j = 0,\dots,l \ \text{ et}$$
$$w_l = \lambda_1(g) w_0 \ .$$

Soit $\alpha_j \in k$ le nombre défini par l'égalité, pour $j = 1,\dots,l$,

$$w_{j-1} = \alpha_j v_j^+ \ \text{ modulo } V_j^< \ .$$

Comme $\delta(y_{j-1}, X_j^<) > 5r$ et $\delta(x_j^+, X_j^<) \geq 2r$, le lemme 5.8 prouve que

$$d_{r,\varepsilon}^{-1} \nu_1(g_j, g_{j-1}) \leq \frac{|\alpha_j|}{\|w_{j-1}\|} \leq d_{r,\varepsilon} \nu_1(g_j, g_{j-1}) \ .$$

On a aussi

$$w_j = \alpha_j \lambda_1(g_j) v_j^+ \ \text{ modulo } V_j^< \ .$$

Comme $\delta(y_j, X_j^<) \geq r$, le même lemme 5.8 prouve que

$$d_{r,\varepsilon}^{-1} \leq \frac{|\alpha_j| \lambda_1(g_j)}{\|w_j\|} \leq d_{r,\varepsilon} \ .$$

Ces deux inégalités donnent

$$d_{r,\varepsilon}^{-2} \nu_1(g_j, g_{j-1}) \leq \frac{\|w_j\|}{\|w_{j-1}\|} \lambda_1(g_j)^{-1} \leq d_{r,\varepsilon}^2 \nu_1(g_j, g_{j-1}) \ .$$

En faisant le produit de ces l inégalités et en remarquant que $\frac{\|w_l\|}{\|w_0\|} = \lambda_1(g)$, on obtient

$$d_{r,\varepsilon}^{-2l} \nu_1(g_l,\dots,g_0) \leq \frac{\lambda_1(g)}{\lambda_1(g_l)\cdots\lambda_1(g_1)} \leq d_{r,\varepsilon}^{2l} \nu_1(g_l,\dots,g_0) \ .$$

puis à l'aide du lemme 5.4

$$d_{r,\varepsilon}^{-2l} \nu_1(g_l,\dots,g_0) \leq \frac{\|g_l \cdots g_1\|}{\lambda_1(g_l)\cdots\lambda_1(g_1)} \leq d_{r,\varepsilon}^{2l} c_{2r,2\varepsilon}^{-1} \nu_1(g_l,\dots,g_0) \ .$$

Ce qui prouve notre proposition avec $C_\varepsilon = d_{r,\varepsilon}^2 c_{2r,2\varepsilon}^{-1}$. $\diamondsuit$

Le corollaire suivant donne une autre définition du réel $\nu_1(g_l,\dots,g_0)$.

Corollaire 5.9 *Soient $g_0, \dots, g_l$ des transformations linéaires proximales dans $\mathbb{P}(V)$ vérifiant $g_0 = g_l$. Alors on a l'égalité:*

$$\lim \frac{\lambda_1(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda_1(g_l)^{n_l} \cdots \lambda_1(g_1)^{n_1}} = \lim \frac{\|g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}\|}{\lambda_1(g_l)^{n_l} \cdots \lambda_1(g_1)^{n_1}} = \nu_1(g_l, \dots, g_0)$$

où ces limites sont prises quand les entiers n_j tendent tous vers $+\infty$

Démonstration Cela résulte de la proposition 5.7 lorsque $x_{g_j}^+ \notin X_{g_{j-1}}^<$ pour $j = 1, \dots, l$.

Lorsqu'il existe j tel que $x_{g_j}^+$ est dans $X_{g_{j-1}}^<$, le même raisonnement prouve que cette limite est nulle...les détails sont laissés au lecteur. ♢

5.5 Sous-groupe (r,ε)- Schottky dans $\mathbb{P}$(V)

La définition suivante est motivée par la proposition 5.7.

Définition 5.10 *Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $t \geq 2$. On dit qu'un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de $\mathrm{GL}(V)$ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est (r, ε)-Schottky dans $\mathbb{P}(V)$ si il vérifie les propriétés suivantes. On note $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ (resp. $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_t^{-1}\}$).*

i) Pour tout h dans E, h est (r, ε)-proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

ii) Pour tout h, h' dans E (resp. h, h' dans E avec $h' \neq h^{-1}$), $\delta(x_h^+, X_{h'}^<) \geq 6r$.

Remarques - La proposition 5.7 permet d'estimer la norme et le rayon spectral de tout élément d'un sous-semigroupe (r, ε)-Schottky dans $\mathbb{P}(V)$.

- Cette définition dépend du choix des générateurs γ_j et de la norme sur V.

- Si le semigroupe (resp. groupe) Γ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est (r, ε)-Schottky dans $\mathbb{P}(V)$, il en est de même du semigroupe (resp. groupe) Γ_m de générateurs $\gamma_1^m, \dots, \gamma_t^m$ pour tout $m \geq 1$.

- Un sous-groupe Γ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ qui est (r, ε)-Schottky dans $\mathbb{P}(V)$ est discret dans $\mathrm{GL}(V)$ et est un groupe libre en ces générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ (lemme 3.1).

6 Le cône limite d'un sous-groupe Zariski dense

Le thème de ce chapitre est le comportement asymptotique d'un sous-groupe Zariski dense Γ d'un groupe linéaire semisimple réel G.

On montre que le cone asymptote à l'image de Γ par la projection de Cartan de G est convexe et d'intérieure non vide (théorème 6.4).

Comme dans le chapitre précédent, le cas du groupe $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ sera étudié en premier. Les principales idées s'adapteront alors au cas général à l'aide de la théorie des représentations de G. Et tant pis pour les redites...

6.1 Le cône limite d'un sous-groupe Zariski dense de SL(m,$\mathbb{R}$)

On munit l'espace vectoriel V=$\mathbb{R}^m$ de la norme euclidienne de sorte que sa base naturelle $e_1, \ldots, e_m$ soit orthonormée. Pour g dans le groupe $G = \mathrm{SL}(V)$, on note $\|g\| = \sup_{\|v\|=1} \|gv\|$. Soient $A_G = \{g = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in G \ / \ \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_m > 0\}$ et $A^+ = \{g = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in G \ / \ \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m > 0 \ \}$.

Pour g dans le groupe G, on introduit l'élément de A^+: $\mu(g) = \mathrm{diag}(\mu_1(g), \ldots, \mu_m(g))$ où $\mu_i(g)$ est la suite des valeurs propres de la matrice symétrique $({}^t g\, g)^{\frac{1}{2}}$ rangées par ordre décroissant. L'application $\mu : G \to A^+$ est appelée *projection de Cartan* à cause du lemme bien classique suivant.

Lemme 6.1 (Décomposition de Cartan pour SL$(\mathbf{m}, \mathbb{R})$) *Soit $K = \mathrm{SO}(m)$. L'image $\mu(g)$ est l'unique élément de A^+ tel que $g \in K\mu(g)K$.*

Démonstration Diagonaliser la matrice symétrique définie positive ${}^t g\, g$ dans une base orthonormée. $\diamondsuit$

Soit Γ un sous-semigroupe. Nous verrons dans le prochain chapitre le rôle que joue $\mu(\Gamma)$ dans les questions d'action propre. Pour étudier cet ensemble $\mu(\Gamma)$, on linéarise A^+:

Soient $\mathfrak{a} = \{x = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \ / \ x_1 + \cdots + x_m = 0 \ \}$ et $\log : A_G \to \mathfrak{a}$ l'application logarithme. C'est une bijection qui identifie A^+ avec le cône $\mathfrak{a}^+ = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{a} \ / \ x_1 \geq \cdots \geq x_m \ \}$ En particulier on a $\log \mu(g) = \mathrm{diag}(\log \mu_1(g), \ldots, \log \mu_m(g))$. On veut décrire le cône asymptote à l'ensemble $E = \log \mu(\Gamma)$: c'est à dire l'ensemble des vecteurs X de $\mathfrak{a}$ que l'on peut obtenir comme limite $X = \lim_{n\to\infty} t_n X_n$ avec $t_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ et X_n dans E. Pour cela notons $\lambda(g) = \mathrm{diag}(\lambda_1(g), \ldots, \lambda_m(g)) \in A^+$ la suite des modules des valeurs propres de g rangés par ordre décroissant et $\log \lambda(g) = \mathrm{diag}(\log \lambda_1(g), \ldots, \log \lambda_m(g)) \in \mathfrak{a}^+$. Remarquons que, pour $n \geq 0$, on a $\log \lambda(g^n) = n \log \lambda(g)$. Il est donc naturel d'introduire le plus petit cône fermé ℓ_Γ de $\mathfrak{a}^+$ qui contient $\log \lambda(\Gamma)$. On l'appellera *cône limite* de Γ.

Proposition 6.2 *Soit Γ un sous-semigroupe Zariski-dense de $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$. Alors*

a) Le cône asymptote à $\log\mu(\Gamma)$ *est le cône limite* ℓ_Γ

b) Le cône limite ℓ_Γ *est convexe et d'intérieur non vide.*

La première idée pour analyser ces valeurs propres est bien classique: on introduit les espaces vectoriels $V_i := \Lambda^i V$ et les représentations de G dans V_i données par $\rho_i(g) = \Lambda^i g$.

On munit V^i de la structure euclidienne pour laquelle la famille $(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_i})_{k_1 < \cdots < k_i}$ est orthonormée. Ces représentations sont irréductibles. Le lemme suivant affirme que l'on controle les éléments $\lambda(g)$ et $\mu(g)$ à l'aide des rayons spectraux $\lambda_1(\rho_i(g))$et des normes $\|\rho_i(g)\|$ des images de g dans les représentations V_i.

Lemme 6.3 *On a les égalités, pour g dans $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$:*
a) $\lambda_1(\rho_i(g)) = \lambda_1(g) \cdots \lambda_i(g)$.
b) $\|\rho_i(g)\| = \mu_1(g) \cdots \mu_i(g)$.

Démonstration a) Soit $g = g_e g_h g_u$ la décomposition de Jordan de g. Alors $\rho_i(g) = \rho_i(g_e)\rho_i(g_h)\rho_i(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\rho_i(g)$. On peut donc supposer que $g = g_h$, puis, en conjuguant g, que g est dans A^+. Le résultat est alors clair.
b) Ecrivons $g = k_1\mu(g)k_2$ avec k_1 et k_2 dans K. On a $\|\rho_i(g)\| = \|\rho_i(\mu(g))\|$. On peut donc supposer que g est dans A^+. Le résultat est alors clair. $\diamondsuit$

Remarque Notons χ_i le caractère de A^+ défini par $\chi_i(\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) = \alpha_1 \cdots \alpha_i$. Le lemme 6.3 se réécrit alors: $\lambda_1(\rho_i(g)) = \chi_i(\lambda(g))$ et $\|\rho_i(g)\| = \chi_i(\mu(g))$.

6.2 Le cône limite d'un sous-groupe Zariski dense

Cette partie reprend dans un cadre plus générale la partie précédente. Le lecteur, qui ne serait pas familier avec ces quelques outils (décomposition de Cartan, décomposition de Jordan et représentations de dimension finie pour les groupes semisimples), peut sauter cette partie en première approche: il poursuivra alors sa lecture du chapitre en remplaçant l'hypothèse G semisimple par le cas particulier $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$.

Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, A_G un sous-espace de Cartan de G, A^+ une chambre de Weyl fermée de A_G et K un sous-groupe compact maximal de G pour lequel on a la décomposition de Cartan: $G = K\,A^+K$. Notons $\mu : G \to A^+$ la projection de Cartan: pour g dans G, $\mu(g)$ est l'unique élément de $A^+ \cap KgK$. L'application logarithme log identifie A_G à son algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Notons $\mathfrak{a}^+ := \log A^+$ la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$.
Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On cherche toujours à décrire la projection de Cartan $\mu(\Gamma)$. Quelques notations sont utiles.
Soient $\lambda : G \to A^+$ la projection définie par: pour g dans G, $\lambda(g)$ est l'unique élément de A^+ qui est conjugué à la composante hyperbolique g_h de la décomposition de Jordan de g. Notons ℓ_Γ le plus petit cône fermé de $\mathfrak{a}^+$ contenant $\log\lambda(\Gamma)$. On l'appellera cône limite de Γ. Lorsque Γ est un sous-groupe de G, ce cône est invariant par l'involution d'opposition.

Avec ces notations, la proposition 6.2 est inchangée:

Théorème 6.4 *Soient G groupe linéaire réel semisimple connexe et Γ un sous-semigroupe Zariski-dense de G. Alors*
a) Le cône asymptote à $\log\mu(\Gamma)$ est le cône limite ℓ_Γ
b) Le cône limite ℓ_Γ est convexe et d'intérieur non vide.

Remarque Réciproquement, on suppose G non compact. Soit Ω un cône convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathfrak{a}^+$. Alors (voir [5])
- On peut montrer qu'il existe un *sous-semigroupe* discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.
- Si en outre Ω est stable par l'involution d'opposition (c'est l'involution de $\mathfrak{a}^+$ qui envoie un élément X sur l'unique élément de $\mathfrak{a}^+$ conjugué à $-X$), on peut trouver un *sous-groupe* discret et Zariski-dense Γ de G tel que $\ell_\Gamma = \Omega$.

Les représentations $\Lambda^i V$ de la partie précédente sont remplacées par les représentations V_i du lemme suivant.

Soit (V, ρ) une représentation de G dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout caractère χ de A_G, on note $V_\chi := \{v \in V \ / \ \forall a \in A_G \ , \ \rho(a)v = \chi(a)v\}$ l'espace propre correspondant. On note $\Sigma(\rho) := \{\chi \ / \ V_\chi \neq 0\}$ l'ensemble des *poids restreints* de V. On a $V = \bigoplus_{\chi\in\Sigma(\rho)} V_\chi$. On munit $\Sigma(\rho)$ de l'ordre défini par:
$\chi_1 \leq \chi_2 \Longleftrightarrow \chi_1(a) \leq \chi_2(a)$ pour tout a dans A^+.

On suppose ρ irréductible. L'ensemble $\Sigma(\rho)$ a alors un unique élément λ maximal pour cet ordre appelé le *plus haut poids restreint* de V. La représentation ρ est dite *proximale* si $\dim V_\lambda = 1$. C'est toujours le cas lorsque G est déployé.

Lemme 6.5 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe. Il existe r représentations irréductibles proximales ρ_i de G dans des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels V_i de plus hauts poids restreints $(\chi_i)_{1\leq i\leq r}$ telles que l'application $a \to (\chi_1(a), \ldots, \chi_r(a))$ est un isomorphisme de A_G sur le groupe multiplicatif: $]0, \infty[^r$.*

Démonstration Nous admettrons ce lemme qui est une conséquence de la classification des représentations de dimension finie de G.

Le lemme 6.3 est remplaçé par le lemme suivant appliqué aux représentations (V_i,ρ_i).

Lemme 6.6 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe. Pour toute représentation irréductible (V, ρ) de G de plus haut poids restreint χ, il existe une norme euclidienne sur V, telle que, pour tout g dans G, on a*
a) $\lambda_1(\rho(g)) = \chi(\lambda(g))$
b) $\|\rho(g)\| = \chi(\mu(g))$

Démonstration Choisissons une norme euclidienne K-invariante sur V de sorte que, pour a dans A^+, $\rho(a)$ soit un endomorphisme symétrique. C'est possible. Nous admettrons ce point de théorie des représentations. On a alors $\lambda_1(\rho(a)) = \|\rho(a)\| = |\chi(a)|$. Donc $\lambda_1(\rho(g)) = \lambda_1(\rho(\lambda(g))) = \chi(\lambda(g))$ et $\|\rho(g)\| = \|\rho(\mu(g))\| = |\chi(\mu(g))|$. $\diamondsuit$

Le lemme suivant est une variante du lemme 4.15.

Lemme 6.7 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe et g un élément de G. On a les équivalences:*
g est loxodromique $\iff \lambda(g)$ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl A^+
$\iff \rho_i(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V_i)$ pour tout i
$\iff$ Pour toute représentation proximale (V,ρ) de G, $\rho(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V)$.

Démonstration Laissée au lecteur... car il est l'heure que je rende ma copie. ♢

6.3 Projection de Cartan

Voici deux conséquences des lemmes 6.5 et 6.6 (du lemme 6.3 lorsque $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$)

Corollaire 6.8 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe.*
Pour tout g dans G, on a l'égalité $\lambda(g) = \lim_{n\to\infty}(\mu(g^n))^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration Cela résulte de ces lemmes et de la formule du rayon spectral $\lambda_1(h) = \lim_{n\to\infty}(\|h^n\|)^{\frac{1}{n}}$ appliquée à $h = \rho_i(g)$. ♢

Remarque Ce corollaire prouve que le cone limite ℓ_Γ est inclus dans le cône asymptote à $\log \mu(\Gamma)$. Le corollaire suivant nous sera utile pour prouver l'inclusion inverse.

Corollaire 6.9 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, $\mu : G \to A^+$ la projection de Cartan et L un compact de G. Alors, il existe un compact M de A_G tel que, pour tout g dans G, on a l'inclusion: $\mu(LgL) \subset \mu(g)M$.*

Démonstration Fixons un compact L de G tel que $L = L^{-1}$. On veut montrer que le quotient $\mu(l_1 g l_2)/\mu(g)$ reste dans un compact M de A_G lorsque g décrit G et l_1, l_2 décrivent le compact L. D'après l'assertion b) de ces lemmes il suffit de trouver des constantes $C_i > 1$ telles que, pour tout g dans G et l_1, l_2 dans L, on a $C_i^{-1} \leq \|\rho_i(l_1 g l_2)\|.\|\rho_i(g)\|^{-1} \leq C_i$. On peut prendre $C_i = \sup_{l\in L}\|\rho_i(l)\|^2$. ♢

6.4 Éléments (r,ε)-loxodromiques

La deuxième idée consiste à faire intervenir les éléments g de Γ qui sont loxodromiques c'est à dire pour lesquels toutes les images $\rho_i(g)$ sont proximales dans $\mathbb{P}(V_i)$. Nous aurons alors besoin des propriétés des éléments proximaux dans $\mathbb{P}(V)$ que nous avons démontrés dans la partie 5.

Définition 6.10 *Un élément proximal g de G est dit (r, ε)-loxodromique si, pour tout i, les images $\rho_i(g)$ sont (r, ε)-proximales dans $\mathbb{P}(V_i)$*

Remarque On peut aussi dire "(r, ε)-$\mathbb{R}$-régulier" ou encore "(r, ε)-proximal sur la variété des drapeaux".

Lemme 6.11 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe et $0 < \varepsilon \leq r$. Il existe des compacts $M_{r,\varepsilon}$ de A_G tels que, pour tout r, $\lim_{\varepsilon\to 0} M_{r,\varepsilon} = \{e\}$ et, pour tout élément (r,ε)-loxodromique g de G, on a $\dfrac{\lambda(g)}{\mu(g)} \in M_{r,\varepsilon}$.*

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la définition et des lemmes 5.4 et 6.3.

Proposition 6.12 (A-M-S) *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On peut trouver $r = r(\Gamma)$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq r$, il existe une partie finie F de Γ telle que, pour tout g dans G, il existe h dans F tel que gh est (r,ε)-loxodromique.*

Démonstration Le théorème 4.14 prouve qu'il existe dans Γ un élément loxodromique h_0 . Autrement dit, pour tout i, les images $\rho_i(h_0)$ sont proximales dans $\mathbb{P}(V_i)$. La démonstration est alors la même que celle de la proposition 5.5 en prenant la précaution de travailler simultanément avec toutes les représentations ρ_i. Voici les détails:

On note $x^+_{i,0}$ l'attracteur de $\rho_i(h_0)$ dans $\mathbb{P}(V_i)$, $V^<_{i,0}$ son supplémentaire h_0-invariant et $X^<_{i,0} = \mathbb{P}(V^<_{i,0})$. Comme V_i est irréductible et que Γ est Zariski connexe, on peut construire, par récurrence, une suite $g_1,\ldots,g_t$ dans Γ telle que, en notant $x^+_{i,j} := g_j(x^+_{i,0})$ et $X^<_{i,j} = g_j(X^<_{i,0})$, on a, pour tout i,

i) $x^+_{i,j} \notin X^<_{i,k} \quad \forall\, 1 \leq j,k \leq t$.
ii) La famille de droites $(x^+_{i,j})_{1\leq j\leq t}$ est en position générale.
iii) La famille d'hyperplans $(X^<_{i,j})_{1\leq j\leq t}$ est en position générale.

On suppose $t \geq \sum_i \dim V_i$. Il est alors possible de choisir un réel r de sorte que:

i) $\delta(x^+_{i,j}, X^<_{i,k}) > 6r \quad \forall i\ \ \forall\, 1 \leq j,k \leq t$.
ii) Pour toute collection d'hyperplans Y_i de $\mathbb{P}(V_i^*)$ il existe j tel que, pour tout i, $\delta(x^+_{i,j}, Y_i) > 6r$.
iii) Pour toute collection de points x_i de $\mathbb{P}(V_i)$ il existe k tel que, pour tout i, $\delta(x_i, X^<_{i,k}) > 6r$.

Soit maintenant $0 < \varepsilon < r$ et posons $\eta = \varepsilon D_r^{-1} \leq \varepsilon$ où D_r est une constante du lemme 5.6 valable pour tous les V_i. Choisissons un entier n_0 suffisamment grand pour que les éléments $h_j := g_j h_0^{n_0} g_j^{-1}$ soient (r,η)-loxodromiques. On prend alors $F = \{h = h_j h_k \ /\ 1 \leq j,k \leq t\}$. On note $b^\varepsilon_{i,j}$ et $B^\varepsilon_{i,j}$ pour $b^\varepsilon_{\rho_i(h_j)}$ et $B^\varepsilon_{\rho_i(h_j)}$.

Pour tout g dans Γ, on peut choisir j tel que, pour tout i, $\delta(x^+_{i,j}, Y_{\rho_i(g)}) > 6r$, puis k tel que $\delta(g(x^+_{i,j}), X^<_{i,k}) > 6r$. On a alors les inclusions:

$$gh_jh_k(B^\varepsilon_{i,k}) \subset gh_j(b^\eta_{i,k}) \subset gh_j(B^\eta_{i,j}) \subset g(b^\eta_{i,j}) \subset b(g(x^+_{i,j}),\varepsilon)$$

et la restriction de gh_jh_k à $B^\varepsilon_{i,k}$ est ε-Lipschitzienne. Le lemme 5.2 prouve alors que gh_jh_k est $(2r,2\varepsilon)$-loxodromique. $\diamondsuit$

6.5 Valeurs propres et valeurs singulières

La proposition suivante prouve que l'ensemble $\log \mu(\Gamma)$ reste à distance finie de ℓ_Γ. Cette assertion, jointe au corollaire 6.8, prouve le point a) du théorème 6.4: ℓ_Γ est bien le cône asymptote à $\log \mu(\Gamma)$

Proposition 6.13 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors il existe un compact M de A_G tel que $\mu(\Gamma) \subset \lambda(\Gamma)M$*

Démonstration Fixons $0 < r \leq \varepsilon$ et F une partie finie de Γ comme dans la proposition 6.12. On peut supposer que $F = F^{-1}$.

Il suffit de montrer que lorsque g est dans Γ et h dans F de sorte que gh est (r, ε)-loxodromique, alors le quotient $\dfrac{\mu(g)}{\lambda(gh)}$ reste dans un compact M de A_G.

D'après le lemme 6.3, il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que les quotients $\dfrac{\|\rho_i(g)\|}{\lambda_1(\rho_i(gh))}$ restent dans l'intervalle $[C^{-1}, C]$. Notons $C_1 = \sup_{h\in F} \|\rho_i(h)\|$ et $C_2 = c_{r,\varepsilon}^{-1}$ la constante du lemme 5.4. Les quotients $\dfrac{\|\rho_i(g)\|}{\|\rho_i(gh)\|}$ restent dans l'intervalle $[C_1^{-1}, C_1]$. Les quotients $\dfrac{\|\rho_i(gh)\|}{\lambda_1(\rho_i(gh))}$ restent dans l'intervalle $[C_2^{-1}, C_2]$. On peut donc prendre $C = C_1 C_2$. $\diamondsuit$

Pour tout élément g de G, on note ℓ_g le cône limite du semigroupe qu'il engendre: si $\lambda(g) \neq 1$, ℓ_g est la demidroite de $\mathfrak{a}^+$ portée par $\log \lambda(g)$, sinon ℓ_g est nul.

Corollaire 6.14 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G, g un élément de Γ tel que $\ell_g \neq \{0\}$ et Ω un voisinage conique de ℓ_g dans $\mathfrak{a}^+$. Alors l'ensemble $\{h \in \Gamma \ / \ h \text{ est loxodromique et } \ell_h \subset \Omega \ \}$ est encore Zariski dense dans G.*

Démonstration a) Démontrons tout d'abord que cet ensemble E est non vide. Fixons $0 < r \leq \varepsilon$ et F une partie finie de Γ comme dans la proposition 6.12. Soit x un élément fixé de G: par exemple $x = e$! Choisissons f_n dans F tels que l'élément $g^n x f_n$ est (r, ε)-loxodromique, et montrons que la suite de demidroites $\ell_{g^n x f_n}$ converge vers ℓ_g. Cela résulte des trois assertions suivantes:

i) $\log \lambda(g^n x f_n) - \log \mu(g^n x f_n)$ reste borné car $g^n x f_n$ est (r, ε)-loxodromique (lemme 6.11).
ii) $\log \mu(g^n x f_n) - \log \mu(g^n)$ reste borné car $x f_n$ reste dans un compact (lemme 6.9).
iii) $\frac{1}{n} \log \mu(g^n)$ converge vers $\lambda(g)$ (lemme 6.8).

b) Montrons maintenant que E est Zariski dense. Soit $\overline{E}$ son adhérence de Zariski. On vient de voir que, pour tout x dans G, et $n \gg 0$, l'élément $g^n x$ est dans le fermé de Zariski $\overline{E}F^{-1}$. Le lemme 4.2 prouve alors que $x \in \overline{E}F^{-1}$. Donc $\overline{E}F^{-1} = G$, puis $\overline{E} = G$ par Zariski connexité de G. $\diamondsuit$

6.6 Groupes et Semigroupes (r,ε)-Schottky

L'intérêt des semigroupes (r,ε)-Schottky est que, d'une part, il est facile d'en construire dans tous les semigroupes Zariski denses (lemme 6.20) et que, d'autre part, on controle avec une bonne précision la projection de Cartan d'un tel semigroupe (proposition 6.16).

L'intérêt des groupes (r,ε)-Schottky est d'être une source d'exemples de sous-groupes Zariski denses dans G.

Définition 6.15 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, $0 < \varepsilon \leq r$ et $l \geq 2$. Soient $g_0, \dots, g_l$ des éléments loxodromiques de G vérifiant $g_0 = g_l$. On suppose que $x^+_{\rho_i(g_j)} \notin X^<_{\rho_i(g_{j-1})}$ pour $j = 1, \dots, l$ et $i = 1, \dots, r$. On note alors $\nu = \nu(g_0, \dots, g_l)$ l'élément de A_G tel que: $\chi_i(\nu) = \nu_1(\rho_i(g_0), \dots, \rho_i(g_l))$, pour $i = 1, \dots, r$.*

La proposition 5.7 et le lemme 6.6 donnent immédiatement:

Proposition 6.16 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe. Pour tout $0 < \varepsilon \leq r$ il existe des compacts $N_{r,\varepsilon}$ de A_G tels que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_{r,\varepsilon} = \{e\} \ \text{, pour tout } r > 0,$$

et, si $g_1, \dots, g_l$ sont des éléments (r,ε)-loxodromiques vérifiant, en notant $g_0 = g_l$,

$$\delta(x^+_{\rho_i(g_{j-1})}, X^<_{\rho_i(g_j)}) \geq 6r \ \text{ pour } \ j = 1, \dots, l \text{ et } i = 1, \dots, r \ .$$

Alors, pour tout $n_1, \dots, n_l \geq 1$, le produit $g = g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)$-loxodromique et on a

$$\frac{\lambda(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda(g_l)^{n_l} \cdots \lambda(g_1)^{n_1}} \in \nu(g_l, \dots, g_0) N^l_{r,\varepsilon} \ \text{ et}$$

$$\frac{\mu(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda(g_l)^{n_l} \cdots \lambda(g_1)^{n_1}} \in \nu(g_l, \dots, g_0) N^l_{r,\varepsilon} \ .$$

On a alors comme dans le lemme 5.9.

Corollaire 6.17 *Soient $g_1, \dots, g_l$ des éléments loxodromiques de G comme dans la définition 6.15. On a les égalités, en notant $g_0 = g_l$,:*

$$\lim \frac{\lambda(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda(g_l)^{n_l} \cdots \lambda(g_1)^{n_1}} = \lim \frac{\mu(g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1})}{\lambda(g_l)^{n_l} \cdots \lambda(g_1)^{n_1}} = \nu(g_l, \dots, g_0)$$

où ces limites sont prises quand les entiers n_j tendent tous vers $+\infty$

Démonstration Cela résulte de la proposition 6.16 et du fait que, on peut fixer r tel que pour tout ε, il existe un entier n_0 tel que pour $n_j \geq n_0$ les éléments $g_j^{n_j}$ vérifient les hypothèses de la proposition 6.16. $\diamondsuit$

Définition 6.18 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, $0 < \varepsilon \leq r$ et $t \geq 2$. On dit qu'un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de G de générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ est (r, ε)-Schottky si, pour tout i, le sous-semigroupe (resp. sous-groupe) $\rho_i(\Gamma)$ de $\mathrm{GL}(V_i)$ de générateurs $\rho_i(\gamma_1), \ldots, \rho_i(\gamma_t)$ est (r, ε)-Schottky dans $\mathbb{P}(V_i)$.*

Remarques - De nouveau, cette définition dépend du choix des représentations ρ_i , des normes sur V_i et des générateurs γ_j .

- La proposition précédente permet donc d'estimer l'image par les projections μ et λ des éléments w des semigroupes (r, ε)-Schottky (dans les groupes (r, ε)-Schottky, cette estimation n'est valable que pour les mots en les générateurs dont la première lettre n'est pas l'inverse de la dernière). En première approximation, tout se passe comme si λ était un morphisme de semigroupes de Γ dans A^+. Le terme correctif ν ne dépend que de la géométrie des lettres successives du mot w. Si on fixe r, l'erreur restante, qui tient compte de la dynamique de ces lettres, tend uniformément vers 0 avec ε.

Le corollaire suivant est une premier pas pour la démonstration de la convexité du cône limite d'un sous-semigroupe Zariski dense.

Corollaire 6.19 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe et Γ un sous-semigroupe (r,ε)-Schottky en les générateurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$, alors l'enveloppe convexe des demi-droites $\ell_{\gamma_1}, \ldots, \ell_{\gamma_t}$ est inclus dans ℓ_Γ.*

Démonstration. Comme le cône limite ℓ_Γ est fermé, il suffit de montrer que, pour tous entiers $n_1, \ldots, n_t \geq 1$ l'élément $n_1 \log \lambda(\gamma_1) + \cdots + n_t \log \lambda(\gamma_t)$ est dans L_Γ. Pour $m \geq 1$, on note $w_m := \gamma_t^{mn_t} \cdots \gamma_1^{mn_1}$. La proposition 6.16 prouve que

$$\begin{aligned} n_1 \log \lambda(\gamma_1) + \cdots + n_t \log \lambda(\gamma_t) &\in \frac{1}{m}\lambda(w_m) - \frac{1}{m}\log(\nu(\gamma_t, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)) - \frac{t}{m}\log(N_{r,\varepsilon}) \\ &\subset L_\Gamma - \frac{1}{m}\log(\nu(\gamma_t, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)) - \frac{t}{m}\log(N_{r,\varepsilon}) . \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $m \geq 1$, donc $n_1 \log \lambda(\gamma_1) + \cdots + n_t \log \lambda(\gamma_t)$ est dans ℓ_Γ. $\diamondsuit$

Remarque Notons Γ_m le semigroupe engendré par $\gamma_1^m, \ldots, \gamma_t^m$. Le même argument prouve que le cône limite ℓ_{Γ_m} converge vers l'enveloppe convexe des demidroites $\ell_{\gamma_1}, \ldots, \ell_{\gamma_t}$. C'est là le point de départ pour montrer que tout cône convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathfrak{a}^+$ est le cône limite d'un sous-semigroupe Zariski dense.

6.7 Convexité du cône limite

Dans cette partie, on utilise les semigroupes (r, ε)-Schottky pour montrer la convexité du cône limite ℓ_Γ.

Lemme 6.20 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, Γ un sous-semigroupe (resp. un sous-groupe) Zariski dense de G. Soient $\ell_1, \ldots, \ell_t$ des demidroites du cône* *limite ℓ_Γ. Alors, il existe $r > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq r$, on peut choisir des éléments loxodromiques $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ de Γ tels que ℓ_{γ_j} est aussi proche de ℓ_j que l'on veut et qui engendrent un sous-semigroupe (resp. un sous-groupe) (r, ε)-Schottky Γ'.*

Remarque Avec un peu plus d'effort, on peut choisir Γ' Zariski dense dans G

Démonstration pour les semigroupes (la démonstration pour les groupes est analogue). On peut grace au lemme 6.13, choisir des éléments loxodromiques δ_j de Γ tels que $\ell_{\delta_j} = \ell_j$.

Par Zariski connexité de Γ et irréductibilité des représentations ρ_i, on peut choisir, par récurrence sur t, des éléments g_j dans Γ tels que, en posant $\gamma'_j = g_j \delta_j g_j^{-1}$, on ait $x^+_{\rho_i(\gamma'_j)} \notin X^<_{\rho_i(\gamma'_k)}$, pour tout $1 \leq j, k \leq t$ et $1 \leq i \leq r$. On choisit alors $r > 0$ tel que $\delta(x^+_{\rho_i(\gamma'_j)}, X^<_{\rho_i(\gamma'_k)}) \geq 6r$ pour $1 \leq j, k \leq t$ et $1 \leq i \leq r$. On prend alors pour γ_j une puissance suffisamment grande de γ'_j qui est (r, ε)-loxodromique. $\diamondsuit$

Démonstration de la convexité du cône limite On reprend les notations du théorème 6.4. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux demidroites de ℓ_Γ. D'après la proposition 6.20, on peut trouver un sous-semigroupe Γ' (r,ε)-Schottky de générateurs γ_1,γ_2 dans Γ tel que les demidroites ℓ_{γ_1} et ℓ_{γ_2} sont arbitrairement proches de ℓ_1 et ℓ_2. D'après le corollaire 6.19, l'enveloppe convexe de ℓ_{γ_1} et ℓ_{γ_2} est inclus dans ℓ_Γ. Comme ℓ_Γ est fermé, l'enveloppe convexe de ℓ_1 et ℓ_2 est aussi incluse dans ℓ_Γ. Donc ℓ_Γ est convexe. $\diamondsuit$

7 L'intérieur du cône limite

Ce chapitre est entièrement consacrée à la démonstration de la dernière assertion du théorème 6.4: le cône limite ℓ_Γ est d'intérieur non vide. L'idée de la démonstration consiste à se ramener au cas d'un sous-semigroupe Γ de générateurs $(\gamma_j)_{1\leq j\leq s}$ inclus dans un sous-semigroupe ouvert H dont tous les éléments sont loxodromiques. On considère alors des semigroupes à un paramètre $\{\gamma_j(t)\ /\ t \geq 1\}$ que l'on peut supposer tracés dans H tels que $\gamma_j(1) = \gamma_j$. On montre d'une part, à l'aide des corps de Hardy (proposition 7.8), que le cône de Lyapounov ℓ_Δ du semigroupe Δ engendré par tous ces semigroupes à un paramètre est inclus dans l'espace vectoriel engendré par ℓ_Γ. D'autre part, un argument élémentaire prouve qu'un tel semigroupe Δ est d'intérieur non vide (lemme 7.2).

7.1 Semigroupes d'intérieur non vide

Commençons cette partie par un exercice:

Exercice 7.1 *Soit G un groupe linéaire réel simple connexe. Montrer qu'un sous-groupe Zariski dense Γ de G est discret ou dense.*

Indication: On montrera que l'algèbre de Lie de l'adhérence de Γ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Le lemme suivant est une sorte de généralisation de cet exercice pour les semigroupes.

Lemme 7.2 *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, $t \to \gamma_j^t$, pour $j = 1,\ldots,s$, des groupes à un paramètre de G et H le semigroupe engendré par (γ_j^t pour t dans $[1,\infty[$ et $j = 1,\ldots,s$. On suppose que H est Zariski dense dans G, alors H est d'intérieur non vide.*

Démonstration. Pour h dans H, on note C_h le cône de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G donné par: $C_h = \{X \in \mathfrak{g}\ /\ \exists\gamma \in C^1([0,1[,G)\ /\ \gamma_0 = e\ ,\ \frac{d}{dt}\gamma_t|_{t=0} = X \text{ et } \forall t \in [0,1]\ ,\ \gamma_t h \in H\}$.

Il est clair que C_h est un cône. D'autre part, on a l'inclusion
$C_h + \mathrm{Ad}h(C_{h'}) \subset C_{hh'}\ \ \forall h, h' \in H$

Il suffit pour montrer cela de considérer le chemin dans H: $\gamma_t h\gamma'_t h' = \gamma_t(h\gamma'_t h^{-1})hh'$.

Soit W l'espace vectoriel engendré par les cônes C_h. Montrons que $W = \mathfrak{g}$. Il résulte de l'inclusion ci-dessus que l'espace W est $\mathrm{Ad}H$-invariant. Comme $\mathrm{Ad}H$ est Zariski dense dans $\mathrm{Ad}G$, W est un idéal de $\mathfrak{g}$. En outre, les générateurs X_j des groupes à un paramètre $\gamma_j(t)$ sont dans W. Donc H est inclus dans le groupe de Lie connexe I d'algèbre de Lie W. Donc I est Zariski dense dans G et $W = \mathfrak{g}$.

Choisissons maintenant des éléments h_i dans H et X_i dans C_{h_i}, pour $i = 1,\ldots,n$, avec n le plus grand possible, tel que, en posant $k_0 = 1,\ldots,k_i = h_1\cdots h_i,\ldots$ la famille $(Y_i := \mathrm{Ad}k_{i-1}(X_i))_{1\leq i\leq n}$ est libre. Cette famille $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{g}$. Sinon on pourrait trouver h_{n+1} dans H et X_{n+1} dans C_h tel que $\mathrm{Ad}k_n^{-1}(X_{n+1})$ n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $Y_1,\ldots,Y_n$. Ce qui contredit la maximalité de n.

On note $t \to \gamma_{i,t}$ des chemins tangents à X_i pour $t = 0$ tels que $\gamma_{i,t}h_i$ est dans H et on pose $\gamma'_{i,t} := k_{i-1}\gamma_{i,t}k_{i-1}^{-1}$. L'application ψ de $[0,1]^n$dans G donnée par $\psi(t_1, \ldots, t_n) = \gamma'_{1,t} \cdots \gamma'_{n,t}h_1 \cdots h_n = \gamma_{1,t}h_1 \cdots \gamma_{n,t}h_n$ a son image dans H. Sa différentielle en 0 est bijective car $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{g}$. Le théorème d'inversion locale prouve alors que $\psi(]0,1[^n)$ contient un ouvert. Donc H est d'intérieur non vide. $\diamondsuit$

7.2 Semigroupes ouverts

Les deux lemmes ci-dessous permettent de ramener la démonstration cherchée à une situation plus simple.

Lemme 7.3 *Soit Γ un sous-groupe Zariski dense d'un groupe linéaire réel semisimple connexe G. Alors il existe une famille finie $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ d'éléments de Γ tels que, pour tout $n \geq 1$ le sous-groupe Γ_n engendré par $\gamma_1^n, \ldots, \gamma_l^n$ est encore Zariski dense.*

Démonstration C'est un exercice, il suffit de recopier la démonstration du corollaire 2.11: on choisit les γ_j de sorte que le groupe engendré par chacun d'eux est Zariski connexes et que le groupe engendré par tous ceux-ci est le groupe R réunion des composantes Zariski connexes des adhérences de Zariski des sous-groupes de type fini de Γ. Par construction R est distingué et par la proposition 2.9 le quotient G/R est abélien. Donc $G = R$. $\diamondsuit$

Pour énoncer le second lemme, quelques notations sont nécessaires. Soit Γ notre sous-semigroupe Zariski dense de notre groupe linéaire réel semisimple connexe G. Choisissons un élément g_0 loxodromique de Γ (théorème 4.14). On peut quitte à conjuguer g_0 supposer que la composante hyperbolique de g_0 est un élément de l'intérieur de A^+ que l'on note a_0. Notons, comme d'habitude, x_i^+ l'attracteur de $\rho_i(g_0)$ dans $X_i := \mathbb{P}(V_i)$, $V_i^<$ le supplémentaire g_0-invariant, $X_i^< := \mathbb{P}(V_i^<)$. On fixe $0 < \varepsilon \leq r$ tel que $6r \leq \inf_i \delta(x_i^+, X_i^<)$ et on pose $b_i^\varepsilon = \{x \in X_i \ / \ d(x, x_i^+) \leq \varepsilon\}$ et $B_i^\varepsilon = \{x \in X_i \ / \ \delta(x, X_i^<) \geq \varepsilon\}$. Notons $G^\varepsilon = G_{g_0}^\varepsilon := \{g \in G \ / \ \forall i \ g(B_i^{\varepsilon'}) \subset b_i^{\varepsilon'}$ et $g|_{B_i^{\varepsilon'}}$ est ε'-Lipschitzien pour un $\varepsilon' < \varepsilon$ $\}$.

Lemme 7.4 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe.*

a) Le semigroupe G^ε est ouvert et est $(2r, 2\varepsilon)$-Schottky. Tous ses éléments sont loxodromiques.

b) Le semigroupe $\Gamma^\varepsilon := G^\varepsilon \cap \Gamma$ est encore Zariski dense.

Démonstration a) Cela résulte des définitions et du critère 5.2.

b) Soit h un élément de Γ tel que $h(x_i^+) \notin V_i^<$. Pour $n \gg 0$, l'élément $g_0^n h g_0^n$ est dans Γ^ε. Le lemme 4.2 prouve alors que h est dans l'adhérence de Zariski de Γ^ε. Donc Γ^ε est Zariski dense dans G. $\diamondsuit$

7.3 L'intérieur du cône ℓ_Γ

Démonstration de l'assertion:"ℓ_Γ est d'intérieur non vide"

Grâce au lemme 7.4, on peut supposer que Γ est inclus dans un sous-semigroupe ouvert G^ε dont tous les éléments sont loxodromiques.

On peut aussi supposer que Γ est engendré par une famille finie d'éléments $(\gamma_j)_{1\leq j\leq s}$ comme dans le lemme 7.3. Remarquons que chaque élément γ_j est semisimple et notons $\gamma_j = m_j a_j = a_j m_j$ la décomposition de Jordan de γ_j avec m_j elliptique et a_j hyperbolique. On note a_j^t le groupe à un paramètre d'éléments hyperboliques qui vérifient $a_j^1 = a_j$.

Lorsque $G = \mathrm{SL}(m,\mathbb{R})$,la démonstration se simplifie un peu car $a_j = \gamma_j$ et $m_j = 1$: les cinq lignes qui suivent sont donc inutiles. D'après le lemme 4.5, l'adhérence du semigroupe engendré par m_j est un groupe compact M_j. Quitte à remplacer γ_j par une puissance, on peut supposer M_j connexe. On note m_j^t un groupe à un paramètre d'éléments de M_j tel que $m_j^1 = m_j$ et on note $\gamma_j^t = m_j^t a_j^t = a_j^t m_j^t$.

Comme ℓ_Γ est convexe, pour montrer que ℓ_Γ est d'intérieur non vide, il suffit de montrer que toute forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ nulle sur ℓ_Γ est identiquement nulle. Soient donc $\beta_1,\ldots,\beta_r$ des réels tels que, pour tout γ dans Γ, on a $\prod_{i=1}^r \lambda_1(\rho_i(\gamma))^{\beta_i} = 1$. Et montrons que $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$.

Notons Δ le sous-semigroupe de G^ε engendré par tous les éléments γ_j^t avec $j = 1,\ldots,s$ et $t \geq 1$. Ce semigroupe Δ contient Γ. Notons $\phi_1,\ldots,\phi_r : G^\varepsilon \to \mathbb{R}$ et $\Phi : G^\varepsilon \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $\phi_i(h) = \lambda_1(\rho_i(h))$ et $\Phi(h) = \phi_1(h)^{\beta_1}\cdots\phi_r(h)^{\beta_r} - 1$. Φ est une fonction analytique nulle sur Γ.

Montrons que Φ est nulle sur Δ. Soient $g_1\cdots g_p \in \Delta$ un mot tel que, pour tout l, g_l est de la forme γ_j^t. On veut montrer que $\Phi(g_1\cdots g_p) = 0$. Cela résulte d'un raisonnement par récurrence sur le nombre d'indices l tels que g_l n'est pas de la forme γ_j^n, avec n entier, a l'aide du lemme ci dessous. Donc Φ est nulle sur Δ. Mais Δ est d'intérieur non vide (lemme 7.2) donc $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. C'est ce que l'on voulait. $\diamondsuit$

Lemme 7.5 *Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe et G^ε un sous-semigroupe ouvert de G dont tout élément est loxodromique et Φ la fonction définie ci-dessus. Soient γ^t un groupe à un paramètre qui prend ses valeurs dans G^ε pour $t \geq 1$ et h_1, h_2 des éléments de $G^\varepsilon \cup \{1\}$. On suppose que pour tout entier $t \geq 1$, on a l'égalité $\Phi(h_1\gamma^t h_2) = 0$.*

Alors, cette égalité est encore vraie pour tout réel $t \geq 1$.

Démonstration pour G = SL(m,ℝ) Posons, pour $1 \leq i \leq r$, $\psi_i(t) = \lambda_1(\rho_i(h_1\gamma^t h_2))$ et $\Psi(t) = \psi_1(t)^{\beta_1}\cdots\psi_r(t)^{\beta_r} - 1$. D'après la proposition 7.8, il existe un corps de Hardy contenant les germes en $+\infty$ des fonctions ψ_i et de Ψ. En effet, $\psi_i(t)$ est une solution de l'équation en X $\det(\rho_i(h_1\gamma^t h_2)^2 - X^2) = 0$ dont les coefficients sont des polynômes en t et en des exponentielles $e^{\kappa t}$ où les coefficients κ sont des réels. En particulier, Ψ est nulle, car elle a une infinité de zéros . $\diamondsuit$

La démonstration du lemme 7.5 dans le cas général est basée sur le lemme suivant

Lemme 7.6 *Soient M une variété analytique réelle, $\psi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique, $Z = \psi^{-1}(0)$ et $p : Z \to M$ la restriction à Z de la première projection. On* *suppose que, pour tout m dans M, $p^{-1}(m)$ est fini, alors il existe un ouvert non vide U de M tel que $p^{-1}(\overline{U})$ est compact.*

Démonstration. On peut supposer que Z et M sont lisses. Soient $Z' := \{z \in Z \ / \ dp(z)$ est surjective $\}$ et $Z'' := Z - Z'$. L'image $p(Z'')$ est au moins de codimension 1 dans M. Quitte à réduire M, on peut supposer que Z'' est vide, c'est à dire que p est un difféomorphisme local.

On suppose, par l'absurde, la conclusion fausse. On construit alors par récurrence une suite infinie $(C_n)_{n\geq 1}$ de compacts de Z disjoints et d'intérieur non vide tels que la restriction de p à C_n est injective et tels que la suite de compacts images $K_n := p(C_n)$ est décroissante; c'est possible car, comme $p^{-1}(K_n)$ n'est pas compact, on peut choisir pour C_{n+1} un petit voisinage d'un point de l'intérieur de $p^{-1}(K_n)$ qui n'est pas dans $C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Soit m un point dans l'intersection des compacts K_n, la fibre $p^{-1}(m)$ est infinie. Contradiction. $\diamondsuit$

Démonstration du lemme 7.5 C'est la même que pour $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ avec une complication technique provenant de la partie elliptique de γ qui empèche la fonction $t \to \lambda_1(\gamma^t)$ d'être dans un corps de Hardy.

On peut écrire $\gamma^t = m^t a^t$ avec m^t elliptique et a^t hyperbolique. Notons M le groupe compact adhérence du semigroupe $\{m^t \ / \ t \geq 1\}$. Quitte à remplacer γ par une puissance, on peut supposer que, pour tout $t \geq 1$, Ma^t est inclus dans G^ε.

Remarquons que M est un groupe compact et donc, par le lemme 4.5, un fermé de Zariski de G. Notons $Z := \{(m', t) \in M \times [1, \infty[\ / \ \Phi(h_1 m' a^t h_2) = 0 \ \}$ et $p : Z \to M$ la première projection.

Vérifions tout d'abord que, pour tout m_o dans M, $p^{-1}(m_o)$ égale $m_o \times [1, \infty[$ ou est fini. Pour cela, notons $\psi_1, \ldots, \psi_r : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\Psi : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $\psi_i(t) = \lambda_1(\rho_i(h_1 m_o a^t h_2))$ et $\Psi(t) = \Phi(h_1 m_o a^t h_2) = \prod_{i=1}^r \psi_i(t)^{\beta_i} - 1$. D'après la proposition 7.2, il existe un corps de Hardy contenant les germes en $+\infty$ des fonctions ψ_i et de Ψ. En effet, $\psi_i(t)$ est une solution de l'équation en X $\det(\rho_i(h_1 m_o a^t h_2)^2 - X^2) = 0$ dont les coefficients sont des polynômes en t et en des exponentielles $e^{\kappa t}$ où les coefficients κ sont des réels. En particulier, si Ψ est non nulle, elle n'a qu'un nombre fini de zéros i.e. $p^{-1}(m_o)$ est fini. C'est ce que l'on voulait.

Supposons par l'absurde que $Z \neq M \times [1, \infty[$. On peut alors trouver un ouvert non vide U de M tel que, pour tout m_o dans U, $m_o \times [1, \infty[$ n'est pas inclus dans Z. Donc d'après ce qui précède $p^{-1}(m_o)$ est fini. Le lemme 7.3 permet de choisir U tel que $p^{-1}(\overline{U})$ est compact. Mais la suite S des entiers n tels que m^n est dans U est infinie. Par hypothèse, pour $n \geq 1$, on a $\Phi(h_1 m^n a^n h_2) = 0$. Donc, pour n dans S, (m^n, n) est dans $p^{-1}(\overline{U})$. Ceci contredit la compacité de $p^{-1}(\overline{U})$. Donc $Z = M \times [1, \infty[$. Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

7.4 Rappels sur les corps de Hardy

Le but de cette section est de démontrer les principales propriétés des corps de Hardy dont nous avons eu besoin dans la section 7.3.

Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des germes en $+\infty$ de fonctions $x \to y(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. $\mathcal{A}$ est donc l'ensemble des fonctions C^∞ réelles définies sur une demidroite $[x_0, \infty[$ modulo l'équivalence qui consiste à identifier deux fonctions égales sur une demidroite $[x_1, \infty[$. Pour tout élément y de $\mathcal{A}$, on note $y' = \frac{dy}{dx}$ l'élément de $\mathcal{A}$ dérivé de y.

Définition 7.7 *Un corps de Hardy est un sous-corps stable par dérivation de l'anneau $\mathcal{A}$.*

L'intérêt des corps de Hardy est qu'une fonction non nulle y d'un corps de Hardy ne s'annule pas pour $x \gg 0$ (car la fonction $\frac{1}{y}$ doit être C^∞ au voisinage de $+\infty$). En particulier y a un signe constant au voisinage de $+\infty$. Les corps de Hardy sont des corps réels ordonnés qui ont été introduits en vue de l'étude des développements asymptotiques. Le corps $\mathbb{R}$ des fonctions constantes et le corps $\mathbb{R}(x)$ des fonctions rationnelles sont des corps de Hardy. Il y en a beaucoup d'autres car toute solution d'une équation polynomiale (resp. d'une équation différentielle polynomiale du premier ordre) à coefficients dans un corps de Hardy est encore dans un corps de Hardy. Plus précisément:

Proposition 7.8 *Soient k un corps de Hardy, $P \in k[Y]$ un polynôme à coefficients dans k et y un élément de $\mathcal{A}$*
a) On suppose que $P(y) = 0$ alors il existe un corps de Hardy K contenant k et y.
b) On suppose que $y' = P(y)$ alors il existe un corps de Hardy K contenant k et y.

En particulier, si K est un corps de Hardy et f un élément non nul de k, il existe un corps de Hardy K contenant k, $e^{|f|}$, $\log|f|$ ainsi que $|f|^\alpha$ pour tout réel α... ce qui correspond aux équations $y' = f'y$, $y' = \frac{f'}{f}$ et $y' = \alpha\frac{f'}{f}y$

Démonstration de l'assertion a) Soit $P = \sum_i a_i Y^i$ un polynôme non nul de degré minimal tel que $P(y) = 0$. Montrons que P est irréductible. Remarquons tout d'abord que P n'est pas une puissance Q^n d'un polynôme Q de $k[Y]$ car on aurait aussi $Q(y) = 0$. Si P n'est pas irréductible, on peut donc écrire $P = P_1P_2$ avec P_1 et P_2 premiers entre eux dans $k[Y]$. On peut donc trouver A_1 et A_2 dans $k[Y]$ tels que $A_1P_1 + A_2P_2 = 1$. Les égalités $P_1(y)P_2(y) = 0$, $A_1(y)P_1(y) + A_2(y)P_2(y) = 1$ et la connexité des demidroites assure que $P_1(y)$ ou $P_2(y)$ est nul. Contradiction.

Donc P est irréductible et le sous-anneau $k[y]$ de $\mathcal{A}$ est un corps isomorphe à $k[Y]/k[Y]P$. Il reste à montrer que $k[y]$ est stable par dérivation. Il suffit pour cela de vérifier que la dérivée y' est dans $k[y]$; En dérivant l'égalité $P(y) = 0$, on obtient l'égalité $P'(y)y' + \sum_i a_i' y^i = 0$. Par minimalité de P, l'élément $P'(y)$ du corps $k[y]$ est non nul et donc est inversible. Donc y' est dans $k[y]$. $\diamondsuit$

Pour démontrer l'assertion b), nous aurons besoin du lemme:

Lemme 7.9 *Soit k un corps de Hardy et K l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui annulent un polynôme non nul de $k[Y]$. Alors K est un corps de Hardy et le corps $K[\sqrt{-1}]$ est algébriquement clos.*

Démonstration Pour tout y, z dans K, il résulte directement de l'assertion a) que les anneaux $k[y]$ et $k[y,z] = (k[y])[z]$ sont des corps de Hardy et des extensions finies de k. Ils sont donc inclus dans K. Et K est un corps de Hardy.

Notons $\mathcal{B} = \mathcal{A}[\sqrt{-1}]$ l'anneau des germes en $+\infty$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Le corps $L = K[\sqrt{-1}]$ s'identifie à un sous-corps de $\mathcal{B}$.

Il suffit de montrer que tout polynôme irréductible $P = \sum_i a_i Y^i$ de degré n de $k[Y]$ a n racines distinctes dans L. Pour $x \gg 0$, notons P_x le polynôme de $\mathbb{R}[Y]$ $P_x = \sum_i a_i(x) Y^i$ et P'_x son polynôme dérivé. Comme P et P' sont premiers entre eux, il existe une combinaison linéaire de P et P' à coefficients dans $k[Y]$ qui est égale à 1. Donc pour $x \gg 0$, P_x et P'_x n'ont pas de zéros communs. Notons $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ les n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ du polynôme P_x. Par le théorème des fonctions implicites, ces fonctions sont localement de classe C^∞. Un intervalle maximal sur lequel ces n fonctions sont définies et de classe C^∞ est forcément de la forme $]x_0, \infty[$. Ces n fonctions sont donc n éléments distincts de $\mathcal{B}$.

Pour finir, il suffit de vérifier que tout élément z de $\mathcal{B}$ qui annule un polynôme non nul de $k[Y]$ est dans L. Cela résulte de ce que le complexe conjugué $\overline{z}$ annule aussi un tel polynôme. Les arguments du a), prouvent alors que l'anneau $k[z, \overline{z}]$ est une extension finie de k et donc que les parties réelles et imaginaires de z sont dans K. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition 7.8 b) On peut supposer que l'élément y n'annule aucun polynôme de $k[Y]$. Le point délicat est de montrer que, pour tout polynôme non nul Q dans $k[Y]$, le germe $Q(y)$ ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. Tout élément non nul de $k[y]$ aura alors un inverse dans $\mathcal{A}$, les éléments non nuls de $k[y]$ et leurs inverses engendreront un sous-corps $k(y)$ de $\mathcal{A}$ isomorphe au corps $k(Y)$ des fractions rationnelles et $k(y)$ sera un corps de Hardy.

Le lemme 7.9 permet de supposer que k est un corps de Hardy tel que $k[\sqrt{-1}]$ est algébriquement clos. On peut aussi supposer que le polynôme Q est irréductible dans $k[Y]$ et de coefficient dominant 1. Le polynôme Q est donc de degré 2 ou 1. Si Q est de degré 2, son discriminant Δ est un élément strictement négatif de k, on a $Q(y) \geq -\Delta/4 > 0$. Si Q est de degré 1, quitte à remplacer y par $y - a$ avec a dans k, on peut supposer $Q(Y) = Y$.

Il reste à montrer que y ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. Si $P(0) = 0$, notre assertion résulte de l'unicité des solutions de l'équation différentielle $y' = P(y)$ qui admet 0 comme solution. Si $P(0) \neq 0$, on peut se placer sur un intervale $]x_0, \infty[$ sur lequel $P(0)$ a un signe constant. Supposons par l'absurde que y s'annule en deux points $x_1 < x_2$. On peut supposer ces deux points choisis de sorte que y ait un signe constant sur l'intervalle $]x_1, x_2[$. Mais alors $y'(x_1) = P(0)(x_1)$ et $y'(x_2) = P(0)(x_2)$ ont le même signe. Contradiction. $\diamondsuit$

8 Sous-groupes discrets

Ce chapitre est formée de trois parties chacune d'elle étant une motivation pour étudier les sous-groupes discrets des groupes semisimples.

Nous commençons par une liste d'exemples de sous-groupes discrets Zariski denses des groupes semisimples.

Nous donnons ensuite un critère pour qu'un sous-groupe discret d'un groupe semisimple G agisse proprement sur un espace homogène G/H. La projection de Cartan $\mu(\Gamma)$ joue un rôle central dans ce critère.

Nous étudions ensuite dans quelle mesure la projection des sous-groupes discrets d'un groupe de Lie dans une composante de Levi est encore discrète (théorème 8.2). Cette étude est utile pour comprendre la structure des variétés affines plates complètes.

8.1 Exemples de sous-groupes Zariski denses

Soit G un groupe linéaire réel semisimple connexe. Il y a de nombreux sous-groupes discrets Zariski denses dans G. Certains apparaissent parfois naturellement dans des problèmes de géométrie. Par exemple comme dans [7] ou dans [3]. D'autres sont obtenus par des constructions ad hoc. En voici quelques exemples. Il en existe beaucoup d'autres.

Il est souvent assez facile de vérifier qu'un sous-groupe donné est Zariski dense. Ce qui est un peu plus délicat est de vérifier qu'il est discret

Notons K un sous-groupe compact maximal, A_G un sous-espace de Cartan, $\mathrm{ncd}(G) := \dim(G/K)$ la "dimension non compacte" de G et $r(G) := \dim(A_G)$ le rang réel de G.

Les réseaux Ce sont les sous-groupes discrets Γ tels que $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G) < \infty$. Ils sont Zariski denses si G n'a pas de sous-groupe distingué infini compact (théorème de densité de Borel, voir par exemple [45]). Ce sont les "plus gros" au sens suivant: la dimension cohomologique d'un sous groupe discret sans torsion est majorée par $\mathrm{ncd}(G)$ avec égalité si et seulement si Γ est cocompact i.e. $\Gamma\backslash G$ est compact (voir [38]). La dimension cohomologique des réseaux sans torsion est minorée par $\mathrm{ncd}(G) - r(G)$. Il est raisonnable de conjecturer que, réciproquement, lorsque $r(G) \geq 2$, tout sous groupe discret de G vérifiant cette minoration est un réseau de G.

Les groupes de Schottky Ces sous-groupes libres sont les vedettes de ce cours. Ils sont souvent Zariski denses. Ce sont les plus petits au sens suivant. Tout sous-groupe Zariski dense de G contient un sous-groupe (r, ε)-Schottky qui est encore Zariski dense (voir par exemple [5]).

Les π_1 de surfaces compactes Les images des morphismes dans G des groupes fondamentaux des surfaces compactes de genre supérieur ou égal à 2 sont parfois des groupes discrets Zariski denses (voir [23]).

Les groupes de Coxeter Les images des groupes de Coxeter dans leur représentation géométrique de Tits préservent une forme bilinéaire b (voir [12]). Ils sont discrets et souvent Zariski denses dans le groupe orthogonal de b

Les sous-groupes des réseaux Soit Γ un réseau cocompact sans torsion du sous-groupe $H = \mathrm{SO}(m-1,1)$. On suppose que Γ est le produit amalgamé $\Gamma = \Gamma_1 \star_{\Gamma_0} \Gamma_2$ de deux sous-groupes propres Γ_1 et Γ_2 sur leur intersection Γ_0 , que Γ_0 est d'indice infini dans Γ_1 et Γ_2 , et que Γ_0 est un réseau cocompact du groupe $H_0 = \mathrm{SO}(m-2,1)$.

Géométriquement, cette situation se produit lorsque la variété hyperbolique compacte quotient $M = \Gamma\backslash H/(K \cap H)$ contient une hypersurface totalement géodésique compacte connexe $M_0 = \Gamma_0\backslash H_0/(K \cap H_0)$ qui sépare M en deux composantes connexes.

Les groupes Γ_1 et Γ_2 sont alors discrets et Zariski denses dans H (remarquer que H_0 est un sous-groupe Zariski connexe maximal de H). Un tel réseau Γ existe: voir par exemple [19] pour une construction explicite. On peut vérifier que Γ_1 et Γ_2 on pour dimension cohomologique $m-2 = \mathrm{ncd}(H) - 1$.

Les déformations de réseaux Soient $m \geq 2$, $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$, $K = \mathrm{SO}(m)$ et reprenons les notations de l'exemple précédent. Par le théorème de rigidité de Mostow, il est impossible de déformer Γ dans le groupe H dès que $n \geq 3$. Comme l'ont expliqué Johnson et Millson dans [24], il est par contre facile de construire une famille à un paramètre de représentations ρ_t de Γ dans G telle que ρ_0 est l'injection naturelle et telle que les images $\Gamma_t = \rho_t(\Gamma)$ sont des sous-groupes Zariski denses de G pour $t \neq 0$. La remarque principale pour faire cette construction est que le centralisateur de H_0 dans G est de dimension supérieure ou égale à 1 (il est de dimension 2 pour $m = 3$ et de dimension 1 pour $m \geq 4$). On note $t \to c^t$ un sous-groupe à un paramètre de ce centralisateur: la matrice c^t est la matrice diagonale $c^t = \mathrm{diag}(e^t, \ldots, e^t, e^{-(m-1)t})$. La représentation ρ_t est définie par $\rho_t(\gamma_1) = \gamma_1$ pour γ_1 dans Γ_1 et $\rho_t(\gamma_2) = c^t \gamma_2 c^{-t}$ pour γ_2 dans Γ_2.

Le groupe Γ_t est Zariski dense dans G. En effet son adhérence de Zariski contient les groupes H et $c^t H c^{-t}$, elle est donc égale à G.

Le groupe Γ_t est discret. Ce fait est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$; il sera démontré par une méthode générale, pour t petit, dans le corollaire 10.16.

La dimension cohomologique de ces groupes Γ_t est bien sûr égale à $m-1$.

Une déformation comme ci-dessus ne peut pas être faite avec des sous-groupes H de rang réel supérieur ou égal à deux à cause du théorème de superrigidité de Margulis (voir [31] ou [45])

8.2 Quotient des espaces homogènes

Proposition 8.1 (Critère de propreté) *Soient G un groupe linéaire réel semisimple connexe, A_G un sous-espace de Cartan et μ une projection de Cartan. Soient Γ et H deux sous-groupes fermés de G.*

Alors Γ agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout compact M de A_G, l'ensemble $\mu(\Gamma) \cap \mu(H)M$ est compact.

Remarques - Les sous-groupes Γ et H jouent bien sûr des rôles symétriques dans ce critère.

- L'intérêt de ce critère est qu'il ne fait intervenir que le groupe A_G qui est commutatif. Le prix à payer est que les parties $\mu(\Gamma)$ et $\mu(H)$ ne sont pas des sous-groupes de A_G, mais la proposition 6.16 affirme que, lorsque Γ est (r, ε)-Schottky, $\mu(\Gamma)$ est "presque" un semigroupe! En outre, lorsque H est un sous-groupe réductif de G, on a l'égalité $\mu(H) = \mu(A_H)$ où A_H est un sous-espace de Cartan de H inclus dans A_G (un tel sous-espace de Cartan existe pour au moins un conjugué de H).

- Ce critère a une interprétation géométrique très simple. Munissons l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A_G d'une norme. Le critère est que Γ agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout $R > 0$, l'ensemble des points (X, Y) de $\log \mu(\Gamma) \times \log \mu(H)$ tels que $\|X - Y\| \leq R$ est compact. Autrement dit, les parties $\log \mu(\Gamma)$ *et* $\log \mu(H)$ *s'éloignent infiniment l'une de l'autre quand on s'approche de l'infini.*

Démonstration On a les équivalences: Γ agit proprement sur G/H
$\Longleftrightarrow$ Pour tout compact L de G , $\{\gamma \in \Gamma \ / \ \gamma LH \cap LH \neq \emptyset\}$ est compact
$\Longleftrightarrow$ Pour tout compact L de G , $\Gamma \cap LHL$ est compact
$\Longleftrightarrow$ Pour tout compact L de G , $\mu(\Gamma) \cap \mu(LHL)$ est compact
$\Longleftrightarrow$ Pour tout compact M de A_G , $\mu(\Gamma) \cap \mu(H)M$ est compact.
Cette dernière équivalence résultant du corollaire 6.9. $\diamondsuit$

On peut déduire de ce critère une condition nécessaire et suffisante simple sur un espace homogène G/H où H est un sous-groupe réductif connexe de G pour qu'il existe des sous-groupes libres Γ de G qui agissent proprement sur G/H. Pour $G/H = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(m-1, \mathbb{R})$ cette condition est "m pair". Si cette condition n'est pas satisfaite et que G/H n'est pas compact, alors il n'existe pas de sous-groupes discrets Γ qui agissent proprement sur G/H avec un quotient $\Gamma \backslash G/H$ compact (voir [4]). On peut consulter [28] pour des résultats antérieurs sur ce sujet.

Remarque Il existe d'autres façons d'étudier le comportement asymptotique des sous-groupes Zariski denses des groupes semisimples. Citons la thèse de P.Albuquerque sur les mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur.

8.3 Sous-groupes discrets et radical résoluble

Le but de cette partie est le théorème suivant qui permet d'associer à tout sous-groupe discret d'un groupe de Lie un sous-groupe discret Zariski dense dans un groupe semisimple.

Théorème 8.2 *Soient $m \geq 1$ et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Notons G l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, R le plus grand sous-groupe distingué résoluble connexe de G et $\pi : G \to G/R$ la projection naturelle.*

Alors $\pi(\Gamma)$ est un sous-groupe discret du groupe G/R.

Ce théorème résultera facilementdu théorème suivant:

Théorème 8.3 (Auslander) *Soient G un groupe de Lie, R un sous-groupe résoluble qui est fermé distingué et connexe, $\pi : G \to G/R$ la projection naturelle. Soit Γ un sous-groupe discret de G.*

Alors, le groupe $U = \overline{\pi(\Gamma)}_e$, composante connexe de l'adhérence de $\pi(\Gamma)$ est résoluble.

Démonstration du théorème 8.2 Gardons les notations du théorèmes 8.3 et notons S le groupe de Lie $S = G/R$. On veut montrer que le sous-groupe résoluble connexe U de S est réduit à l'élément neutre. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{u}$ les algèbres de Lie de G, R, S et U. Notons encore $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ la projection naturelle et notons $\mathfrak{h} := \pi^{-1}(\mathfrak{u})$.

Par construction, pour tout γ dans Γ, on a $\mathrm{Ad}\gamma(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Comme Γ est Zariski dense dans G, on a aussi, pour tout g dans G, $\mathrm{Ad}g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. On en déduit, en dérivant, que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Autrement dit $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Par suite $\mathfrak{u}$ est un idéal résoluble de l'algèbre de Lie semisimple $\mathfrak{s}$. Ce n'est possible que si $\mathfrak{u} = 0$. $\diamondsuit$

Pour démontrer le théorème 8.3 commençons par un lemme qui généralise le lemme 2.6

Lemme 8.4 *Soit G un groupe de Lie, N un sous-groupe de Lie nilpotent connexe distingué et fermé. Alors il existe un voisinage Ω de e dans G tel que $\Omega^{(2)} \subset \Omega$ et, pour tout compact K de l'ouvert ΩN, la suite d'ensembles $K^{(n)}$ converge vers $\{e\}$.*

Remarques - Par définition, l'ouvert ΩN est l'ouvert $\{g = hn \in G \ / \ h \in \Omega,\ n \in N\}$.
- La suite $(\Omega N)^{(n)}$ ne converge pas en générel vers $\{e\}$. Par exemple, si G est le groupe $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ des transformations affines de $\mathbb{R}^2$ et si N est le sous-groupe $\mathbb{R}^2$ des translations, tous les ouverts $(\Omega N)^{(n)}$ contiennent N. En effet, si h est dans G et n'admet pas 1 comme valeur propre, lorsque v décrit le sous-groupe $N = \mathbb{R}^2$, les commutateurs $hvh^{-1}v^{-1} = h(v) - v$ décrivent aussi tout $\mathbb{R}^2$.

Démonstration On peut supposer G connexe. Soient Z le centre de G, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie de G et N, et Ad l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent, il existe un drapeau $\mathfrak{g} = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_r = \{0\}$ défini par $F_1 = \mathfrak{g}$ et $F_i = \mathfrak{n}F_{i-1}$. Soit

$$P = \{p \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \ / \ \forall i \ p(F_i) \subset F_i \ \} \ \text{ et}$$
$$U = \{p \in P \ / \ \forall i \ p \text{ induit l'identité sur } F_i/F_{i+1} \ \} \ .$$

On a donc les inclusions $\mathrm{Ad}G \subset P$ et $\mathrm{Ad}N \subset U$. Choisissons un supplémentaire E_i à F_{i+1} dans F_i. On pose

$$L = \{g \in \mathrm{GL}(E) \ / \ \forall i \ g(E_i) \subset E_i \ \} \ ,$$

de sorte que G est le produit semidirect $P = L \times U$. Soit Ω_P un bon ouvert de P et Ω un bon ouvert de G tel que $\mathrm{Ad}(\Omega) \subset (L \cap \Omega_P) \times U$ (lemme 2.6).

Vérifions que cet ouvert Ω convient: soit K un compact de ΩN, montrons que pour tout voisinage compact ω de e dans G, on a l'inclusion $K^{(n)} \subset \omega$ pour $n \gg 0$.

Pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, on note d_λ l'élément du centre de L qui agit par multiplication par λ^i sur E_i. Pour tout élément u de U, on a $\lim_{\lambda \to 0} d_\lambda u d_\lambda^{-1} = e$. Donc, si λ est choisi suffisamment petit, le compact de P: $d_\lambda(\mathrm{Ad}K)d_\lambda^{-1}$ est inclus dans Ω_P. Donc, par le lemme 2.6, la suite $d_\lambda(\mathrm{Ad}K)^{(n)}d_\lambda^{-1}$ converge vers $\{e\}$ dans P, lorque n tend vers l'infini. La suite $\mathrm{Ad}(K^{(n)})$ aussi.

Donc, pour tout voisinage ω_1 de e dans G, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a l'inclusion $K^{(n)} \subset \omega_1 Z$. En particulier, il existe un compact C de G tel que, pour tout $n \geq 1$, on a $K^{(n)} \subset CZ$.

Pour toutes parties A, B de G, on note $(A, B) := \{aba^{-1}b^{-1} \ / \ a \in A \ , \ b \in B \ \}$. Par continuité, on peut choisir le voisinage ω_1 de e tel que $(\omega_1, C) \subset \omega$. On a alors, pour tout $n \geq 2n_0$, $K^{(n)} \subset (\omega_1 Z, CZ) = (\omega_1, C) \subset \omega$. C'est ce que l'on voulait. $\diamondsuit$

Démonstration du théorème 8.3 Distinguons deux cas:

1$^{\text{er}}$ cas: R est nilpotent

Soit $\Gamma_1 := \Gamma \cap \pi^{-1}(U)$. Par construction, le groupe $\pi(\Gamma_1)$ est dense dans U. Il s'agit donc de montrer que le groupe discret Γ_1 est résoluble. Soit Ω un voisinage ouvert de e dans G donné par le lemme 8.4 avec $N = R$. Remarquons que *tout sous-groupe dense d'un groupe de Lie connexe est engendré par son intersection avec n'importe quel voisinage de l'origine*. Cette assertion appliquée au groupe $\pi(\Gamma_1)$ prouve que la partie $E := \Gamma_1 \cap \Omega N$ engendre Γ_1. Comme Γ_1 est un groupe discret, le lemme 8.4 prouve que, pour toute partie finie F de E, il existe un entier n tel que $F^n = \{e\}$. Donc, par le lemme 2.7, tout sous-groupe de type fini de Γ_1 est nilpotent. Le lemme 2.11 prouve alors que Γ_1 est résoluble.

2$^{\text{ème}}$ cas: R est résoluble

Soit R' un sous-groupe abélien distingué connexe et fermé de G inclus dans R, $\pi' : G \to G/R'$ la projection et $U' := \overline{\pi'(\Gamma)}_e$. Le premier cas prouve que le groupe $R'' := \pi'^{-1}(U')$ est résoluble. Le groupe Γ est inclus dans le normalisateur G'' de R'' et, par construction, l'image Γ'' de Γ dans G/R'' est discrète. Un raisonnement par récurrence permet alors de conclure. $\diamondsuit$

Remarque On peut préciser le théorème 8.3 *lorsque R est nilpotent: le groupe $\Gamma_1 := \Gamma \cap \pi^{-1}(U)$ est alors nilpotent et U aussi.* C'est effectivement ce que nous avons montré dans la première partie de cette démonstration, si on utile le fait que *tout sous-groupe résoluble discret d'un groupe de Lie connexe est de type fini.* Nous n'aurons pas besoin de cette précision.

9 Variétés affines

Le but de cette partie est de donner quelques propriétés classiques des variétés affines plates dont nous aurons besoin dans le chapitre 10 sur les cônes convexes: existence du couple développante-holonomie (proposition 9.3) et théorème de l'holonomie (proposition 9.7).

9.1 (G,X)-variétés

Soit X une variété analytique réelle lisse connexe et G un groupe de Lie réel qui agit analytiquement et effectivement sur X. Définissons les espaces *localement modelés sur* X.

Définition 9.1 *Soit M une variété de classe C^∞. Une (G,X)-structure sur V est la donnée d'un atlas de cartes $\varphi_i : U_i \to X$ telles que*
i) les ouverts U_i recouvrent M,
ii) les applications φ_i sont des difféomorphismes C^∞ sur leur image,
iii) les changements de cartes $f_{j,i} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ sont localement donnés par des éléments de G i.e. pour tout x dans $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, il existe un élément g de G et un voisinage Ω de x tel que $f_{j,i}$ et g coïncident sur Ω.

Remarques - L'élément g est unique et l'égalité $g = f_{j,i}$ est valable sur toute la composante connexe de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ contenant x.
- On considère comme égales deux (G,X)-structures définies par des atlas dont la réunion est encore un atlas qui définit une (G,X)-structure... autrement dit une (G,X) structure c'est un atlas maximal vérifiant les propriétés ci-dessus.
- Les structures affines (plates) sont celles pour lesquelles G est le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$ des transformations affines de $X = \mathbb{R}^m$
- Les structures projectives (plates) sont celles pour lesquelles le groupe G est le groupe $\mathrm{SL}^{\pm}(\mathbb{R}^{m+1})$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^{m+1}$ de déterminant ± 1 que l'on regarde comme transformations projectives de la sphère $X = \mathbb{S}(\mathbb{R}^{m+1})$ des demidroites de $\mathbb{R}^{m+1}$.
- Ces deux (G,X)-structures seront les seules dont nous aurons besoin dans ce cours. Mais il en existe bien d'autres dignes d'intérêt: structures hyperboliques, structures conformes... et plus généralement toutes celles où X est un espace homogène sous G.
- On dira (G,X)-variété pour *variété munie d'une (G,X)-structure.* Par exemple, variété affine, variété projective...
- L'exemple le plus simple de (G,X)-variété est X lui-même!

Voici comment on peut voir ces objets. L'espace modèle X est une variété qui est munie d'une "structure géométrique" dont le groupe d'isométrie G est transitif. Cette "structure géométrique" peut être une métrique riemannienne, une connexion... On veut définir des variétés qui possèdent localement cette "structure géométrique". L'idée sous-jacente à la notion de (G,X)-variété est que la nature de cette "structure géométrique" importe peu. Ce qui compte c'est le groupe G et son action sur X. Ainsi toute construction "géométrique" que l'on peut faire sur X peut être menée localement sur M.

Par exemple le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$ préserve la notion de milieu, de ligne droite parcourue à vitesse constante, de parallélogrammes... ces notions existent donc localements sur nos variétés affines.

Définition 9.2 *Un morphisme de (G,X)-variétés $F : M \to W$ est une application C^∞ qui se lit localement dans les cartes des (G,X)-structures comme l'action d'un élément de G i.e. pour tout point v de M, il existe des cartes (U_i, φ_i) et (W_j, ψ_j) au voisinage de v et de $F(v)$ et un élément g de G tels que $\psi_j \circ F = g \circ \varphi_i$*

Ces morphismes sont des difféomorphismes locaux. Lorsqu'il s'agit de structures affines (resp. projectives) on dit que F est une application affine (resp.projective).

La définition que nous avons donnée des (G,X)-structures est très parlante. La proposition suivante fournit une définition beaucoup plus utile.

On suppose M connexe. Soit v_0 un point de M, $p : \widetilde{M} \to M$ le revêtement universel de M relativement à ce point base et $\Gamma = \pi_1(M) = \pi_1(M, v_0)$ le groupe fondamental de M. On le regarde comme un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de $\widetilde{M}$.

Proposition 9.3 *Une (G,X)-structure sur M équivaut à la donnée d'un difféomorphisme local $D : \widetilde{M} \to X$ appelé développante et un morphisme de groupes $h : \Gamma \to G$ appelé holonomie de telle sorte que, pour tout élément γ de Γ, on a $D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$.*

Bien sûr, le morphisme d'holonomie est entièrement déterminé par la développante D. Le groupe image $H = h(\Gamma)$ est appelé *groupe d'holonomie.*

Deux (G,X)-structures de développantes D et D' et d'holonomies h et h' sont égales si et seulement si, il existe un élément g dans G tel que $D' = g \circ D$. On a alors, pour tout γ dans Γ, $h'(\gamma) = D \circ h(\gamma) \circ D^{-1}$. Le mot "équivaut" dans la proposition doit bien sûr être compris modulo cette remarque.

Démonstration L'ensemble des (G,X)-structures sur M est en bijection avec l'ensemble des (G,X)-structures sur $\widetilde{M}$ pour lesquelles les éléments de Γ sont des (G,X)-morphismes. Cette bijection est celle qui relie les (G,X)-structures sur M et $\widetilde{M}$ pour lesquelles le revêtement p est un (G,X)-morphisme. Il suffit donc pour démontrer la proposition de démontrer le lemme suivant de "prolongement des cartes". $\diamondsuit$

Lemme 9.4 *Soit M une (G,X)-variété simplement connexe. Alors,*

a) Il existe un (G,X)-morphisme D de M dans X.

b) Si D' est un autre (G,X)-morphisme de M dans X , alors il existe g dans G tel que $D' = g \circ D$. En particulier, pour tout (G,X)-morphisme γ de M, il existe un élément $h(\gamma)$ de G tel que $h'(\gamma) = D \circ h(\gamma) \circ D^{-1}$.

L'élément $h(\gamma)$ s'appelle l'holonomie de γ. On a bien sûr la relation $h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2) = h(\gamma_1)h(\gamma_2)$.

Démonstration a) Construction de la développante. Fixons un point v_0 de M et une carte (U_0, φ_0) au voisinage de v_0. Soit v un point de M. Relions v_0 à v par un chemin γ. Choisissons une partition $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{p+1} = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$ de sorte qu'il existe des ouverts $U_0, \ldots, U_p$ de cartes $\varphi_0, \ldots, \varphi_p$ de sorte que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Soient g_i les éléments de G tels que $\varphi_i = g_{i+1} \circ \varphi_{i+1}$ au voisinage de $\gamma(t_{i+1})$. On pose $D(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_p(\varphi_p(v))$.

On vérifie grace au lemme ci-dessous que, à partition fixée, $D(v)$ ne dépend pas du choix des cartes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. En effet, donnons nous d'autres cartes φ'_i avec $\varphi'_0 = \varphi_0$, et notons g'_i les éléments de G qu'elles permettent de construire. On a l'égalité, avec h_i dans G, $\varphi'_i = h_i \circ \varphi_i$ au voisinage de $\gamma([t_i, t_{i+1}])$. Et donc $g'_i = h_{i-1} \circ g_i \circ h_i$.

On en déduit que $D(v)$ ne dépend pas de la partition et enfin que $D(v)$ ne dépend pas du lacet choisi car M est simplement connexe.

b) C'est une conséquence du lemme suivant déjà utilisé en a). $\diamondsuit$

Lemme 9.5 *Soit W une (G, X)-variété connexe. Deux (G, X)-morphismes φ et φ' de W dans X qui coïncident sur un ouvert non vide coïncident partout.*

Démonstration L'ensemble des points w de W au voisinage desquels φ et φ' coïncident est à la fois ouvert et fermé. $\diamondsuit$

9.2 Variétés affines

Soit M une variété affine (plate), c'est à dire une (G, X)-variété où l'espace modèle X est l'espace affine $V = \mathbb{R}^m$ et où G est le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$ des transformations affines de $\mathbb{R}^m$. On choisit une développante $D : \widetilde{M} \to V$ et on note $h : \pi_1(M) \to G$ le morphisme d'holonomie. On appelle géodésique sur M (ou sur $\widetilde{M}$) une courbe qui, lue dans les cartes, est un segment de droite parcouru "à vitesse constante" i.e. paramétré affinement. Pour tout x dans M et y dans T_xM, il existe une unique géodésique notée $t \to \varphi_y(t)$ qui part de x à la vitesse y au temps 0. Lorsqu'on peut définir cette géodésique jusqu'au temps 1, on note $\exp_x(y)$ ou "$x + y$" la valeur prise au temps 1. On a donc $\varphi_y(t) = \exp_x(ty)$. On note F_x l'ensemble des points de M que l'on peut joindre à x par une géodésique. C'est un ouvert de M.

Remarque - Il peut y avoir zéro, une ou plusieurs géodésiques de M reliant deux points.

- Lorsque M est simplement connexe, il y a au plus une géodésique joignant deux points. Cela résulte de la remarque suivante.

- Pour x dans $\widetilde{M}$, on note $\widetilde{V}_x$ l'ensemble des points de $\widetilde{M}$ que l'on peut joindre à x par une géodésique. La développante D restreinte à $\widetilde{V}_x$ est injective car deux segments dans V issus de $D(x)$ dont les extrémités sont égales, sont des segments égaux! On note

$V_x = D(\widetilde{V}_x)$. Cette partie V_x est la réunion des segments issus de $D(x)$ que l'on peut relever en des chemins dans $\widetilde{M}$ issus de x. C'est un ouvert étoilé de V autour de $D(x)$.

Une partie connexe C de $\widetilde{M}$ est dite *convexe* si la développante est une bijection de C sur un convexe de V.

Lemme 9.6 *Soit M une variété affine et $D : \widetilde{M} \to V$ sa développante.*
1) Pour tout point x d'un convexe C de $\widetilde{M}$, on a $C \subset \widetilde{V}_x$.
2) Soient C_1, C_2 deux convexes tels que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ alors $D|_{C_1 \cup C_2}$ est injectif. En outre, si C_1 et C_2 sont ouverts, la restriction de D à $C_1 \cup C_2$ est un difféomorphisme sur son image.
3) Si $\widetilde{M}$ contient un point x tel que $\widetilde{V}_x$ est convexe, alors on a l'égalité $\widetilde{M} = \widetilde{V}_x$.

Démonstration Le point 1) est évident.
2) Soient x_1, x_2 dans $C_1 \cup C_2$ tels que $D(x_1) = D(x_2)$. Choisissons x_3 dans $C_1 \cap C_2$. Les points x_1 et x_2 sont donc dans l'étoile $\widetilde{V}_{x_3}$. La remarque ci-dessus prouve alors que $x_1 = x_2$.
La dernière assertion résulte de ce que un difféomorphisme local injectif est un difféomorphisme sur son image.
3) Il suffit de montrer que $\widetilde{V}_x$ est fermé dans $\widetilde{M}$. Soit y un point de l'adhérence de $\widetilde{V}_x$ et C un voisinage ouvert convexe de y dans $\widetilde{M}$. Comme $D(x)$ est dans l'intérieur du convexe V_x, Le segment $[D(x), D(y)]$ est inclus dans $V_x \cup D(C)$. Il se relève, grace au point 2), en un segment $[x, y]$ de $\widetilde{V} \cup C$. Donc y est dans $\widetilde{V}_x$. $\diamondsuit$

Remarque Le point 2) de ce lemme est utile car il permet de "dessiner" dans V toute partie de $\widetilde{M}$ qui est réunion de deux convexes qui se touchent.

Exemples de structures affines sur le tore
- $\mathbb{T}^2$ comme quotient du plan affine par un réseau Γ du groupe des translations du plan.
- $\mathbb{T}^2$ comme quotient du revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ du plan privé de l'origine par un réseau de ce groupe $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ revêtement universel du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ qui est isomorphe au groupe additif $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{T}^2$ comme quotient de $]0, \infty[^2$ par un réseau du groupe multiplicatif $]0, \infty[^2$.
- $\mathbb{T}^2$ comme quotient de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ par une matrice $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ de contraction i.e. dont les valeurs propres sont de module inférieur strictement à 1.

9.3 Déformation des (G,X)-structures

On cherche à décrire au moins "localement" toutes les (G, X)-structures sur une variété compacte connexe M.

Soit $p : \widetilde{M} \to M$ le revêtement universel de M et $\Gamma = \pi_1(M)$ le groupe fondamental de M, c'est à dire le groupe de Galois du revêtement universel.

On note $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans G. On le munit de la topologie de la convergence simple. Comme Γ est de type fini, $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ s'identifie à un fermé de G^n pour n suffisamment grand.

On note $\mathcal{D}\mathrm{iff}_0(M)$ le groupe des diffeomorphismes φ de $\widetilde{M}$ qui relèvent des difféomorphismes ψ de M i.e. tels que $p \circ \varphi = \psi \circ p$.

On note $\mathcal{D}(M)$ l'ensemble des (G, X)-développements:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(M) \;=\; & \{D : \widetilde{M} \to X \text{ difféomorphisme local tel que} \\ & \exists h \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \;/\; \forall \gamma \in \Gamma \; D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D \} \,. \end{aligned}$$

On munit $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}\mathrm{iff}_0(M)$ de la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact. On note $\mathrm{hol} : \mathcal{D}(M) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ l'application holonomie: $\mathrm{hol}(D) = h$. Cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence C^∞ sur un compact suffisamment grand de $\widetilde{M}$.

Avec ces notations, la proposition suivante affirme que l'espace des (G, X)-développements est localement le produit de l'espace des morphismes de Γ dans G avec l'espace des difféomorphismes de M.

Proposition 9.7 *Soit M une variété compacte connexe et $D_0 \in \mathcal{D}(M)$ un (G, X)-développement et $h_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ son holonomie. Alors, il existe*
- un voisinage $\mathcal{U}$ de D_0 dans $\mathcal{D}(M)$,
- un voisinage $\mathcal{V}$ de h_0 dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$,
- un voisinage $\mathcal{W}$ de l'identité Id dans $\mathcal{D}\mathrm{iff}_0(M)$.
- une application continue Φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$ telle que
i) $\mathrm{hol}(\Phi(h)) = h$, pour tout h dans $\mathcal{V}$ et
ii) l'application Ψ définie par $\Psi(h, \varphi) = \Phi(h) \circ \varphi$ est un homéomorphisme de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ sur $\mathcal{U}$.

On a donc, $\mathrm{hol}(\Psi(h, \varphi)) = h$.

Démonstration On renvoie à [14]. $\diamondsuit$

10 Convexes divisibles

Le but de ce chapitre est d'étudier les groupes linéaires réels discrets Γ qui préservent un cône ouvert convexe saillant C de $\mathbb{R}^m$ et pour lesquels le quotient $M := \Gamma \backslash C$ est compact. Bien sûr le cône C et la variété affine M joueront un rôle dans cette étude.

La théorie générale que nous avons développée précédemment s'applique à l'étude de ces groupes Γ... Dans ce chapitre, nous nous contenterons de montrer que l'on peut construire de tels groupes Γ qui sont Zariski denses dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$.

Les deux premières parties rappelle des faits bien classiques sur les cônes ouverts convexes saillants et leur distance de Hilbert.

Nous montrons alors un cas particulier (théorème 10.12 et proposition 10.13) d'un théorème dû à J.Vey qui affirme que la représentation de Γ dans $\mathbb{R}^m$ est semisimple.

Le résultat central de ce chapitre est le théorème 10.15 qui affirme que ces groupes Γ forment un "ouvert" des sous-groupes de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$.

10.1 Cônes convexes saillants

Soient $V = \mathbb{R}^m$ et V^* le dual de V. Une partie convexe de V est dite *saillante* si elle ne contient pas de droites affines. Un *cône* est une partie de V stable par les homothéties positives.

Soit C un cône ouvert convexe saillant non vide. On note $\overline{C}$ l'adhérence de C pour la topologie de la norme et $C^* := \{\xi \in V^* \ / \ \forall x \in \overline{C} - \{0\} \ \ \xi(x) > 0 \ \}$ le *cône dual*.

Lemme 10.1 *Soit C un cône ouvert convexe saillant non vide de V. Alors le cône dual C^* est encore un cône ouvert convexe saillant non vide de V^* et on a l'égalité $C = C^{**}$.*

Démonstration Il est clair que C^* est un cône convexe. Munissons V d'une norme euclidienne. L'ensemble $E = \{x \in \overline{C} \ / \ \|x\| = 1\}$ est ouvert. Comme C est saillant, l'enveloppe convexe Σ de E ne contient pas l'origine. Par Hahn-Banach, il existe $\xi \in V^*$ tel que $\xi(\Sigma) \subset]0, \infty[$. Donc $C^* \neq \emptyset$. Finalement, comme C est ouvert, C^* est saillant.

Il est clair que $C \subset C^{**}$. Inversement, comme C^{**} est ouvert, il suffit de montrer que $C^{**} \subset \overline{C}$. Pour cela, soit x_0 un point de V qui n'est pas dans C^*. Par Hahn-Banach, il existe $\xi \in V^*$ tel que $\xi(x_0) < 0$ et $\xi(\overline{C}) \subset [0, \infty[$. Donc ξ est dans $\overline{C^*}$ et x_0 n'est pas dans C^{**} $\diamondsuit$

Notons $d\xi$ une mesure invariante par translations sur V^*. On pose, pour x dans C

$$\varphi_C(x) = \int_{C^*} e^{-\xi(x)} d\xi \ .$$

La fonction $\varphi_C : C \to]0, \infty[$ est appelée *fonction caractéristique* de C, c'est la transformée de Laplace de la fonction 1_{C^*} indicatrice de C^*.

On pose $G_C = \{g \in \mathrm{GL}(V) \ / \ g(C) = C\}$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$. Si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m$, on note $\nabla f = df$ la différentielle de f. De même, si α est une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$, on note $\nabla\alpha$ la dérivée covariante de α. En cartes affines $v = (x_1, \ldots, x_m)$, on a $\nabla f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ et en notant $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$, on a $\nabla\alpha = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_i \otimes dx_j$

Proposition 10.2 *Soit C un cône ouvert convexe saillant non vide de $\mathbb{R}^m$.*
a) φ_C est bien définie et est analytique sur C et, pour tout x_0 dans le bord ∂C, on a $\lim_{x\to x_0} \varphi_C(x) = +\infty$.
b) Pour tout g dans G_C, on a $\varphi_C \circ g = |\mathrm{det} g|^{-1} \varphi_C$.
c) La différentielle $\alpha_C := -\nabla(\log \varphi_C)$ est une 1-forme G_C-invariante sur C.
d) Pour tout x dans C, la forme bilinéaire symétrique $\nabla^2(\log \varphi_C)(x)$ est définie positive.
e) L'application $x \to \alpha_C(x)$ est un difféomorphisme de C sur C^*.

Remarque L'application α_{C^*} n'est pas toujours l'inverse de l'application α_C.

Démonstration a) Soient V_x^* l'hyperplan affine $V_x^* := \{\xi \in V^* \ / \ \xi(x) = 1\}$ et $d\eta$ la mesure invariante par translations sur V_x^* telle que la restriction de la mesure de Lebesgue $d\xi$ dans le demi-espace $\{t\eta \ / \ t > 0, \ \eta \in V_x^*\}$ s'écrit $t^{m-1} dt d\eta$. Pour tout x dans C, le convexe $C_x^* = C \cap V_x^*$ est une partie bornée de V_x^* et on a $\varphi_C(x) = (m-1)! \int_{C_x^*} d\eta$. Le même calcul permet de démontrer que $\varphi_C(x)$ est bien définie pour x dans l'ouvert $C + iV$ du complexifié $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Donc φ_C est analytique.

Si x_p est une suite de C qui tend vers x_0, le théorème classique d'intégration de Fatou donne l'inégalité $\liminf_{p\to\infty} \varphi_C(x_p) \geq \int_C e^{-\xi(x_0)} d\xi$. Mais cette intégrale est infinie par le même calcul que ci-dessus car $C_{x_0}^*$ est un convexe non borné donc de mesure infinie.

b) Cela résulte des définition et du changement de variables: $\xi' = \xi \circ g$.

c) On a $\log(\varphi_C \circ g) = \log(\varphi_C) - \log|\mathrm{det} g|$. Donc, pour tout x dans C, on a $\alpha_C(gx) = \alpha_C(x) \circ g$.

d) Notons

$$\begin{aligned} H_x &= \varphi_C(x)^2 \ \nabla^2(\log \varphi_C)(x) \\ &= -\varphi_C(x) \ \nabla^2 \varphi_C(x) - \ \nabla\varphi_C(x) \otimes \nabla\varphi_C(x) \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions non colinéaires $\xi \to e^{-\xi(x)/2}$ et $\xi \to \xi(y) e^{-\xi(x)/2}$ donne, pour tout $y \neq 0$,

$$H_x(y,y) = (\int_{C^*} e^{-\xi(x)} d\xi)(\int_{C^*} \xi(y)^2 e^{-\xi(x)} d\xi) - (\int_{C^*} \xi(y) e^{-\xi(x)} d\xi)^2 > 0$$

Donc la forme bilinéaire symétrique H_x est définie positive.

e) Remarquons que

$$\alpha_C(x) = \frac{1}{\varphi_C(x)} \int_{C^*} \xi e^{-\xi(x)} d\xi = m \frac{\int_{C_x^*} \eta d\eta}{\int_{C_x^*} d\eta} \ .$$

Donc $\alpha_C(x)$ est le centre de gravité de la *tranche* C^*_{mx}. En particulier, $\alpha_C(x)$ est dans C^*. En outre, le point d) prouve que la différentielle de α_C est non nulle en tout point. Il reste à montrer que α_C est une bijection de C sur C^*.

Soit ξ dans C^*. On cherche un point x de C tel que $\alpha_C(x) = m\xi$. On sait déja que x est dans le convexe borné $C_\xi := \{x \in C \ / \ \xi(x) = 1\}$. La condition "$\alpha_C(x)$ colinéaire à ξ" équivaut à la condition "x est un point critique pour la restriction de $\log \varphi_C$ à C_ξ. D'après les assertions a) et d), cette restriction est une fonction propre et strictement convexe. Donc ce point critique x existe et est unique. Les égalités $\alpha_C(x)(x) = m$ et $\xi(x) = 1$ prouvent alors que $\alpha_C(x) = m\xi$. Donc α_C est une bijection de C dans C^*. $\diamondsuit$

Exercice 10.3 *On munit l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^m$ d'un produit scalaire euclidien qui l'identifie à son dual V^*. Soit C un cône ouvert convexe saillant autodual de V i.e. tel que $C = C^*$. Montrer que l'application α_C a un unique point fixe.*

Indication: on vérifiera que, pour $\tau > 0$, il existe un unique point x_τ sur l'hypersurface $\{x \in C \ / \ \varphi_C(x) = \tau\}$ tel que $\alpha_C(x_\tau)$ est proportionnel à x_τ: celui qui minimise la norme. On remarquera alors que $\alpha_C(\lambda x) = \lambda^{-1}\alpha_C(x)$.

Définition 10.4 *Soit Ω un ouvert de V et $G_\Omega := \{g \in \mathrm{Aff}(V) \ / \ g(\Omega) = \Omega\}$. On dit qu'un sous-groupe discret Γ de G_Ω divise Ω s'il agit proprement sur Ω avec quotient $\Gamma\backslash\Omega$ compact. On dit que Ω est (affinement) divisible si un tel groupe existe.*

Remarque - Si Γ est sans torsion, alors la variété $\Gamma\backslash\Omega$ est une variété affine.

Lemme 10.5 *Soit C un cône ouvert convexe saillant de $V = \mathbb{R}^m$ et Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ qui préserve C. On note ${}^t\Gamma$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V^*)$ transposé de Γ. Ce groupe préserve le cône dual C^*. On a l'équivalence:*

$$\Gamma \text{ divise } C \iff {}^t\Gamma \text{ divise } C^* .$$

Démonstration L'application α_C est un difféomorphisme de C sur C^* qui vérifie, pour tout g dans Γ, $\alpha_C \circ g = {}^t g^{-1} \circ \alpha_C$. $\diamondsuit$

10.2 Distance de Hilbert

Soient $\mathbb{S}(V)$ la *sphère projective de V* c'est à dire l'ensemble des demidroites vectorielles de V, $\pi : E - \{0\} \to \mathbb{S}(E)$ la projection naturelle. Le groupe $\mathrm{SL}^{\pm}(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \ / \ \det g = \pm 1\}$ est le groupe des transformations projectives de $\mathbb{S}(V)$.

Définition 10.6 *Une partie $\Omega \subset \mathbb{S}(V)$ est dite convexe si $\pi^{-1}(\Omega) \cup \{0\}$ est convexe dans V.*

Elle est dite convexe saillante si le cône $C := \pi^{-1}(\Omega)$ est convexe saillant dans V.

Pour ξ dans V^*, on note V_ξ l'hyperplan affine $V_\xi = \{x \in V \ / \ \xi(x) = 1\}$. Par Hahn Banach, si Ω est convexe saillant, on peut choisir ξ dans V^* de sorte que Ω s'identifie avec le convexe borné $C_\xi := C \cap E_\xi$. On note $G_\Omega := \{g \in \mathrm{SL}^{\pm}(V) \ / \ g(\Omega) = \Omega\}$.

Le *birapport* de 4 réels distincts x_1, x_2, x_3, x_4 est le réel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) := \left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right) / \left(\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}\right)$$

Pour définir le *birapport* de 4 droites vectorielles d_1, d_2, d_3, d_4 distinctes d'un 2-plan: on choisit une droite affine de ce 2-plan qui ne passe pas par l'origine, on la munit d'un repère affine et on note x_j la coordonnée de $d \cap d_j$. Le birapport est le réel

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) := (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Le birapport ne dépend pas des choix faits.

On appelle *grand cercle* de $\mathbb{S}(V)$ l'image dans $\mathbb{S}(V)$ d'un 2-plan vectoriel de V. Pour $x \neq y$ dans $\mathbb{S}(V)$ non diamétralement opposés, on note $< x, y >$ le grand cercle de $\mathbb{S}(V)$ contenant x et y et $]x, y[$ le segment ouvert de $<x, y>$ d'extrémités x et y qui ne contient pas de points oposés. Si x et y sont deux points distincts d'un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{S}(V)$, on note a, b les deux points de $\partial\Omega$ tels que les quatre points a, x, y, b soient dans cet ordre sur le grand cercle $< x, y >$ et on pose $d_\Omega(x, y) = |\log(a, b, x, y)|$. Si $x = y$, on pose $d_\Omega(x, x) = 0$.

Lemme 10.7 *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{S}(V)$.*

a) Soient Ω' un ouvert convexe inclus dans Ω et x, y dans Ω'. Alors $d_{\Omega'}(x, y) \geq d_\Omega(x, y)$.

b) d_Ω est une distance sur Ω appelée distance de Hilbert.

c) La topologie définie par cette distance est la topologie usuelle.

d) Les boules fermées $B_\Omega(x_0, r)$ pour d_Ω sont compactes.

En particulier, l'espace métrique (Ω, d_Ω) est complet.

Exemple Soit q une forme quadratique Lorentzienne sur V et C un cône de futur pour q. Dans une base convenable de V, on a $q(x_1, \ldots, x_m) = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2$ et $C = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in V \ / \ q(x) > 0 \text{ et } x_1 > 0\}$. L'ouvert convexe saillant $\Omega := \pi(C)$ s'identifie à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{m-1}$ et d_Ω est alors un multiple de la distance hyperbolique. En effet d_Ω est invariante par la composante connexe $\mathrm{O}_e(q)$ du groupe orthogonal de q. Un tel ouvert Ω est appelé “ellipsoïde ouvert”.

Démonstration a) Clair.

b) Soient x, y, z dans Ω. Montrons que $d_\Omega(x, z) \leq d_\Omega(x, y) + d_\Omega(y, z)$. C'est clair si x, y, z sont sur un même grand cercle. Supposons donc que ce n'est pas le cas. On peut supposer Ω de dimension 2. On note a, b, c, d les points de $\partial\Omega$ tels que a, x, y, b (resp. c, y, z, d) soient dans cet ordre sur un même grand cercle. On note y' le point de $]x, z[$ tel que les trois grands cercles $<a, c>$, $<b, d>$ et $<y, y'>$ ont un point commun. Soit Ω' la partie ouverte de Ω qui est délimitée par $]a, c[$ et $]b, d[$. On a alors

$$\begin{aligned} d_\Omega(x, y) + d_\Omega(y, z) &= d_{\Omega'}(x, y) + d_{\Omega'}(y, z) \\ &= d_{\Omega'}(x, y') + d_{\Omega'}(y', z) \\ &= d_{\Omega'}(x, z) \geq d_\Omega(x, z). \end{aligned}$$

c) Munissons V d'une norme euclidienne et choississons ξ dans le cône C^* dual du cône $C = \pi^{-1}(\Omega)$ et identifions Ω avec C_ξ. Pour x dans C_ξ , choisissons des boules ouvertes euclidiennes B_0, B_1 de centre x telles que $x \in B_0 \subset C_\xi \subset B_1$. D'après la remarque ci-dessus les métriques d_{B_0} et d_{B_1} définissent la topologie usuelle et on a les inégalités dans B_0 $d_{B_0} \geq d_{C_\xi} \geq d_{B_1}$.

d) Pour x dans C_ξ et u dans V_ξ, tel que $\|u\| = 1$, notons $t_{x,u} = \inf\{t > 0 \ / \ x + tu \notin C_\xi\}$. Comme C_ξ est convexe, l'application $u \to t_{x,u}$ est continue. Soit $\delta > 0$. Le réel $t = t(u)$ dans l'intervalle $]0, t_{x,u}[$ tel que $d_{C_\xi}(x, x + tu) = \delta$ est donné par la formule. $t = \left(\frac{e^\delta}{\lambda_{x,u}} + \frac{1}{\lambda_{x,-u}}\right)^{-1} (e^\delta - 1)$. L'application $u \to t(u)$ est donc continue. Donc la boule $B_{C_\xi}(x, \delta)$ est compacte. ♢

Exercice 10.8 *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{S}(V)$.*

a) Montrer que la boule $B_\Omega(x_0, r)$ est convexe.

b) On suppose que Ω est strictement convexe i.e. que la frontière $\partial\Omega$ ne contient pas d'arc de grand cercle. Montrer que la boule $B_\Omega(x_0, r)$ est strictement convexe.

Définition 10.9 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{S}(V)$ et $G_\Omega := \{g \in \mathrm{SL}^\pm(V) \ / \ g(\Omega) = \Omega\}$. On dit qu'un sous-groupe discret Γ de G_Ω divise Ω s'il agit proprement sur Ω avec quotient $\Gamma\backslash\Omega$ compact. On dit que Ω est (projectivement) divisible si un tel groupe existe.*

Exercice 10.10 *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{S}(V)$ Montrer que tout sous-groupe fermé de G_Ω agit proprement sur Ω.*

Indication: Les éléments de G_Ω sont des isométries pour la distance de Hilbert.

Remarque Si Γ est sans torsion, la variété $\Gamma\backslash\Omega$ est une variété projective (plate).

Proposition 10.11 *Soient Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{S}(V)$ et Γ un sous-groupe discret de G_Ω qui divise Ω. Alors, pour tout x dans Ω, l'enveloppe convexe de l'orbite Γx égale Ω.*

Démonstration Identifions encore Ω avec le convexe borné C_ξ de V_ξ. Soit x dans C_ξ. Par Krein-Milman, il suffit de montrer que tout point c extrémal de l'adhérence $\overline{C}_\xi$ est dans l'adhérence de l'orbite Γx. Soit B une boule euclidienne de centre c dans V_ξ. Montrons que Γx rencontre B.

Comme le point c est extrémal, il existe une application affine η de V dans $\mathbb{R}$ telle que $\eta(\overline{C}_\xi) \subset [0, \infty[$ et tel que l'ensemble $\{x \in C_\xi \ / \ \eta(x) < 1\}$ contient c et est inclus dans $B \cap C_\xi$ (c'est le lemme du chapeau [13, §7 Prop.2]).

D'autre part, soient K un compact de C_ξ tel que $\Gamma K = C_\xi$ et $R > 0$ tel que K est inclus dans $B_{C_\xi}(x, R)$. Choisissons y dans C_ξ tel que $\eta(y) \leq \eta(x)e^{-R}$ et γ dans Γ tel que $\gamma^{-1}y$ est dans K. Le point $x' := \gamma x$ vérifie l'inégalité $d_{C_\xi}(x', y) \leq R$. Notons a, b les deux points du bord ∂C_ξ qui sont sur la droite affine passant par x' et y de sorte que $0 \leq \eta(b) < \eta(y) < \eta(x) < \eta(a) < \infty$. On a la suite d'inégalités:

$$\begin{aligned} R &\geq d_{C_\xi}(x', y) = |\log(a, b, x', y)| \\ &= |\log(\eta(a), \eta(b), \eta(x'), \eta(y))| \geq |\log(\infty, 0, \eta(x'), \eta(y))| \\ &= \log \frac{\eta(x')}{\eta(y)} \geq R + \log \frac{\eta(x')}{\varepsilon} \ . \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité $\eta(x') < \varepsilon$. Donc x' est dans B et $\Gamma x \cap B \neq \emptyset$. $\diamondsuit$

10.3 Ouverts convexes divisibles de l'espace affine

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 10.12 *Tout ouvert convexe saillant de $V = \mathbb{R}^m$ qui est affinement divisible est un cône.*

Avant de démontrer ce théorème, donnons quelques exemples.

1) Le cône du futur C d'une forme lorentzienne q est divisible. En effet, le groupe G composante connexe du groupe des similitudes de q agit proprement et transitivement sur C. Donc tout sous-groupe discret cocompact Γ de G divise C.

2) Le cône C des matrices symétriques $d \times d$ définies positives est divisible, pour les mêmes raisons avec le groupe $G = \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$.

3) Le groupe $G = \{ \begin{pmatrix} s^2 & s\,x \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \end{pmatrix} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \ / \ s > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \ \}$ agit simplement transitivement sur l'ouvert convexe saillant $\Omega := \{(u, v) \ / \ u > v^2/2 \ \}$. L'ouvert Ω n'est pas un cône mais G n'est pas discret.

4) Le groupe $G = \{ \begin{pmatrix} s^2 & s\,x & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3) \ / \ s > 0 \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ \}$ agit simplement transitivement sur l'ouvert convexe $\Omega := \{(u, v, w) \ / \ u > v^2/2 \ \}$. Donc tout sous-groupe discret cocompact Γ de G divise Ω. L'ouvert Ω n'est pas un cône mais Ω n'est pas saillant.

Remarquons qu'un tel sous-groupe Γ existe. En effet, notons A la matrice hyperbolique $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et G' le groupe $G' = \{(t, v) \ / \ t \in \mathbb{R} \ , \ v \in \mathbb{R}^2\}$ muni du produit $(t, v).(t', v') := (t + t', v + A^t v')$. Il existe un isomorphisme φ de G' sur G. Il suffit de prendre $\Gamma = \varphi(\Gamma')$ où $\Gamma' = \{(t, v) \ / \ t \in \mathbb{Z} \ , \ v \in \mathbb{Z}^2\}$.

Démonstration Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aff}(V)$ qui divise Ω et $C := \{(tx, t) \ / \ x \in \Omega \ , \ t > 0\}$. C est un cône convexe saillant de $V \times \mathbb{R}$ divisé par le groupe $\Gamma' = i(\Gamma) \times D$ où $i : \mathrm{Aff}(V) \hookrightarrow \mathrm{GL}(V \times \mathbb{R})$ est l'injection naturelle et où D est le groupe engendré par l'homothétie de rapport 2.

L'hyperplan $H := E \times \{0\}$ est Γ'-invariant. Le point a) de la proposition ci-dessous prouve qu'il existe une droite Γ'-invariante D supplémentaire à H. Cela signifie que Γ a un point fixe x_0 dans V.

On pose alors, pour x dans Ω, $t_x^\pm := \inf\{t > 0 \ / \ x_0 + e^{\pm t}(x - x_0) \notin \Omega\}$. L'application $x \to t_x^\pm$ est une fonction semi-continue inférieurement sur Ω à valeurs dans $]0, \infty]$. Elle est Γ-invariante et, comme $\Gamma\backslash\Omega$ est compact, elle est minorée par un réel $t_0 > 0$. On en déduit que $t_x^\pm \equiv \infty$ et donc que Ω est un cône de sommet x_0.

Proposition 10.13 *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(V)$ qui divise un cône ouvert convexe saillant C de V. Alors*

a) Tout hyperplan Γ-invariant H de V admet un supplémentaire Γ-invariant.

b) Toute droite Γ-invariante D de V admet un supplémentaire Γ-invariant.

Remarque On peut montrer que tout sous espace vectoriel Γ-invariant de V admet un supplémentaire Γ-invariant.

Commençons par un exercice de calculus.

Lemme 10.14 *Soient (X, d) un espace métrique compact et $\varphi : X \to X$ une surjection telle que, pour tout x, y dans X, $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le d(x, y)$.*

Alors φ est une isométrie.

Démonstration Soient x_0, y_0 dans X. Choisissons x_n, y_n des suites dans X telles que, pour $n \ge 1$, $\varphi(x_n) = x_{n-1}$ et $\varphi(y_n) = y_{n-1}$. Soit S une suite strictement croissante d'entiers telle que les limites $x' := \lim_{n\in S} x_n$ et $y' := \lim_{n\in S} y_n$ existent. Notons $x'_n := \varphi^n(x')$ et $y'_n := \varphi^n(y')$. On a $\lim_{n\in S} x'_n = x_0$, $\lim_{n\in S} y'_n = y_0$, $\lim_{n\in S} x'_{n+1} = \varphi(x_0)$ et $\lim_{n\in S} y'_{n+1} = \varphi(y_0)$. Or la suite $d(x'_n, y'_n)$ est décroissante. Elle a pour limite $l = d(x_0, y_0) = d(\varphi(x_0), \varphi(y_0))$. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition Vérifions tout d'abord que *b*) $\Rightarrow$ *a*). Par le lemme 10.1, le groupe ${}^t\Gamma$ divise aussi C^*. La droite $H^\perp := \{\xi \in V^* \ / \ \xi(H) = 0\}$ de V^* est Γ-invariante. Elle admet, d'après l'assertion b), un hyperplan supplémentaire invariant. Celui-ci est l'orthogonal d'une droite D de V supplémentaire à H et Γ-invariante.

Montrons maintenant l'assertion b). Remarquons que $D \cap C = \emptyset$. En effet, si x est dans $D \cap C$, l'orbite Γx est incluse dans $D \cap C$ et son enveloppe convexe ne peut être égale à C ce qui contredit la proposition 10.11. De la même façon, cette proposition prouve que $D^\perp \cap C^* = \emptyset$, c'est à dire $D \cap \overline{C} \neq \{0\}$.

Donc pour x dans C, l'intersection $(x + D) \cap \partial C$ est réduite à un point que l'on note $s(x)$. Comme Ω est convexe, l'application $x \to s(x)$ est continue. Notons d_C la distance de Hilbert de C et ψ_t le groupe à un paramètre d'homéomorphisme de C donné par

$$\psi_t(x) = s(x) + e^t(x - s(x)) \ .$$

Montrons que, pour $t \ge 0$, ψ_t contracte les distances. Soient x, y dans C. On note $<x, y>$ la droite affine passant par x et y, on note a, b les deux points de $\partial\Omega \cap <x, y>$

(l'un d'eux étant éventuellement sur le grand cercle à l'infini), a' le point d'intersection de la droite $<\psi_t(x), \psi_t(y)>$ avec la droite $a + D$ et b' celui avec la droite $b + D$. Les points a' et b' sont dans $\overline{C}$. Donc

$$d_C(\psi_t(x), \psi_t(y)) \leq |\log(a', b', \psi_t(x), \psi_t(y))| = |\log(a, b, x, y)| = d_C(x, y) .$$

Montrons que ψ_t est une isométrie. Fixons $t \geq 0$ et posons $\psi = \psi_t$. Soient $M := \Gamma\backslash C$, $p : C \to M$ la projection naturelle, d la distance sur M définie par $d(p(x), p(y)) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(x, \gamma y)$ et φ la bijection de M définie par $\varphi(p(x)) = p(\psi(x))$. Comme φ est une contraction, le lemme prouve que φ est une isométrie. Comme la distance d_C est associée à une métrique finslérienne, ψ_t est aussi une isométrie.

Détaillons ce dernier argument. Supposons par l'absurde qu'il existe x, y dans C tels que $d_C(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) > d(x, y)$. On peut alors choisir dans le segment $[x, y]$ une suite de sous-segments emboités $[x_n, y_n]$ dont les extrémités vérifient encore cette inégalité et telle que $\lim_{n\to\infty} d_C(x_n, y_n) = 0$. On note $z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. On peut supposer que l'une des deux suites, par exemple x_n, est constante égale à z. La projection p est une isométrie dans un petit voisinage de z, donc pour $n \gg 0$, on a

$$d_C(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(y_n)) = d(\varphi^{-1}(p(z)), \varphi^{-1}(p(y_n))) = d(p(z), p(y_n)) = d_C(z, y_n) .$$

Contradiction.

Montrons que $s(C)$ est convexe. Pour cela, fixons $s_0 = s(x)$ et $s_1 = s(y)$, gardons les notations précédentes et montrons que le segment $[s_0, s_1]$ est dans ∂C. Comme ψ_t est une isométrie, les points a' et b' sont dans ∂C. Pour τ dans $\mathbb{R}$, notons a_τ et b_τ les deux points de $\partial C\cap <\psi_t(x), \psi_t(y)>$. Le raisonnement ci-dessus prouve que le point a_τ décrit une demidroite dont on note $a_{-\infty}$ l'extrémité. De même on note $b_{-\infty}$ l'extrémité de la demidroite parcourue par b_τ. Les 4 points $a_{-\infty}$, s_0, s_1 et $b_{-\infty}$ du bord ∂C sont alignés. Donc $[s_0, s_1]$ est inclus dans ∂C et $s(C)$ est convexe.

Donc $s(C)$ engendre un sous-espace Γ-invariant H. Comme C est d'intérieur non vide, H est un hyperplan supplémentaire à D. ♢

10.4 Variétés affines convexes

Le but de cette partie est de construire des ouverts strictement convexes saillants divisibles de $\mathbb{S}(V)$ qui ne sont pas des ellipsoïdes.

Théorème 10.15 *Soit Γ un sous-groupe de $G = \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ qui divise un cône ouvert convexe saillant C. Notons $i : \Gamma \to G$ cette injection. Alors, il existe un voisinage de i dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, tel que pour tout morphisme ρ dans ce voisinage, le groupe $\Gamma' := \rho(\Gamma)$ est discret et divise un cône ouvert convexe saillant C' proche de C.*

Avant de donner la démonstration, citons deux conséquences de ce théorème.

Corollaire 10.16 *Les sous-groupes Zariski denses Γ_t de $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ construits dans le dernier exemple de 8.1 sont discrets.*

Corollaire 10.17 *Pour tout $m \geq 3$, il existe des ouverts strictement convexes saillants divisibles de $\mathbb{S}(\mathbb{R}^m)$ qui ne ne sont pas des ellipsoides.*

Démonstration des corollaires Soit H_0 le groupe des homothéties de rapport 2^n avec n dans $\mathbb{Z}$. Le groupe $\Gamma_0 \times H_0$ divise le cône de futur C donc, pour t petit, le groupe $\Gamma_t \times H_0$ est discret et divise un cône ouvert convexe saillant proche C_t. Le groupe Γ_t est donc discret et divise l'ouvert convexe saillant $\Omega_t := \pi(C_t)$. Comme Γ_t est Zariski dense pour $t \neq 0$, l'ouvert Ω_t n'est pas un ellipsoïde.

Le fait que Ω_t est strictement convexe est admis. $\diamondsuit$

Démonstration du théorème On suppose pour simplifier que Γ est sans torsion. On note M la variété affine compacte $M = \Gamma\backslash C$. D'après le théorème de l'holonomie (proposition 9.7), si le voisinage est suffisamment petit, il existe une variété affine M' proche de M dont l'holonomie est donnée par ρ'.

La condition ii) de la proposition ci-dessous est une condition ouverte. La condition i) est vérifiée par M, elle est donc aussi vérifiée par M'. Autrement dit, le groupe Γ' est discret, divise un cône ouvert convexe saillant C' et $M' = \Gamma'\backslash C'$. $\diamondsuit$

Nous avon eu besoin de la proposition suivante.

Proposition 10.18 *Soit M une variété affine compacte. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

i) La développante est une bijection de $\widetilde{M}$ sur un cône ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^m$.

ii) Il existe une 1-forme différentielle fermée α sur M dont la dérivée covariante $\nabla\alpha$ est définie positive.

Remarque La dérivée covariante $\nabla\alpha$ se calcule dans les cartes affines par la formule donnée avant la proposition 10.2. Le fait que α soit fermée assure que le 2-tenseur $\nabla\alpha$ est symétrique.

Démonstration de l'implication i)$\Rightarrow$ ii) On peut écrire $M = \Gamma\backslash C$ où Γ divise C. La 1-forme α_C sur C de la proposition 10.2 est Γ-invariante. Elle provient donc d'une 1-forme α sur M. Comme $\nabla\alpha_C$ est définie positive, il en est de même de $\nabla\alpha$. $\diamondsuit$

Pour démontrer l'implication inverse, nous aurons besoin des deux lemmes élémentaires suivants. Le premier a trait aux ouverts convexes de $\mathbb{R}^m$ et le second aux fonctions convexes d'une variable réelle.

Lemme 10.19 *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, x un point de U et $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout y dans $\mathbb{R}^m$, on note $t_y := \sup\{t > 0 \ / \ [x, x+ty] \subset U\}$. On suppose que, chaque fois que $t_y < \infty$, on a $\lim_{t\to t_y} F(x+ty) = +\infty$. Alors U est convexe.*

Démonstration Sinon on peut trouver deux points x_1, x_2 de U tels que l'intérieur T du triangle de sommets x, x_1, x_2 est dans U ainsi que les segments $[x, x_1]$ et $[x, x_2]$, mais tel que le segment $[x_1, x_2]$ contient un point x_3 qui n'est pas dans U. Par convexité, la fonction F qui est bornée sur le compact $[x, x_1] \cup [x, x_2]$ est aussi bornée sur le segment $[x, x_3[$. Ce qui contredit notre hypothèse. $\diamondsuit$

Lemme 10.20 *Soit* $\psi : [0, t_0[\to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2.

i) Si $t_0 < \infty$. *Supposons qu'il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* t *dans* $[0, t_0[$, *on a* $\psi''(t) \geq C(t_0 - t)^{-2}$. *Alors* $\lim_{t \to t_0} \psi(t) = +\infty$.

ii) Si $t_0 = \infty$. *Supposons que* ψ *n'est pas constante et qu'il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* t *dans* $[0, t_0[$, *on a* $\psi''(t) \geq c(\psi'(t))^2$. *Alors* $\psi'(0) < 0$.

Démonstration i) En intégrant 2 fois cette inégalité , on obtient une minoration $\psi(t) > -C \log(t_0 - t) + A + Bt$ qui prouve bien que $\lim_{t \to t_0} \psi(t) = +\infty$.

ii) En intégrant 2 fois l'inégalité $\psi''(\psi')^{-2} > c$, on obtient, pour $0 \leq t < t_0$, la minoration $\psi(t) \geq -\log |\frac{1}{\psi'(0)} - ct| + \psi(0)$ qui force t_0 à être fini dès que $\psi'(0) > 0$. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition 10.18 Commençons par quelques remarques et notations. La 1-forme α se relève en une 1-forme fermée $\widetilde{\alpha}$ sur $\widetilde{M}$ dont on note F une primitive.

Notons $\Gamma = \pi_1(M)$ le groupe fondamental de M. Pour y dans l'espace tangent $T\widetilde{M}$, on note $\varphi_y(t) = \exp(ty)$ la géodésique de la variété affine $\widetilde{M}$ qui part avec la vitesse y au temps 0, $]-t_{-y}, t_y[$ l'intervalle maximal sur lequel elle est définie, $\psi_y(t) = F(\varphi_y(t))$ et $\|y\| = \sqrt{(\nabla\widetilde{\alpha})(y, y)}$ la norme riemannienne. Un petit calcul donne les égalités:

$$\psi_y'(t) = \widetilde{\alpha}(\varphi_y'(t)) \quad \text{et} \quad \psi_y''(t) = (\nabla\widetilde{\alpha})(\varphi_y'(t), \varphi_y'(t)) = \|\varphi_y'(t)\|^2 \ .$$

Remarquons que $\varphi_y'(t)$ est le vecteur tangent au temps t à notre géodésique. La compacité de $M \simeq \Gamma\backslash\widetilde{M}$ assure que la fonction $\psi = \psi_y : [0, t_y[\to \mathbb{R}$ vérifie chacune des deux hypothèses du lemme 10.20.

La première résulte de ce que l'application $z \to t_z$ est semicontinue inférieurement et est Γ-invariante. Il existe donc $C > 0$, tel que, pour tout z dans $T\widetilde{M}$, on a $t_z\|z\| \geq \sqrt{C}$. On remarque alors que $t_{\varphi_y(t)} = t_y - t$.

La deuxième résulte de ce que la 1-forme $\widetilde{\alpha}$ et la norme $\|.\|$ sont Γ-invariantes. Il existe donc $c > 0$, tel que, pour tout z dans $T\widetilde{M}$, on a $|\widetilde{\alpha}(z)| \leq \|z\|/\sqrt{c}$.

Nous pouvons maintenant rassembler les résultats déjà démontrés pour prouver la proposition. Fixons un point x de $\widetilde{M}$. La développante D est un homéomorphisme de l'étoile $\widetilde{V}_x$ sur l'ouvert étoilé V_x de V. Sur cet ouvert, la fonction $F \circ D^{-1}$ est convexe. Le lemme 10.20.i permet d'appliquer le lemme 10.19 à l'ouvert V_x qui est donc convexe. Le lemme 9.6 prouve alors que $D(\widetilde{M}) = \widetilde{V}_x$ est convexe. Le lemme 10.20.ii assure que, pour tout y non nul dans $T\widetilde{M}$, t_y et t_{-y} ne peuvent pas être simultanément infinis et donc que $D(\widetilde{M})$ est saillant. Le théorème 10.12 prouve alors que $D(\widetilde{M})$ est un cône. $\diamondsuit$

Notes

Section 2 Les résultats de la section 2.1 sont dûs à Selberg. La présentation est inspirée de Raghunathan ([34]) et Alperin ([1]). Les résultats de la section 2.2 sont dûs à Zassenhaus. Une version plus précise de la proposition 2.5 a été démontrée et utilisé dans [25] par Kazhdan et Margulis pour donner un critère de cocompacité pour les réseaux des groupes de Lie semisimples. Les propositions 2.8 et 2.9 sont dues à Schur et Jordan. (voir [34]).

Section 3 Le résultat principal de ce chapitre (théorème 3.10) est dû à J.Tits dans [40]. C'est ce résultat qui est la source d'inspiration initiale de l'auteur sur ce sujet. Le lemme 3.1 remonte à F.Klein. Le concept de groupe de Schottky est du à Schottky pour les groupes Fuchsiens (i.e. les sous-groupes discrets de $SL(2, \mathbb{R})$). Le lemme 3.12 est aussi dans [40]; sa démonstration est une belle application des connaissances de base de théorie des nombres telles qu'on peut les trouver par exemple dans le livre de Samuel [36]. La démonstration du théorème 3.10 présentée ici est un peu plus simple que la démonstration originale: on n'y utilise pas la notion de groupe semisimple! Mais les idées essentielles sont les mêmes: proximalité, tennis de table et corps p-adiques. On peut aussi consulter [43] pour une autre présentation de l'alternative de Tits.

Section 4 Le théorème principal de ce chapitre (théorème 4.14) est dans l'appendice de [7]. La démonstration qui y est donnée repose sur des travaux antérieurs de Gol'dsheid et Margulis ([18]) et de Guivarc'h et Raugi ([21]). La démonstration donnée ici est basée sur une simplification due a Prasad ([33]) des arguments de [18]. Le cas particulier où G est classique déployé est cité par Tomanov dans [41].

Section 5 Le critère de proximalité (lemme 5.2) est dans [40]. La proposition 5.5 et le lemme 5.6 sont dûs à Abels, Margulis et Soifer dans [2]. Les autres résultats de ce chapitre sont essentiellement dans [4].

Section 6 A l'exception de la proposition 6.12 qui est dans [2], les résultats de ce chapitre sont pour l'essentiel dans [4] et [5].

Section 7 Ce chapitre suit le dernier chapitre de [5]. Sous la forme où nous la présentons, la proposition 7.8 et sa démonstration est due à Rosenlicht dans [35]. On renvoie à Boshernitzan ([10]) pour une autre presentation Les premiers cas particuliers (lorsque $k = \mathbb{R}(x)$) remontent à G.Hardy en 1912 (voir [11]).

Section 8 Les groupes de Coxeter avec leur représentation de Tits sont classiques. Ils sont par exemple étudiés en détail dans [12]. Les exemples de déformations de réseaux sont dus à Johnson et Millson dans [24]. Le critère de propreté (proposition 8.1) est dans [4]. Une autre démonstration a été donnée par Kobayashi dans [27]. Certains cas particulier avaient été démontrés auparavant par Kobayashi dans [26] et par Friedland dans [15]. Les théorèmes 8.2 et 8.3 sont dûs à Auslander, même si celui-ci n'employait pas le terme adhérence de Zariski. Une présentation de ceux-ci est donnée dans [34].

Section 9 Cette partie présente des résultats de base sur les (G, X)-structures. Le théorème de l'holonomie (proposition 9.7) dans ce niveau de généralité est dû à Thurston (voir [39], [16] et [14]).

Section 10 La proposition 10.2 est due à Koecher, Rothaus et Vinberg. La proposition 10.11, le théorème 10.12 la proposition 10.13 ainsi que la remarque qui la suit sont dus à Vey dans [42]. La proposition 10.18 est due à Koszul dans [29].

Références

[1] R. Alperin - An elementary account of Selberg's lemma, Ens. Math.33 (1987) p.269-273.

[2] H. Abels, G. Margulis, G. Soifer - Semigroups containing proximal linear maps, Isr.Jour. Math. 91 (1995) p.1-30.

[3] H. Abels, G. Margulis, G. Soifer - Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part, CRAS 324 (1997) p.253-258.

[4] Y. Benoist - Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, CRAS 319 (1994) p.937-940 et Annals of Math. 144 (1996) p.315-347.

[5] Y. Benoist - Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, Geom. Funct.Anal. 7 (1997) p.1-47.

[6] Y. Benoist, F. Labourie - Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. I.H.E.S. 76 (1992) p.99-109.

[7] Y. Benoist, F. Labourie - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[8] A. Borel - Linear algebraic groups, GTM 126 Springer (1991).

[9] A. Borel - Introduction aux groupes arithmétiques, Act. Sci. Ind. 1341,Hermann, Paris 1969

[10] M. Boshernitzan - An extension of Hardy's class L of order of infinity, Jour. Anal. Math. 39 (1981) p.235-255.

[11] N. Bourbaki - Topologie Générale, Paris (1970).

[12] N. Bourbaki - Groupes et algèbres de Lie, Paris (1975).

[13] N. Bourbaki - Espaces vectoriels topologiques, Paris (1981).

[14] R. Canary, D. Epstein, P. Green - Notes on notes of Thurston, London Math.Series Lect. Notes 111 (1986) p.1-92.

[15] S. Friedland - Properly discontinuous groups on certain matrix homogeneous spaces, preprint (1993).

[16] W. Goldman - Geometric structures on manifolds and varieties of reprentations, Contemporary Math. 74 (1988) p.169-198.

[17] W. Goldman - Convex real projective structures on compact surfaces, Journ. Diff. Geom. 31 (1990) p.791-845.

[18] I. Gol'dsheid, G. Margulis - Lyapounov indices of a product of random matrices, Russ. Math. Surv. 44 (1989) p.11-71.

[19] M. Gromov, I. Piatetski-Shapiro - Non arithmetic groups in Lobachevsky spaces, Publ. IHES 66 (1988) p.93-103.

[20] Y. Guivarc'h - Produits de matrices aléatoires et applications, Erg. Th. Dyn. Sys. 10 (1990), p.483-512.

[21] Y. Guivarc'h, G. Raugi - Propriétés de contraction d'un semigroupe de matrices inversibles, Isr. Jour. Math. 65 (1989) p.165-196.

[22] S. Helgason - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).
[23] N. Hitchin - Lie groups and Teichmüller space, Topology 31 (1992) p.449-473.
[24] D. Johnson, J. Millson - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." Progress in Math. 67 (1984) 48-106.
[25] D. Kazhdan, G. Margulis - A proof of Selberg hypothesis. Math.Sborn.75 (1968) p.162-168.
[26] T. Kobayashi - Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. 285 (1989) p.249-263.
[27] T. Kobayashi - Criterion for proper action on homogeneous space of reductive type, Journal of Lie Theory 6 (1996) p.147-163.
[28] T. Kobayashi - Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-riemannian homogeneous manifolds, in Lecture notes of the European School on Group Theory in 1994 (B.Orsted and H.Schlichtkrull editors) Persp. in Math. 17 Acad. Press (1997).
[29] J.L. Koszul - Déformation des connexions localement plates, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 103-114.
[30] G. Margulis - Free totally discontinuous groups of affine transformations, Soviet. Math. Dokl. 28 (1983) p.435-439.
[31] G. Margulis - Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer (1991).
[32] G. Margulis, G. Soifer - Maximal subgroup of infinite index in finitely generated linear group, Jour. of Alg. 69 (1981) p.1-23.
[33] G. Prasad - $\mathbb{R}$-regular elements in Zariski dense subgroups, Oxford Quaterly Jour. Math. 45 (1994) p.541-545.
[34] Raghunathan - Discrete subgroups of Lie groups, Springer(1972)
[35] M. Rosenlicht - Hardy fields, Jour. Math. Anal. Appl. 93 (1983) p.297-311.
[36] P. Samuel - Theorie algébrique des nombres, Hermann Paris (1971).
[37] A. Selberg - On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Contribution to Function theory, Tata (1960) p.147-164.
[38] J-P. Serre -Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Studies 70,p.77-169.
[39] W. Thurston - The geometry and topology of three manifolds, in preparation.
[40] J. Tits - Free subgroups in linear groups, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.
[41] G. Tomanov - On a conjecture of L.Auslander, Compte Rend. Acad. Sc. Bulg. 43 (1990) p.9-12
[42] J. Vey - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 24 (1970) p.641-665.
[43] B. Wehrfritz - Infinite linear groups, Springer (1973).
[44] A. Weil - Basic number theory, Springer (1973).
[45] R. Zimmer - Ergodic theory and semisimple groups, Birkhauser (1984)

Yves Benoist, CNRS-Université Paris 7 benoist@math.jussieu.fr