

---

# Dynamique $p$ -adique

(d'après les exposés de Jean-Christophe Yoccoz)

**Serge Cantat, Antoine Chambert-Loir**

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex

*Courriel:* (serge.cantat,antoine.chambert-loir)@univ-rennes1.fr

**Résumé.** — Ce texte est une introduction à la dynamique des fractions rationnelles sur un corps  $p$ -adique. Il reprend le cours que Jean-Christophe Yoccoz avait fait lors des *États de la recherche* de mai 2006 et en développe certains points. La plupart des résultats présentés sont dûs à Benedetto, Bézivin, Hsia, Lubin, Morton, Rivera-Letelier et Silverman.

**Abstract.** — This paper is an introduction to the dynamics of rational fractions over a  $p$ -adic field. It follows the lectures that Jean-Christophe Yoccoz gave during the *États de la recherche* in May 2006, and develops certain points. Most of the results to be explained here are due to Benedetto, Bézivin, Hsia, Lubin, Morton, Rivera-Letelier and Silverman.

---

## Table des matières

1. Introduction et motivations . . . . .	1
2. Espace de Berkovich . . . . .	5
3. Action des fractions rationnelles sur l'espace hyperbolique $p$ -adique	21
4. Théorie de Fatou-Julia, domaines quasi-périodiques . . . . .	26
5. Le cas des polynômes . . . . .	37
Références . . . . .	47

## 1. Introduction et motivations

Afin de motiver les spécialistes de dynamique holomorphe, formulons quelques problèmes ouverts de dynamique complexe qui peuvent être reliés à des questions de dynamique  $p$ -adique (voir [22] pour plus de détails).

**1.1. Hyperbolicité.** — Soit  $f \in \mathbf{C}(z)$  une fraction rationnelle d'une variable complexe. Nous identifierons  $f$  à l'endomorphisme holomorphe de la droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  qu'elle induit, et nous noterons  $d$  son degré. Nous supposons toujours que  $d$  est supérieur ou égal à 2.

Les points critiques de  $f$  sont les points  $z$  de la droite projective en lesquels la différentielle de  $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  s'annule ; notons  $\text{Crit}(f)$  l'ensemble de ces points. L'ensemble postcritique de  $f$  est la réunion des orbites positives des points critiques de  $f$  :

$$P(f) = \bigcup_{\substack{n>0 \\ y \in \text{Crit}(f)}} f^n(y).$$

Les points périodiques de  $f$  peuvent être organisés en trois catégories de la manière suivante. Soit  $z$  un point périodique de période  $p$ . La différentielle de  $f^p$  au point  $z$  est une application linéaire de  $T_z(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$  dans lui même ; c'est donc une homothétie dont le rapport est noté  $(f^p)'(z)$ . Lorsque  $z$  est différent de  $\infty$ ,  $(f^p)'(z)$  est la dérivée usuelle de la fraction rationnelle  $f^p$ , évaluée en  $z$ . On dit que

- $z$  est *répulsif* si  $|(f^p)'(z)| > 1$ ,
- $z$  est *indifférent* si  $|(f^p)'(z)| = 1$ ,
- $z$  est *attractif* si  $|(f^p)'(z)| < 1$ , et *super-attractif* si  $(f^p)'(z) = 0$ .

Lorsque  $z$  est un point périodique attractif de période  $p$ , l'orbite de  $z$  est un cycle attractif : il existe un ouvert de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  contenant l'orbite de  $z$  tel que l'orbite de tout point dans cet ouvert soit attirée par l'orbite de  $z$  (voir [23] §8 et §9). Par ailleurs, comme tout cycle attractif attire au moins un point critique de  $f$ , l'union des cycles attractifs est contenue dans l'adhérence de l'ensemble postcritique ([23], théorème 8.6).

L'ensemble de Fatou de  $f$  est le plus grand ouvert de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  sur lequel la famille  $(f^n)$  des itérés de  $f$  (considérés comme applications holomorphes de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  dans lui-même) forme, localement, une famille normale. Il contient les cycles attractifs. Son complémentaire est l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}(f)$  ; il coïncide avec l'adhérence des points périodiques répulsifs de  $f$  ([23], §14).

On dit que  $f$  est *hyperbolique* lorsque les trois conditions équivalentes suivantes sont satisfaites (voir [22], théorème 2.2 ; voir aussi [29]) :

- (i) l'adhérence de l'ensemble postcritique de  $f$  est disjointe de l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}(f)$  ;
- (ii) tous les points critiques de  $f$  sont attirés par des cycles attractifs ;
- (iii) l'application  $f$  est dilatante au voisinage de  $\mathcal{J}(f)$ , ce qui signifie qu'il existe une métrique conforme  $\rho$  définie sur un voisinage de  $\mathcal{J}(f)$  telle que  $|f'(z)|_\rho > 1$  pour tout point  $z$  de  $\mathcal{J}(f)$ .

L'application  $f$  est donc hyperbolique lorsque l'orbite des points critiques (au voisinage desquels  $f$  cesse évidemment d'être dilatante) ne se mêle pas à l'ensemble de

Julia (là où sont localisés les points répulsifs). La condition (ii) montre que l'hyperbolicité est une condition ouverte ; ainsi, l'ensemble des fractions rationnelles de degré  $d$  qui sont hyperboliques forme un ouvert dans l'espace des fractions rationnelles de degré  $d$ . La *conjecture d'hyperbolicité* stipule que cet ouvert est dense :

**Conjecture 1.1.1 (voir [22]).** — Soit  $d$  un entier supérieur ou égal à 2. L'ensemble des applications rationnelles qui sont hyperboliques forme un ouvert *dense* dans l'ensemble des applications rationnelles de degré  $d$ .

Dans le cas des *polynômes quadratiques*

$$(1.1.1) \quad f_c(z) = z^2 + c$$

une variante de la conjecture affirme que l'ensemble des nombres complexes  $c$  tels que le point critique 0 est attiré par un cycle attractif de  $f_c$  forme un ouvert dense de la droite complexe  $\mathbf{C}$ . Puisque tout cycle attractif attire l'unique point critique 0, il revient au même de dire que, pour un ouvert dense de paramètres  $c$ , ou bien  $f_c$  possède un cycle attractif, ou bien  $f_c^n(0)$  tend vers l'infini. Même dans ce cas, la conjecture est encore ouverte à l'heure actuelle.

**1.2. Renormalisation.** — Soit  $f_c$  un polynôme quadratique pour lequel l'ensemble postcritique est borné ; autrement dit,  $c$  appartient par définition à l'ensemble de Mandelbrot

$$M = \{c \in \mathbf{C}; \text{ la suite } (f_c^n(0)) \text{ est bornée}\}$$

(voir [23], appendix G). On dit que l'itéré  $f_c^n$  de  $f_c$  est *renormalisable* (ou que  $f_c$  est renormalisable au temps  $n$ ) s'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  contenant l'origine 0, tels que

- (a)  $f_c^n(U) = V$  et  $\overline{U} \subset V$  ;
- (b) l'application  $f_c^n : U \rightarrow V$  est propre et de degré 2 ;
- (c) pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $f_c^{nk}(0)$  appartient à  $U$ .

Autrement dit, l'itéré  $f_c^n$  de  $f_c$  (qui est un polynôme de degré  $2^n$ ) se comporte au voisinage du point critique 0 comme un polynôme de degré 2 dont l'orbite postcritique est bornée. On démontre alors que  $f_c^n : U \rightarrow V$  est topologiquement conjugué, sur  $U$ , à un polynôme quadratique  $f_{c'}$  (voir [14]). La condition (c) assure que l'orbite du point critique de  $f_{c'}$  est à nouveau bornée, donc que  $c' \in M$ .

On dit que le polynôme quadratique  $f_c$  est *infinitement renormalisable* s'il l'est au temps  $n$  pour un ensemble infini d'entiers  $n$ . Pour montrer la conjecture d'hyperbolicité, il suffit de montrer que l'ensemble des paramètres  $c$  pour lesquels  $f_c$  est infinitement renormalisable est d'intérieur vide. Ceci est expliqué, par exemple, dans l'article de synthèse de McMullen [22] (voir aussi [29]). Les paramètres pour lesquels  $f_c$  est renormalisable forment des petites copies de l'ensemble de Mandelbrot à l'intérieur de

lui-même. La conjecture d'hyperbolicité pour la famille  $(f_c)$  s'avère donc équivalente au fait que toute intersection décroissante de telles copies de  $M$  soit d'intérieur vide. Le théorème suivant concerne l'intersection de cet ensemble avec l'axe réel.

**Théorème 1.2.1 (Lyubich).** — *L'ensemble des valeurs réelles du paramètre  $c$  tel que l'application  $z \mapsto z^2 + c$  soit infiniment renormalisable est de mesure de Lebesgue nulle.*

Si la conjecture d'hyperbolicité n'est pas satisfaite, on peut trouver un nombre algébrique  $c$  pour lequel  $f_c$  est infiniment renormalisable. La conjecture suivante est donc plus forte que la conjecture d'hyperbolicité pour la famille  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbf{C}$ .

**Conjecture 1.2.2.** — Si  $c$  est un nombre algébrique, l'application  $z \mapsto z^2 + c$  n'est pas infiniment renormalisable.

**1.3. Dynamique  $p$ -adique.** — En vue de comprendre la dynamique de l'application  $z \mapsto z^2 + c$  lorsque  $c$  est un nombre algébrique, il est naturel de chercher à décrire la restriction de cette dynamique à l'ensemble des nombres complexes  $z$  qui sont des nombres algébriques. Nous avons alors à notre disposition diverses topologies sur l'ensemble  $\overline{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques. Le premier niveau de cette étude, celui qui est abordé ici, en concerne les aspects  $p$ -adiques, ou  $p$  est un nombre premier, et plus précisément ceux liés à la dynamique de cette application sur l'ensemble des « nombres complexes  $p$ -adiques ». Le deuxième niveau prendrait en compte l'action du groupe de Galois de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  sur  $\mathbf{Q}_p$ <sup>(1)</sup> et le troisième niveau se devrait de mettre ensemble les différentes topologies de  $\mathbf{Q}$ , c'est-à-dire les informations  $p$ -adiques, lorsque  $p$  parcourt l'ensemble des nombres premiers, et les informations complexes.

Cet article présente ainsi quelques résultats fondamentaux de dynamique  $p$ -adique ; il ne contient quasiment aucune démonstration complète. Le paragraphe 2 introduit la droite projective au sens de Berkovich : il s'agit d'un espace compact connexe métrisable contenant la droite projective « naïve »  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  comme partie dense et totalement discontinue. Le suivant décrit l'action des fractions rationnelles sur cet espace. Le paragraphe 4 amorce l'étude de la dynamique des transformations rationnelles. Celle-ci est précisée au paragraphe 5 dans le cas des polynômes.

Signalons aussi que ces notes ne présentent qu'un état partiel de la question au moment de la conférence. Nous espérons qu'elles fourniront aide et motivation pour se plonger dans les articles originaux.

Quelques compléments concernant les phénomènes d'équidistribution sont évoqués dans l'article de Chambert-Loir de ce volume. Le lecteur intéressé par les aspects ergodiques pourra également consulter l'article [17] de Favre et Rivera-Letelier ; pour des résultats effectifs en degré 2 sur une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ , on consultera [4].

1. Pour tout nombre premier  $p$ , le groupe des automorphismes de  $\mathbf{C}_p$  qui sont continus pour la topologie  $p$ -adique coïncide avec le groupe de Galois de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  sur  $\mathbf{Q}_p$ .

**Remerciements.** — Nous remercions Jean-Yves Briend, Antoine Ducros et Charles Favre pour leurs commentaires et pour avoir mis à notre disposition leurs notes des exposés de Yoccoz, ainsi que le rapporteur pour ses nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer ce texte.

## 2. Espace de Berkovich

Dans cette partie nous présentons une construction « à la Dedekind » de l'espace de Berkovich, aussi appelé espace hyperbolique  $p$ -adique. Comme nous le verrons, l'inégalité triangulaire ultramétrique confère à l'espace des boules de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  une structure d'arbre réel ; c'est ce qui permet de construire l'espace hyperbolique  $p$ -adique. L'approche de Berkovich sera ensuite rapidement résumée.

**2.1. Notations.** — Soit  $p$  un nombre premier, fixé dans tout ce texte. Nous noterons  $\mathbf{F}_p$  le corps à  $p$  éléments.

La valeur absolue  $p$ -adique  $|\cdot|_p$  sur le corps  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels est définie par

$$\left| p^r \frac{a}{b} \right|_p = p^{-r}$$

si  $a$ ,  $b$  et  $r$  sont des entiers,  $a$  et  $b$  n'étant pas multiples de  $p$ , et  $|0|_p = 0$ . Cette valeur absolue est *ultramétrique* au sens où  $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$  pour tous nombres rationnels  $x$  et  $y$ . Le corps  $\mathbf{Q}$  n'est pas complet pour cette valeur absolue <sup>(2)</sup> ; on note  $\mathbf{Q}_p$  son complété ; la valeur absolue  $p$ -adique s'étend de manière unique en une valeur absolue ultramétrique sur  $\mathbf{Q}_p$ . Pour alléger la notation, on notera  $|\cdot|$  la valeur absolue  $p$ -adique dans la suite de ce texte.

Par l'inégalité ultramétrique, l'ensemble des nombres  $p$ -adiques de valeur absolue inférieure ou égale à 1 est un sous-anneau de  $\mathbf{Q}_p$  qu'on note  $\mathbf{Z}_p$  et qu'on appelle l'anneau des entiers  $p$ -adiques.

Soit  $\overline{\mathbf{Q}_p}$  une clôture algébrique du corps  $\mathbf{Q}_p$ . La valeur absolue  $p$ -adique s'étend de manière unique à  $\overline{\mathbf{Q}_p}$  mais ce corps n'est pas complet <sup>(3)</sup>. Son complété, le corps des « nombres complexes  $p$ -adiques » est alors noté  $\mathbf{C}_p$  ; c'est un corps complet et algébriquement clos.

L'ensemble  $|\mathbf{Q}_p^*|$  des valeurs prises par la valeur absolue sur  $\mathbf{Q}_p^*$  coïncide avec l'ensemble  $p^{\mathbf{Z}}$  des puissances entières de  $p$  ; celui des valeurs prises par la valeur absolue sur  $\overline{\mathbf{Q}_p}^*$  est égal à  $p^{\mathbf{Q}}$ , et ceci reste vrai pour  $\mathbf{C}_p^*$ .

2. Cela contredirait le théorème de Baire. L'efficacité  $p$ -adique de la méthode de Newton permet aussi d'expliciter des suites de Cauchy qui n'ont pas de limite ; par exemple la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = (u_n - 7/u_n)/2$  n'a pas de limite dans  $\mathbf{Q}$  mais converge dans  $\mathbf{Q}_2$  vers une racine carrée de  $-7$ .

3. Il est de dimension infinie dénombrable sur  $\mathbf{Q}_p$ .

La valeur absolue  $p$ -adique étant ultramétrique, l'ensemble  $\mathcal{O}$  des éléments  $z \in \mathbf{C}_p$  tels que  $|z| \leq 1$  est un anneau, l'*anneau des entiers* de  $\mathbf{C}_p$ . On a  $\mathcal{O} \cap \mathbf{Q}_p = \mathbf{Z}_p$ . Le sous-ensemble  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$  formé des  $z$  tels que  $|z| < 1$  en est l'unique idéal maximal. Son corps résiduel  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$  est une clôture algébrique de  $\mathbf{F}_p$ ; on la note  $\overline{\mathbf{F}_p}$  et l'on note  $z \mapsto \bar{z}$  l'application de réduction de  $\mathcal{O}$  dans  $\overline{\mathbf{F}_p}$ .

Nous notons  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  la droite projective sur  $\mathbf{C}_p$ , réunion de  $\mathbf{C}_p$  et d'un point  $\infty$ . Les coordonnées homogènes sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  seront notées  $[x : y]$ ; la coordonnée affine sur  $\mathbf{C}_p$  sera notée  $z$ , de sorte que  $z = x/y$ . Enfin, Möb désigne le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}_p)$  des transformations de Möbius à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ ; il opère naturellement par homographies sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . De même,  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p}) = \overline{\mathbf{F}_p} \cup \{\infty\}$  est la droite projective sur  $\overline{\mathbf{F}_p}$ ; son groupe d'homographies est le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\overline{\mathbf{F}_p})$ .

L'application de réduction modulo  $\mathfrak{m}$  définie sur  $\mathcal{O}$  s'étend en une application de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  à valeurs dans  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$ ,

$$\pi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \rightarrow \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p}),$$

pour laquelle  $\pi([x : y]) = \infty$  quel que soit le point  $z$  satisfaisant  $|z| > 1$ ,  $y$  compris  $z = \infty$ . On peut décrire  $\pi$  de la façon suivante. Soit  $z$  un point de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  de coordonnées homogènes  $[x : y]$ ; quitte à diviser  $x$  et  $y$  par celui dont la valeur absolue est égale à  $\max(|x|, |y|)$ , nous pouvons supposer que  $\max(|x|, |y|) = 1$ ; ceci signifie que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathcal{O}$  mais qu'ils n'appartiennent pas tous deux à  $\mathfrak{m}$ . Alors,  $\pi(z)$  est le point de  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$  de coordonnées homogènes  $[\bar{x} : \bar{y}]$ . Ce point ne dépend que de  $z$  et pas du choix de  $x$  et  $y$ ; si  $z \in \mathcal{O}$ , c'est-à-dire si l'on peut prendre  $y = 1$ , alors  $[\bar{x} : \bar{y}] = [\bar{z} : \bar{1}]$ ; sinon, on peut prendre  $x = 1$  et  $y = 1/z$ , d'où  $[\bar{x} : \bar{y}] = [\bar{1} : \bar{0}] = \infty$ .

Pour tout élément  $\alpha$  de  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$ , nous noterons  $B(\alpha)$  la partie de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  définie comme la fibre  $\pi^{-1}(\alpha)$  de  $\pi$ . Ainsi, lorsque  $\alpha \neq \infty$ ,  $B(\alpha)$  est l'ensemble des  $z \in \mathcal{O}$  tel que  $z \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}}$ . De même,  $B(\infty)$  est l'ensemble  $\{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ . Ces parties sont appelées *boules* (voir le paragraphe 2.3).

**2.2. Réduction.** — Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $d$  à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  qu'on écrit sous la forme  $R = P/Q$  pour deux polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  premiers entre eux avec  $d = \max(\deg P, \deg Q)$ . L'endomorphisme de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  déterminé par  $R$  est encore noté  $R$ . En coordonnées homogènes  $[x : y]$ , avec  $z = x/y$  et  $\infty = [1 : 0]$ , nous avons donc

$$R([x : y]) = [A(x, y) : B(x, y)]$$

où  $A$  et  $B$  sont les polynômes homogènes de degré  $d$  définis par  $A(X, Y) = Y^d P(X/Y)$  et  $B(X, Y) = Y^d Q(X/Y)$ . Quitte à diviser  $A$  et  $B$  par le coefficient de plus grande valeur absolue, nous pouvons supposer que tous les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  de  $A$  et de  $B$  appartiennent à  $\mathcal{O}$  et qu'au moins un des coefficients n'est pas dans  $\mathfrak{m}$ ; autrement dit,

$$A(X, Y) = \sum a_i X^i Y^{d-i}, \quad B(X, Y) = \sum b_j X^j Y^{d-j}$$

avec

$$(2.2.1) \quad \max_{i,j}(|a_i|, |b_j|) = 1.$$

Notons  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  les polynômes à coefficients dans  $\bar{\mathbf{F}}_p$  obtenus de  $A$  et  $B$  par réduction modulo  $\mathfrak{m}$  de leurs coefficients. Si  $\bar{B} \neq 0$ , on définit la réduction de  $R$  modulo  $\mathfrak{m}$  comme la fraction rationnelle  $\bar{R} = \bar{A}/\bar{B}$ ; elle ne dépend pas des choix faits pour  $A$  et  $B$ . Lorsque  $\bar{B} = 0$ , on pose  $\bar{R} = \infty$ .

**Exemple 2.2.1.** — Supposons que  $R(z) = z^2 + c$ . Si  $|c| \leq 1$ , on peut prendre  $A(x, y) = x^2 + cy^2$  et  $B(x, y) = y^2$ , de sorte que  $\bar{R}(z) = z^2 + \bar{c}$ ; en particulier,  $\bar{R}(z) = z^2$  si  $|c| < 1$ . En revanche, si  $|c| > 1$ , on prend  $A(x, y) = c^{-1}x^2 + y^2$  et  $B(x, y) = c^{-1}y^2$ , et l'on a  $\bar{R}(z) = \infty$ .

Lorsque  $R$  est la transformation de Möbius définie par  $R(z) = pz + 1/p$ , alors  $\bar{R}(z) = \infty$  pour tout  $z \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{F}}_p)$ . En particulier,  $\bar{R}$  n'est pas inversible. Cet exemple montre en particulier que  $\bar{R} \circ \pi$  ne coïncide pas toujours avec  $\pi \circ R$ .

On dit que  $R$  a une réduction *non triviale* si  $\bar{R}$  n'est pas constante, ce qui revient à dire que  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Le degré de  $\bar{R}$  est inférieur ou égal à celui de  $R$ ; en fait, la différence  $\deg R - \deg \bar{R}$  est égale au degré du pgcd des polynômes  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ . On dit que  $R$  a *bonne réduction* lorsque le degré de  $\bar{R}$  est égal au degré de  $R$ , autrement dit lorsque  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont premiers entre eux. Si c'est le cas, on a

$$\bar{R} \circ \pi = \pi \circ R.$$

Soit en effet  $z = [x : y]$  un point de  $\mathbf{P}^1(\mathcal{O}_p)$ , où  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $\mathcal{O}$  tels que  $\max(|x|, |y|) = 1$ . Comme  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont premiers entre eux,  $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y})$  et  $\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$  ne sont pas tous deux nuls. Puisque la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  de  $A(x, y)$  est  $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y})$ , et de même pour  $B(x, y)$ , la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  du point  $R(z) = [A(x, y) : B(x, y)]$  est le point  $[\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{B}(\bar{x}, \bar{y})]$ . De plus,  $\pi(z) = [\bar{x} : \bar{y}]$  et  $\bar{R}(\pi(z))$  est donc le point de coordonnées homogènes  $[\bar{A}(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{B}(\bar{x}, \bar{y})]$ .

Dans le cas de bonne réduction, l'image réciproque par  $R$  de toute boule  $B(\alpha)$  est donc la réunion des boules  $B(\beta)$ , pour  $\beta \in \bar{R}^{-1}(\alpha)$ .

Revenons au cas général en conservant les hypothèses faites sur  $A$  et  $B$  : leurs coefficients appartiennent à  $\mathcal{O}$  et ne sont pas tous dans l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . Soit  $\text{Res}(A, B)$  le résultant<sup>(4)</sup> des polynômes  $A$  et  $B$ ; notons

$$\Delta(R) = |\text{Res}(A, B)|$$

sa valeur absolue; c'est une variante du *discriminant* de  $R$  qu'ont introduit Morton et Silverman dans [24]. Comme le résultant  $\text{Res}(A, B)$  est un polynôme à coefficients

4. Il s'agit du résultant des polynômes homogènes  $A$  et  $B$  de degrés  $d$ ; c'est aussi celui des polynômes  $A(x, 1)$  et  $B(x, 1)$  considérés comme polynômes de degrés  $\leq d$ . Il se calcule par exemple comme le déterminant d'une matrice carrée (*matrice de Sylvester*) de taille  $2d$ .

entiers en les coefficients des polynômes  $A$  et  $B$ ,  $\text{Res}(A, B)$  appartient à  $\mathcal{O}$ , donc  $\Delta(R) \leq 1$  (cf. équation 2.2.1). En outre, le résultant de  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  coïncide avec la réduction de  $\text{Res}(A, B)$ . Par suite,  $\overline{\text{Res}(A, B)} \neq 0$  si et seulement si les polynômes  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  n'ont pas de racine commune dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . Autrement dit,  $\Delta(R) = 1$  équivaut à ce que  $R$  ait bonne réduction. Le nombre  $\Delta(R)$  permet donc de mesurer le « défaut » de bonne réduction (voir [24], §4, ainsi que le paragraphe 4.4).

**Remarque 2.2.2.** — La notion de bonne réduction dépend du choix de coordonnées homogènes utilisées pour définir la réduction de  $R$ . Si l'on conjugue  $R$  par une transformation de Möbius, la fraction rationnelle obtenue peut avoir bonne réduction sans que ce soit le cas pour  $R$ . Nous dirons que  $R$  est *simple* si  $R$  est conjuguée par un élément de Möb à une transformation ayant bonne réduction (voir §4.4).

**Exercice 2.2.3.** — Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 2$ ,  $P(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n$ .

1) Démontrer que  $P$  a bonne réduction si et seulement si  $|a_d| = 1$  et  $|a_n| \leq 1$  pour tout  $n$ .

2) Démontrer que  $P$  est simple si  $|a_n|^{d-1} \leq |a_d|^{n-1}$  pour tout  $n$ . (Faire un changement de variables  $z' = \lambda z$ .)

3) Donner un exemple de polynôme simple qui n'a pas bonne réduction.

**2.3. Boules de la droite projective.** — Pour  $a \in \mathbb{C}_p$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , notons  $B^\bullet(a, r)$  et  $B^\circ(a, r)$  l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}_p$  tels que  $|z - a| \leq r$  et  $|z - a| < r$  respectivement. Ces ensembles sont appelés *boules* (ou *disques*) respectivement circonférenciées et non circonférenciées. (Contrairement à l'usage en topologie générale, il convient ici de ne pas considérer les singletons comme des boules.) Le diamètre et le rayon d'une telle boule sont tous deux égaux à  $r$  et, contrairement au cas archimédien, tout point d'une boule en est un centre ; de fait, on a  $B^\circ(z, r) = B^\circ(a, r)$  pour tout  $z \in B^\circ(a, r)$  et  $B^\bullet(z, r) = B^\bullet(a, r)$  pour tout  $z \in B^\bullet(a, r)$ . Suivant les valeurs du rayon, ces boules doivent être distinguées. Si  $r \in p^{\mathbb{Q}}$ , on dira que  $B^\circ(a, r)$  est une *boule ouverte* et que  $B^\bullet(a, r)$  est une *boule fermée*. Si  $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus p^{\mathbb{Q}}$ , les boules  $B^\circ(a, r)$  et  $B^\bullet(a, r)$  coïncident ; on dit que cette boule est *irrationnelle*.

La terminologie utilisée est uniquement mnémotechnique. En effet, la topologie de  $\mathbb{C}_p$  définie par la valeur absolue  $p$ -adique étant totalement discontinue, toutes ces boules sont à la fois ouvertes et fermées.

Dans la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ , on dispose, en plus des boules précédentes, de boules contenant  $\infty$  : on dira qu'une partie  $B$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  contenant  $\infty$  est une boule ouverte (*resp.* fermée, *resp.* irrationnelle) si son complémentaire  $\complement B$  est une boule fermée (*resp.* ouverte, *resp.* irrationnelle) dans  $\mathbb{C}_p$ .

Chaque boule ouverte  $B^\circ(a, r)$  est contenue dans une unique plus petite boule fermée, à savoir  $B^\bullet(a, r)$ . Par contre,  $B^\bullet(a, r)$  contient une infinité de boules ouvertes de



rayon  $r$ . Lorsque  $a = 0$  et  $r = 1$ , ces boules sont précisément les  $B(\alpha)$ , pour  $\alpha \in \overline{\mathbf{F}_p}$  (fin du §2.1).

On appellera *couronne* une partie  $C$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  dont le complémentaire est la réunion disjointe de deux parties qui sont des boules ou des points.

**Remarque 2.3.1.** — (1) La boule fermée  $B^\bullet(0, 1)$  coïncide avec l'anneau  $\mathcal{O}$ . Si  $a$  appartient à  $\mathcal{O}$ , la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon 1 coïncide avec la classe de  $a$  modulo l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ .

(2) Soit  $\alpha$  un élément de  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$  distinct de  $\infty$ . La fibre  $B(\alpha)$  de la projection  $\pi$  s'identifie à la boule ouverte de rayon 1 centrée en tout élément de  $\mathbf{C}_p$  congru à  $\alpha$  modulo  $\mathfrak{m}$ .

(3) Les transformations de Möbius envoient boules sur boules en préservant le type de celles-ci. En effet, le groupe de Möbius est engendré par les translations et l'involution  $z \mapsto 1/z$  et ces applications envoient boules sur boules en préservant leur type.

**Exercice 2.3.2.** — 1) Soient  $B$  et  $B'$  deux boules d'intersection non vide telles que  $B \cup B' \neq \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Démontrer que  $B \subset B'$  ou  $B' \subset B$ . (Commencer par traiter le cas où  $B$  et  $B'$  ne contiennent pas  $\infty$ .)

2) En déduire qu'une réunion de boules dont les intersections deux à deux ne sont pas vides est ou bien une boule, ou bien le complémentaire d'un point dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , ou bien  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .

3) En déduire qu'une intersection décroissante de boules est soit vide, soit un point, soit une boule. Nous verrons plus loin, notamment au paragraphe §5.4, qu'une telle intersection peut être vide.

**Proposition 2.3.3.** — Soit  $P \in \mathbf{C}_p[z]$  un polynôme non constant et soit  $B$  une boule de  $\mathbf{C}_p$ .

1) L'image de  $B$  par  $P$  est une boule de même nature.

2) Il existe un entier  $t \in \{1, \dots, \deg(P)\}$  et des boules  $B_1, \dots, B_t$  de même nature que  $B$ , deux à deux disjointes, telles que l'image réciproque de  $B$  par  $P$  soit la réunion des  $B_i$ .

L'exercice suivant sera utile à la démonstration.

**Exercice 2.3.4.** — Soit  $P(z) = \sum a_k z^k$  un polynôme de  $\mathbf{C}_p[z]$ . Démontrer que

$$\sup_{B^\circ(0,r)} |P| = \sup_{B^\bullet(0,r)} |P| = \max(|a_k| r^k)$$

(voir la preuve du lemme 2.9.3 pour un argument complet).

*Démonstration (d'après [1], p. 159).* — Le lecteur pourra consulter [1] pour une preuve de l'assertion 1). On ne traite en outre l'assertion 2) que dans le cas où  $B = B^\bullet(0, 1)$ . Soit  $b$  un point de  $\mathbf{C}_p$  tel que  $|P(b)| \leq 1$ . La boule unité  $B^\bullet(0, 1)$  étant ouverte dans  $\mathbf{C}_p$ , il existe un nombre réel  $r > 0$  tel que  $|P(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in B^\bullet(b, r)$ .

La réunion de toutes ces boules  $B^\bullet(b, r)$  est une boule ouverte, fermée ou irrrationnelle, dont l'on note encore  $r$  le rayon ; elle est maximale parmi les boules contenues dans  $P^{-1}(B^\bullet(0, 1))$  et contenant  $b$ . Si  $\sup_{B^\circ(b, r)} |P| < 1$ , la formule de l'exercice précédent prouve qu'on peut augmenter  $r$  tout en restant contenu dans  $P^{-1}(B^\bullet(0, 1))$ . Par suite,  $\sup_{B^\circ(b, r)} |P| = 1$ , et la formule en question entraîne que  $r \in p^{\mathbb{Q}}$  puis que  $B(b, r) = B^\bullet(b, r)$ .

Si deux boules de  $\mathbf{C}_p$  se coupent, l'une est incluse dans l'autre. Si l'on note  $B_1, B_2 \dots$  les boules maximales construites en faisant varier  $b$ , on obtient donc des boules fermées deux à deux disjointes dont la réunion est égale à  $P^{-1}(B)$ .

Pour conclure la démonstration, il suffit de prouver que  $P$  s'annule sur chacune des boules  $B_i$ . Posons  $B_i = B^\bullet(b_i, r_i)$  et écrivons  $P$  sous la forme

$$P(z) = c \prod_{j=1}^{\deg(P)} (z - z_j),$$

où  $z_1, \dots, z_{\deg(P)}$  sont les zéros de  $P$ , répétés suivant leur multiplicité. Si  $P$  ne s'annule pas sur  $B_i$ , on a  $|z_j - b_i| > r_i$  pour tout  $j$ , donc  $|z - z_j| = |(b_i - z_j) + (z - b_i)| = |b_i - z_j|$  pour tout  $j$  et tout  $z \in B_i$ . Ainsi,  $|P|$  est constant sur  $B_i$ , de module  $|c| \prod |b_i - z_j|$ . Ce calcul reste valable pour tout point  $z$  de la boule  $B^\circ(b_i, \min(|z_j - b_i|))$ , et cette boule contient strictement  $B_i$ . Cette contradiction prouve que  $P$  s'annule sur  $B_i$ .  $\square$

**Exercice 2.3.5.** — 1) On considère le polynôme  $P(z) = z^2 - 1$ . Pour tout nombre réel  $r > 0$ , déterminer l'image réciproque par  $P$  des boules  $B^\circ(0, r)$  et  $B^\bullet(0, r)$ . En déduire que la proposition précédente ne s'étend pas aux boules contenant  $\infty$ .

2) Soient  $R_1$  et  $R_2$  les fractions rationnelles définies par  $R_1(z) = z/p - z^2$  et  $R_2(z) = z^2 - 1/z$ . Décrire l'image réciproque de la boule  $B^\bullet(0, r)$  par  $R_1$  et par  $R_2$  en fonction de  $r > 0$ .

3) Compléter la démonstration de la proposition 2.3.3 afin de traiter le cas général.

**Exercice 2.3.6.** — 1) Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes d'une variable à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ . Soit  $B$  une boule de  $\mathbf{C}_p$ . On note  $r$  le rayon de la boule  $P(B)$  et l'on suppose que  $|P(z) - Q(z)| < r$  pour tout point  $z$  de  $B$ . Montrer que  $Q(B) = P(B)$ .

2) Soit  $P$  un élément de  $\mathbf{C}_p[z]$  et soit  $B$  une boule. On suppose que  $P(B)$  contient strictement la boule  $B$ . Montrer que  $P$  a un point fixe dans  $B$ . (Indication : se ramener au cas où  $B$  est centrée à l'origine, puis montrer que le polynôme  $Q$  défini par  $Q(z) = P(z) - z$  envoie  $B$  sur  $P(B)$  surjectivement)

Nous nous sommes contentés de décrire l'action des polynômes sur les boules, mais les résultats qui viennent d'être énoncés peuvent être étendus aux fractions rationnelles. Le lecteur pourra se reporter, par exemple, au chapitre 2 de [25] ou aux préliminaires de [7] pour des énoncés ou des références précises.

**2.4. Construction « à la Dedekind » de l'espace hyperbolique  $p$ -adique.** — L'espace hyperbolique  $p$ -adique  $\mathbf{H}_p$ , que nous allons maintenant définir, est réunion de trois sous-ensembles disjoints notés  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  dont les éléments sont dénommés respectivement *points rationnels*, *irrationnels* et *singuliers*. L'ensemble  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  désignera la réunion de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ .

**Définition 2.4.1.** — On appelle *coupure irrationnelle* une partition  $S = \{B, B'\}$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  en deux boules irrationnelles disjointes.

On appelle *coupure canonique* la partition  $S_{\text{can}} = \{B(\alpha); \alpha \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)\}$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  en les boules ouvertes  $B(\alpha)$  indexées par  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .

Une *coupure rationnelle* est une partition de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  qui se déduit de la coupure canonique par un élément de Möb.

Les éléments de la coupure canonique sont donc les fibres de  $\pi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \rightarrow \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .

On remarquera qu'une coupure irrationnelle est déterminée par sa boule irrationnelle qui ne contient pas  $\infty$ . De même, une coupure rationnelle est déterminée par son unique boule ouverte contenant l'infini, donc aussi par son complémentaire, qui est une boule *fermée* ne contenant pas  $\infty$ . On identifiera toute boule irrationnelle (*resp.* fermée) avec la coupure irrationnelle (*resp.* rationnelle) qui lui est ainsi associée. Ceci définit une bijection entre l'ensemble des boules fermées ou irrationnelles ne contenant pas l'infini et l'ensemble des coupures.

Pour tout nombre réel  $r > 0$ , on notera ainsi  $S(r)$  la coupure associée à la boule  $B^*(r)$ ; c'est une coupure irrationnelle si  $\log_p(r)$  est irrationnel, et une coupure rationnelle (obtenue par homothétie de rapport  $\xi$  avec  $|\xi| = r$  à partir de la coupure canonique) si  $\log_p(r)$  est rationnel. Les coupures  $S(a, r)$  sont définies de façon similaire.

Ce dictionnaire entre coupures et boules (fermées ou irrationnelles) sera constamment utilisé par la suite.

On note  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  l'ensemble des coupures. C'est la réunion de deux parties,  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ , correspondant respectivement aux coupures rationnelles et irrationnelles. Puisque les transformations de Möbius appliquent boules sur boules en préservant leur type, le groupe Möb agit sur  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  en stabilisant  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ .

**Exercice 2.4.2.** — Démontrer que le sous-groupe de Möb stabilisant la coupure canonique coïncide avec le groupe  $\text{PGL}_2(\mathcal{O})$  et qu'un élément de  $\text{PGL}_2(\mathcal{O})$  fixe chaque élément de  $S_{\text{can}}$  si et seulement si sa réduction modulo  $\mathfrak{m}$  est l'identité. En déduire que  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  s'identifie à l'espace homogène  $\text{PGL}_2(\mathbf{C}_p) / \text{PGL}_2(\mathcal{O})$ .

**2.5. Structure d'arbre réel.** — Un *arbre réel* est un espace métrique  $(X, \text{dist})$  tel qu'il existe un unique arc topologique entre deux points distincts donnés et dans lequel

tout arc peut-être paramétré isométriquement par un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Un tel arc isométrique à un intervalle sera appelé chemin géodésique. Le but de ce paragraphe est de munir  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  d'une structure d'arbre réel en suivant la construction présentée dans [27].

**Lemme 2.5.1.** — *Soient  $S, S'$  deux coupures distinctes.*

(1) *Il existe un unique couple  $(B, B')$  de boules ouvertes ou irrationnelles tel que  $B \in S$ ,  $B' \in S'$  et  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) = B \cup B'$ .*

(2) *Il existe  $g \in \text{Möb}$  et des nombres réels strictement positifs  $r_0$  et  $r_1$  tels que  $g(B \cap B')$  soit la couronne  $\{r_0 < |z| < r_1\}$ ; de plus, le rapport  $r_1/r_0$  ne dépend pas du choix d'une telle homographie  $g$ .*

*Démonstration.* — 1) Commençons par démontrer l'unicité du couple de boules  $(B, B')$ . Soient en effet deux couples  $(B_1, B'_1)$  et  $(B_2, B'_2)$  de boules telles que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) = B_1 \cup B'_1 = B_2 \cup B'_2$ , où  $B_1, B_2 \in S$  et  $B'_1, B'_2 \in S'$ . Puisque  $B'_1$  et  $B'_2$  sont disjointes, on a donc  $B'_2 \subset \mathbb{C}B'_1 \subset B_1$ , car  $B_1 \cup B'_1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Par symétrie,  $B_1 \subset B'_2$ , d'où  $B_1 = B'_2$ . Par définition d'une coupure, cela entraîne  $S = S'$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démontrons maintenant l'existence d'un tel couple. Soient  $D$  et  $D'$  les boules fermées ou irrationnelles ne contenant pas  $\infty$  correspondant aux coupures  $S$  et  $S'$ ; par construction,  $\mathbb{C}D \in S$  et  $\mathbb{C}D' \in S'$ . Les boules  $\mathbb{C}D$  et  $\mathbb{C}D'$  ont le point  $\infty$  en commun; si  $\mathbb{C}D \cup \mathbb{C}D' \neq \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , l'une est contenue dans l'autre. Supposons, ce qui est loisible, que  $\mathbb{C}D \subset \mathbb{C}D'$ , c'est-à-dire  $D' \subset D$ . Par translation, on peut alors supposer  $D' = B^\bullet(r')$  et  $D = B^\bullet(r)$ , où  $r$  et  $r'$  sont deux nombres réels tels que  $r' \leq r$ . On a  $r \neq r'$  car  $S \neq S'$ . Si  $D$  est irrationnelle,  $D \in S$  et  $D \cup \mathbb{C}D' = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ ; il suffit donc de prendre  $B = D$  et  $B' = \mathbb{C}D'$ . En revanche, si  $D$  est rationnelle, nous pouvons, quitte à effectuer une homographie, supposer que  $S = S_{\text{can}}$ , d'où  $D = B^\bullet(1)$ ; alors,  $B^\circ(1) \in S$ . En prenant  $B = B^\circ(1)$  et  $B' = \mathbb{C}D'$ , nous obtenons  $B \cup B' = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .

2) Comme Möb est 2-transitif, on peut supposer que  $0$  appartient à  $B \setminus B'$  et  $\infty$  appartient à  $B' \setminus B$ . Alors, il existe  $r_0$  et  $r_1$  tels que  $B = B(r_1)$ ,  $B' = \{|z| > r_0\}$ ; comme  $S \neq S'$ ,  $r_0 \neq r_1$ . Comme  $B \cup B' = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , on a  $r_0 \leq r_1$ , d'où  $r_0 < r_1$ . Alors,  $B \cap B'$  est la couronne indiquée.

Soit  $C$  cette couronne et soit  $g \in \text{Möb}$  tel que  $g(C)$  soit encore une couronne  $\{s_0 < |z| < s_1\}$ . Quitte à changer  $g$  en  $1/g$ , ce qui change  $(s_0, s_1)$  en  $(1/s_1, 1/s_0)$  et ne modifie pas le rapport  $s_1/s_0$ , on suppose que  $|g(0)| \leq s_0$ ; alors, remplacer  $g$  par  $g - g(0)$  ne modifie pas l'image  $g(C)$ , ce qui permet de supposer  $g(0) = 0$ . Nous pouvons donc maintenant écrire  $g$  sous la forme  $g(z) = z/(cz + d)$ . En conjuguant  $g$  par  $z \mapsto 1/z$ , nous sommes ramenés au cas où  $g(z) = c + zd$  et  $g(\infty) = \infty$ . Quitte à composer  $g$  par l'homothétie  $z \mapsto z/d$ , ce qui ne change pas le rapport  $s_1/s_0$ , on peut supposer que  $d = 1$  et  $g(z) = z + c$ . Si  $s_0 < |c| < s_1$ , on trouve que  $g(0) \in g(C)$ , donc  $0 \in C$  ce qui est absurde; si  $|c| \geq s_1$ , on a  $|g^{-1}(z)| = |z - c| = s_1$  pour tout  $z \in g(C)$ , ce qui est absurde car  $g^{-1}(g(C)) = C$ ; on a donc  $|g| \leq s_0$  et  $g(C) = C$ . En particulier,  $s_1/s_0$  est égal à  $r_1/r_0$ .  $\square$

Utilisons les notations du lemme précédent et posons désormais  $\text{dist}(S, S') = \log_p(r_1/r_0)$ , de sorte que  $p^{\text{dist}(S, S')} = r_1/r_0$ . Par définition, cette distance est le *module* de la couronne  $g(B \cap B')$ . Lorsque  $S$  est égale à  $S'$ , nous poserons  $\text{dist}(S, S') = 0$ . On notera que si  $S$  est une coupure rationnelle, alors  $S'$  est une coupure rationnelle si et seulement si  $\text{dist}(S, S') \in \mathbf{Q}$ .

On démontre que  $\text{dist}$  est une distance sur l'espace  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  et l'espace métrique  $(\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}, \text{dist})$  est un arbre réel. Nous renvoyons à [26] pour plus de détails, nous contentant de citer le lemme suivant qui est le cœur de la démonstration.

**Lemme 2.5.2.** — Soient  $S, S', S''$  trois coupures distinctes. De deux choses l'une :

(1) Il existe  $g \in \text{Möb}$  et des nombres réels  $r, r', r''$  strictement positifs tels que  $g(S) = S(r)$ ,  $g(S') = S(r')$  et  $g(S'') = S(r'')$ . Si  $S, S'$  et  $S''$  sont telles que  $r \leq r' \leq r''$ , on a alors

$$\log_p\left(\frac{r''}{r'}\right) = \text{dist}(S, S'') = \text{dist}(S, S') + \text{dist}(S', S'') = \log_p\left(\frac{r'}{r}\right) + \log_p\left(\frac{r''}{r'}\right).$$

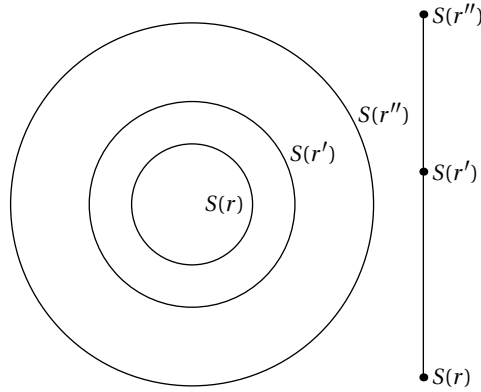


FIGURE 1. DISTANCES, BOULES ET COUPURES : premier cas du lemme 2.5.2.

(2) Il existe  $g \in \text{Möb}$ ,  $a \in \mathbf{C}_p$  et des nombres réels  $r, r', r''$  strictement positifs tels que  $\max(r, r') < |a| < r''$  de sorte que  $g(S) = S(a, r)$ ,  $g(S') = S(r')$  et  $g(S'') = S(r'')$ . Dans ce cas,  $B^\bullet(0, |a|)$  est la plus petite boule qui contient  $B^\bullet(a, r)$  et  $B^\bullet(r')$ . Si l'on note  $S^*$  la coupure associée à la boule  $g^{-1}B^\bullet(0, |a|)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \text{dist}(S, S') &= \text{dist}(S, S^*) + \text{dist}(S^*, S'), \\ \text{dist}(S, S'') &= \text{dist}(S, S^*) + \text{dist}(S^*, S''), \\ \text{dist}(S', S'') &= \text{dist}(S', S^*) + \text{dist}(S^*, S''). \end{aligned}$$

Dans le premier cas, l'ensemble des coupures  $g^{-1}(S(s))$  où  $s$  décrit l'intervalle  $[r, r'']$  est un segment géodésique qui relie  $S$  à  $S''$  (si  $r < r' < r''$ ). Dans le second cas, il y a trois segments géodésiques qui relient respectivement  $S$  à  $S'$ ,  $S'$  à  $S''$  et  $S''$  à  $S$ ; leur intersection commune est le point  $S^*$  (voir les figures 1 et 2).

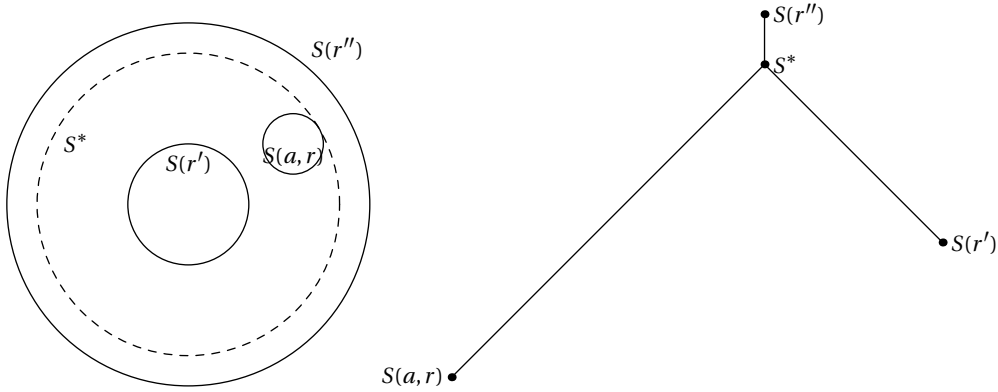


FIGURE 2. DISTANCES, BOULES ET COUPURES : second cas du lemme 2.5.2.

**2.6. Branches.** — Soit  $S$  une coupure. Les composantes connexes de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}} \setminus \{S\}$  seront appelées *branches* issues de  $S$ . Nous allons voir que l'ensemble des branches est en bijection naturelle avec les éléments de la partition  $S$ .

**Remarque 2.6.1.** — On peut ainsi faire le parallèle avec la construction de Dedekind des nombres réels selon les coupures. Partant du corps des nombres rationnels  $\mathbf{Q}$ , la coupure  $S(\xi)$  associée à un nombre réel  $\xi$  est la trace sur  $\mathbf{Q}$  des composantes connexes du complémentaire de  $\{\xi\}$  dans  $\mathbf{R}$ . On peut caractériser *a priori* ces coupures, d'où une construction des nombres réels.

Commençons par le cas d'une coupure irrationnelle. Soit  $r$  un nombre réel strictement positif pour lequel  $\log_p(r)$  est irrationnel. Soit  $S$  la coupure  $S(r)$  et  $B^\bullet(r)$  la boule (irrationnelle) associée à  $S$ . L'ensemble  $\mathbf{H}_p \setminus \{S\}$  comporte deux composantes connexes : l'une est formée des coupures associées aux boules (fermées ou irrationnelles) strictement contenues dans  $B^\bullet(r)$ , l'autre est alors formée des coupures associées aux boules qui ne sont pas contenues dans  $B^\bullet(r)$ .

Soit  $S = S_{\text{can}}$  la coupure canonique. Rappelons que  $S$  est la partition de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  en les boules ouvertes  $B(\alpha)$ , pour  $\alpha$  décrivant  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$ , et que le stabilisateur de  $S$  dans  $\text{Möb}$  coïncide avec  $\text{PSL}_2(\mathcal{O})$  (exercice 2.4.2). Pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p$ , l'élément  $B(\alpha)$  de  $S$  définit une branche issue de  $S$  : les éléments de cette branche sont les coupures associées aux boules contenues dans  $B(\alpha)$  ; la branche associée à  $\infty$  est l'ensemble des coupures associées aux boules qui ne sont pas contenues dans  $B^\bullet(0, 1)$  <sup>(5)</sup>. L'ensemble des branches issues de la coupure canonique est ainsi en bijection naturelle avec  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$  et cette bijection est compatible avec l'action du stabilisateur  $\text{PSL}_2(\mathcal{O})$  de  $S$ .

Le cas des coupures rationnelles s'en déduit par transformation de Möbius.

5. Si une boule fermée est contenue dans  $B^\bullet(0, 1)$  mais ne lui est pas égale, elle est contenue dans l'une des boules  $B(\alpha)$  pour  $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p$ .

Si  $S$  et  $S'$  sont deux coupures distinctes,  $S'$  appartient à une unique branche issue de  $S$ . De plus, quitte à échanger  $S$  et  $S'$ , la boule fermée ou irrationnelle  $B'$  qui détermine  $S'$  est contenue dans l'unique boule  $B$  de la partition  $S$  qui définit cette branche ; le module de la couronne  $B \setminus B'$  est la distance de  $S$  à  $S'$ .

**2.7. Complétion : bouts à distance finie et points singuliers.** — Contrairement à ce qui se passe sur le corps des nombres complexes, il existe des suites décroissantes de boules dans  $\mathbf{C}_p$  dont l'intersection est vide ; on dit que  $\mathbf{C}_p$  n'est pas *sphériquement complet*. Nous verrons d'ailleurs un exemple de telle suite au paragraphe 5.4, en lien avec la dynamique des polynômes.

Soit  $(B_i)$  une telle suite de boules (fermées ou irrationnelles). La suite  $(r_i)$  des rayons des  $B_i$  est décroissante, donc converge vers un nombre réel  $r_\infty \geq 0$ . Si l'on avait  $r_\infty = 0$ , on déduirait du théorème des fermés emboîtés que l'intersection des  $B_i$  est un singleton, car  $\mathbf{C}_p$  est complet. On a donc  $r_\infty > 0$ . Soit  $(S_i)$  la suite des coupures déterminées par les  $B_i$ . Alors

- puisque les  $B_i$  sont emboîtées, les  $S_i$  sont situées sur une demi-géodésique de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  (voir le lemme 2.5.2) ;
- puisque les rayons  $r_i$  ont une limite strictement positive  $r_\infty$ , la longueur de cette demi-géodésique est finie (majorée par  $\log_p(r_0/r_\infty)$ ) ;
- puisque l'intersection des  $B_i$  est vide, cette demi-géodésique sort de tout compact de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  en un temps fini.

Définissons un *bout* situé à *distance finie* comme la donnée d'une demi-géodésique  $\gamma : [t_1, t_2[ \rightarrow \mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  qui sort de tout compact de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  lorsque  $t$  tend vers  $t_2$ , modulo l'équivalence qui identifie deux demi-géodésiques  $\gamma$  et  $\gamma'$  définies sur  $[t_1, t_2[$  et  $[t'_1, t'_2[$  respectivement si  $\gamma(t_2 - s) = \gamma'(t'_2 - s)$  pour  $s$  suffisamment petit. Avec cette définition, l'extrémité finale de la demi-géodésique contenant les  $S_i$  détermine un *bout* de l'arbre  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  situé à distance finie de tout point de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ . Nous noterons  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  l'ensemble des bouts ainsi construits et poserons

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_p^{\mathbf{R}} \cup \mathbf{H}_p^{\text{sing}}.$$

Par définition  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  sont deux parties disjointes de  $\mathbf{H}_p$ . La distance définie sur  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  s'étend à  $\mathbf{H}_p$  : si  $z$  est un point de  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  et  $x$  est un point de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ , la distance entre  $x$  et  $z$  est la longueur de l'unique demi-géodésique partant de  $x$  et d'extrémité finale  $z$ .

On démontre que  $\mathbf{H}_p$  est un arbre réel complet ; autrement dit, les seuls points à ajouter à  $\mathbf{H}_p$  pour le rendre complet sont les points de  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  construits ci-dessus. Si  $S \in \mathbf{H}_p^{\text{sing}}$ , son complémentaire  $\mathbf{H}_p \setminus \{S\}$  est connexe ; autrement dit, le complémentaire de chaque point singulier est constitué d'une unique branche.

**2.8. Complétion : sphère à l'infini et définition de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .** — La *sphère à l'infini* de l'arbre  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  est l'ensemble des demi-géodésiques *infinies* modulo la relation d'équivalence pour laquelle  $\gamma \simeq \gamma'$  si  $\gamma$  et  $\gamma'$  coïncident sur des intervalles  $[t_1, \infty[$  et  $[t'_1, \infty[$ . Les points de la sphère à l'infini sont les *bouts* (ou « extrémités ») situés à *distance infinie*.

Pour tout point  $a$  de  $\mathbf{C}_p$ , la suite des boules  $S(a, r)$  pour  $r$  tendant vers 0 forme un arc géodésique infini ; on identifie son extrémité au point  $a$ . Réciproquement, si  $\gamma$  est une demi-géodésique infinie, chaque point  $\gamma(t)$  est une coupure déterminée par une boule fermée ou irrationnelle  $B_t$  de rayon  $r_t$ . D'après le lemme 2.5.2 les boules  $B_t$  sont emboîtées. La longueur totale de  $\gamma$  étant infinie,  $r_t$  tend vers 0 ou  $\infty$ . Supposons que  $r_t$  tende vers 0 ; on obtient ainsi une suite de boules emboîtées dont l'intersection est un point  $a$  de  $\mathbf{C}_p$ . La demi-géodésique  $S(a, r)$  est alors dans la même classe d'équivalence que  $\gamma$ . Si  $r_t$  tend vers l'infini, il existe un instant  $t_1$  à partir duquel les boules  $B_t$  contiennent l'origine 0 ; pour  $t$  supérieur à  $t_1$ , l'origine peut être choisie comme centre des boules  $B_t$ , si bien que la demi-géodésique  $\gamma(t)$  est équivalente à la demi-géodésique  $S(t)$ . L'extrémité associée est le point à l'infini  $\infty$ . De la sorte, la sphère à l'infini de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  s'identifie à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .

Lorsqu'on observe l'infini depuis le point  $S_{\text{can}}$ , la distance  $\text{dist}$  induit une distance sur la sphère à l'infini  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , que l'on définit de la manière suivante. Soit  $z$  et  $z'$  deux points distincts de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Il existe un unique point  $\langle z, z' \rangle$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  pour lequel les demi-géodésiques  $[S_{\text{can}}, z[$  et  $[S_{\text{can}}, z'[$  s'intersectent exactement le long du segment  $[S_{\text{can}}, \langle z, z' \rangle]$ . La distance visuelle  $\delta(z, z')$  entre  $z$  et  $z'$  est alors définie par

$$\delta(z, z') = p^{-\text{dist}(S_{\text{can}}, \langle z, z' \rangle)}.$$

Cette distance coïncide avec la *distance sphérique*<sup>(6)</sup> sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  (voir [24], p. 103), définie par

$$\delta(z, z') = \frac{|z - z'|}{\max(1, |z|) \max(1, |z'|)} = \begin{cases} |z - z'| & \text{si } |z| \text{ et } |z'| \leq 1, \\ \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \right| & \text{si } |z| > 1 \text{ et } |z'| > 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette distance est invariante par le stabilisateur  $\text{PSL}_2(\mathcal{O})$  de la coupure canonique  $S_{\text{can}}$  dans  $\text{Möb}$ .

Posons

$$\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \cup \mathbf{H}_p;$$

c'est encore un arbre réel mais pour la métrique  $L$  telle que

$$\left. \frac{dL}{d\ell} \right|_S = p^{-\text{dist}(S_{\text{can}}, S)},$$

6. cette distance est appelée « chordal distance » en anglais, qu'on traduit ici par « distance sphérique » ; certains auteurs parlent de distance harmonique.



où  $\ell$  est la longueur d'arc de l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}_p$ .<sup>(7)</sup> Autrement dit, le long d'un arc géodésique  $s \mapsto \gamma(s)$ ,  $s \in \mathbf{R}^+$ , partant de  $\gamma(0) = S_{\text{can}}$ , le rapport entre  $L(\gamma(t), \gamma(t'))$  et  $\text{dist}(\gamma(t), \gamma(t'))$  est égal à l'intégrale de  $p^{-u} du$  entre  $t$  et  $t'$ .

L'arbre  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est ainsi la réunion de quatre parties disjointes,

$$\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \cup \mathbf{H}_p^{\text{sing}} \cup \mathbf{H}_p^{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} \cup \mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}},$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

- les éléments de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \cup \mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  sont les bouts de l'arbre  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  : de chaque point de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \cup \mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  ne part qu'une branche ;
- d'un point de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}$  partent exactement deux branches ;
- l'ensemble des branches issues d'un point de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  est un espace homogène sous un conjugué de  $\text{PGL}_2(\mathcal{O})$ , qui est isomorphe à l'espace homogène  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$  muni de l'action de  $\text{PGL}_2(\mathcal{O})$ .

## 2.9. Autres définitions. —

2.9.1. On peut donner une définition plus directe de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  à partir de l'ensemble des boules circonférenciées de  $\mathbf{C}_p$  de rayon strictement positif. Cet ensemble s'identifie à l'espace quotient du produit  $\mathbf{C}_p \times \mathbf{R}$  par la relation d'équivalence

$$(z, t) \sim (z', t') \Leftrightarrow t = t' \text{ et } \log_p |z - z'| \leq t,$$

la boule  $B^\bullet(z, p^t)$  étant identifiée à la classe du point  $(z, t)$ . La valeur absolue  $p$ -adique étant ultramétrique, ceci définit une relation d'équivalence. L'espace quotient  $(\mathbf{C}_p \times \mathbf{R})/\sim$  est en bijection avec  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  : pour cela il suffit d'associer au point  $(z, t)$  la coupure  $S(z, p^t)$  associée à la boule  $B^\bullet(z, p^t)$ .

La distance usuelle sur  $\mathbf{R}$  induit une distance sur l'espace quotient  $(\mathbf{C}_p \times \mathbf{R})/\sim$  ; si  $(z, t)$  et  $(z', t')$  appartiennent à  $\mathbf{C}_p \times \mathbf{R}$ , la distance entre les points qu'ils déterminent dans  $(\mathbf{C}_p \times \mathbf{R})/\sim$  est

$$2 \max(t, t', \log_p |z - z'|) - t - t'.$$

Si l'on munit  $(\mathbf{C}_p \times \mathbf{R})/\sim$  de cette distance, la bijection  $(z, t) \mapsto S(z, p^t)$  devient une isométrie entre  $(\mathbf{C}_p \times \mathbf{R})/\sim$  et  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ . Pour retrouver  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , on ajoute alors les bouts de l'arbre  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  (c'est-à-dire  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$  et  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ ).

2.9.2. Une troisième définition de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  peut être obtenue en considérant l'espace analytique associé par V. BERKOVICH dans [11] à la droite projective sur  $\mathbf{C}_p$  (voir aussi l'annexe de [26] et [15]). Dans le cadre qui nous occupe, l'intérêt majeur de la définition de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  par Berkovich réside dans le fait que toute fraction rationnelle opère

7. Comme  $x \mapsto p^{-x}$  est d'intégrale  $1/\log(p)$  sur  $\mathbf{R}_+$ , ce changement de distance ramène à distance finie les points de la sphère à l'infini.

naturellement sur  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , ce qui paraîtra un peu miraculeux du point de vue des coupures.

L'espace analytique associé à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  au sens de Berkovich est défini comme suit. Une *semi-norme multiplicative* sur l'anneau  $\mathbf{C}_p[z]$  est une application  $s : \mathbf{C}_p[z] \rightarrow \mathbf{R}_+$  satisfaisant

- (i)  $s(1) = 1$ ,
- (ii)  $s(P + Q) \leq s(P) + s(Q)$  et
- (iii)  $s(PQ) = s(P)s(Q)$

pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbf{C}_p[z]$ . Par exemple, à tout point  $z$  de la droite affine  $\mathbf{C}_p$  est associée une semi-norme  $s_z$  définie par  $s_z(P) = |P(z)|$ .

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives de  $\mathbf{C}_p[z]$  dont la restriction à  $\mathbf{C}_p$  coïncide avec la valeur absolue  $p$ -adique (la notation de Berkovich est  $\mathcal{M}(\mathbf{C}_p[z])$ ). Du point de vue de Berkovich,  $\mathcal{M}$  est la droite affine sur  $\mathbf{C}_p$ . Pour obtenir la droite projective, il suffit de lui adjoindre un point à l'infini  $s_\infty$  qu'on peut interpréter comme la fonction définie sur  $\mathbf{C}_p[z]$  par  $s_\infty(P) = \infty$  lorsque  $P$  n'est pas constant et  $s_\infty(P) = |a|$  si  $P$  est la constante  $a$  (en d'autres termes,  $s_\infty(P)$  est la valeur absolue de  $P(\infty)$ ). On pose alors  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p) = \mathcal{M} \cup \{s_\infty\}$ .

Le caractère ultramétrique du corps  $\mathbf{C}_p$  se révèle dans le lemme suivant qui montre que l'espace  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$  possède, outre  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , de nombreux autres points.

**Lemme 2.9.3.** — *Soit  $B$  une boule circonferenciée de la droite affine. Alors, la fonction  $s_B : \mathbf{C}_p[z] \rightarrow \mathbf{R}_+$  définie par*

$$s_B(P) = \sup_{z \in B} |P(z)|$$

*est une semi-norme multiplicative sur l'anneau  $\mathbf{C}_p[z]$ .*

Lorsque  $B = B^\bullet(0, 1)$ , la norme  $s_B$  est appelée *norme de Gauss*. D'après ce lemme, toute boule circonferenciée  $B$  de  $\mathbf{C}_p$  fournit un point de  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$ . Lorsque  $B = B^\bullet(a, r)$ , la valeur de  $s_B$  au polynôme  $z - b$  est égale à

$$s_B(z - b) = \min(r, |b - a|).$$

On voit ainsi que la donnée de la semi-norme  $s_B$  redonne  $B$ . D'après le dictionnaire entre coupures et boules fermées ou irrationnelles, cela fournit une injection de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  dans  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$ .

Plus généralement, pour toute suite décroissante  $\mathcal{B} = (B_i)$  de boules circonferenciées, la limite décroissante  $s_{\mathcal{B}} = \lim s_{B_i}$  est encore une semi-norme multiplicative sur  $\mathbf{C}_p[z]$ . L'intersection des boules de  $\mathcal{B}$  peut être un point  $z$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , auquel cas  $s_{\mathcal{B}} = s_z$ ; elle peut être une boule  $B$ , nécessairement fermée ou irrationnelle (auquel cas  $s_{\mathcal{B}} = s_B$ ) et les semi-normes obtenues correspondant aux coupures rationnelles et

irrationnelles de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ ; elle peut aussi être vide, dans ce cas la norme  $s_{\mathcal{B}}$  correspond à un point singulier de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .

Inversement, on démontre que  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$  n'a pas d'autre point que ceux-ci, ce qui permet d'identifier l'espace  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$  avec l'espace  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  défini dans les paragraphes précédents.

Démontrons maintenant le lemme 2.9.3.

*Démonstration.* — Supposons que le rayon de la boule  $B$  appartient à  $p^{\mathbf{Q}}$ ; quitte à faire un changement de variable affine, on suppose même  $B = B^*(0, 1)$ . Pour  $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ , posons  $\|P\| = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$  et démontrons que l'on a  $s_B(P) = \|P\|$  pour tout  $P \in \mathbf{C}_p[z]$ . Tout d'abord, on observe que pour tout  $z \in B^*(0, 1)$ ,

$$|P(z)| \leq \max(|a_n| |z|^n) \leq \|P\|.$$

Inversement, démontrons qu'il existe  $z \in B^*(0, 1)$  tel que  $|P(z)| = \|P\|$ . On peut supposer que  $P \neq 0$ . Quitte à diviser  $P$  par un de ses coefficients de valeur absolue maximale, on a  $\|P\| = 1$ ; on peut ainsi supposer que les  $a_i$  appartiennent à  $\mathcal{O}$  et que l'un d'entre eux au moins n'est pas dans l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de sorte que le polynôme réduit  $\bar{P}$  n'est pas nul. Soit  $\alpha$  un élément de  $\overline{\mathbf{F}}_p$  qui n'est pas une racine de  $\bar{P}$ ; pour tout  $z \in B(\alpha)$ , on a  $P(z) \in \mathcal{O}$  et  $\overline{P(z)} = \bar{P}(\alpha) \neq 0$ , autrement dit  $|P(z)| = 1$ .

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du lemme (dans le cas où  $B = B^*(0, 1)$ ). Il est clair que  $s_B$  est une norme sur  $\mathbf{C}_p[z]$ , le point non évident est sa multiplicativité. Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes de  $\mathbf{C}_p[z]$ ; par homogénéité, pour démontrer que  $s_B(PQ) = s_B(P)s_B(Q)$ , on peut supposer que  $P$  et  $Q$  vérifient  $\|P\| = \|Q\| = 1$  et il s'agit de démontrer que  $\|PQ\| = 1$ . L'inégalité ultramétrique entraîne immédiatement que  $\|PQ\| \leq 1$  et il s'agit maintenant de prouver l'égalité. Les polynômes  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  à coefficients dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$  sont non nuls, et il en est alors de même de leur produit. Or, ce produit  $\bar{P}\bar{Q}$  n'est autre que la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  du polynôme  $PQ$ . On a donc  $\overline{PQ} \neq 0$ , ce qui entraîne  $\|PQ\| = 1$ , d'où le lemme, lorsque le rayon de  $B$  appartient à  $p^{\mathbf{Q}}$ .

Le cas général s'en déduit par passage à la limite.  $\square$

La structure d'arbre réel de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , qui dans les deux définitions précédentes résulte des propriétés d'inclusions des boules, se traduit ici dans la relation d'ordre partiel  $\leq$  entre semi-normes :  $s \leq s'$  si  $s(P) \leq s'(P)$  pour tout polynôme  $P$ . Par exemple, l'arc topologique joignant deux points  $s \leq s'$  est constitué des semi-normes  $s''$  telles que  $s \leq s'' \leq s'$ , et les éléments minimaux coïncident avec les bouts de l'arbre qui sont distincts de  $\infty$ .

Soit  $s$  un élément de  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p) \setminus \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . La semi-norme  $s$  ne s'annule donc sur aucun polynôme non nul, ce qui permet de l'étendre en une valeur absolue sur le corps  $\mathbf{C}_p(z)$ . Si  $R$  est une fraction rationnelle, on peut alors définir une nouvelle norme

$$R_* s : Q \mapsto s(Q \circ R).$$

Ceci définit une action naturelle de  $R$  sur  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p) \setminus \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Nous définirons à nouveau cette action en termes de coupures et de boules dans la partie suivante de ce texte.

Nous renvoyons le lecteur à [17] et [15] pour plus de détails et des références concernant l'utilisation du point de vue de Berkovich en dynamique  $p$ -adique.

2.9.4. Il existe bien d'autres façons d'aborder cet espace  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , pour lesquelles nous renvoyons aux articles [2] et [27] et aux références qui s'y trouvent. L'espace  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est notamment relié à l'arbre de Bruhat–Tits de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}_p)$ .

**2.10. Topologie faible sur  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .** — Une partie  $A$  de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est appelée *affinoïde ouvert*<sup>(8)</sup> si c'est une intersection finie non vide de boules ouvertes (les boules peuvent contenir l'infini).

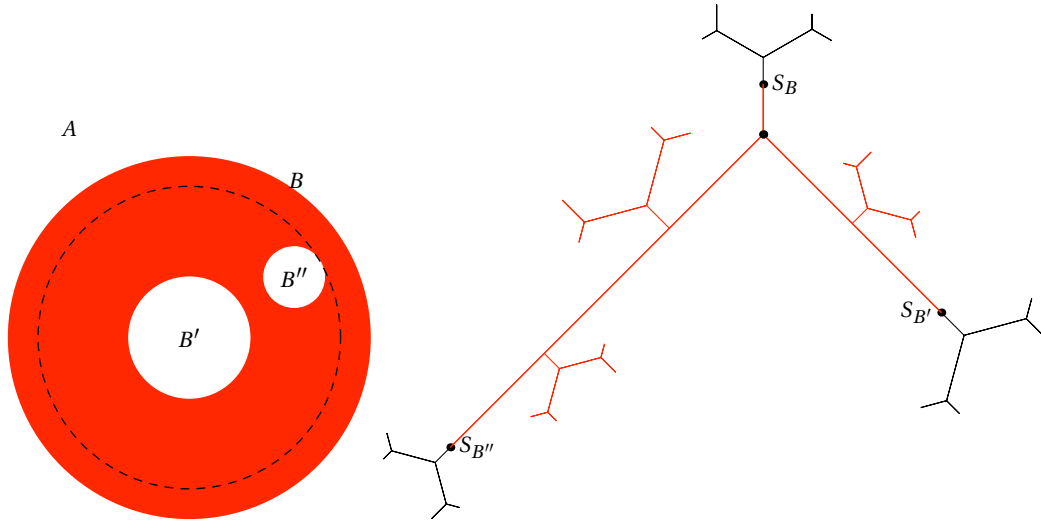


FIGURE 3. AFFINOÏDES OUVERTS : Ici,  $A$  est l'affinoïde obtenu en retranchant les boules fermées  $B'$  et  $B''$  à la boule ouverte  $B$ . Les coupures  $S_B$ ,  $S_{B'}$  et  $S_{B''}$  sont déterminées par les boules correspondantes.

Soit  $A$  un affinoïde ouvert. On dit qu'une coupure  $S$  *sépare*  $A$  si  $A$  rencontre au moins deux boules de  $S$ . Par exemple, si  $A$  est une boule ouverte et si  $S$  est la coupure déterminée par la boule  $B^\bullet(a, r)$ , alors  $S$  sépare  $A$  si et seulement si  $B^\bullet(a, r)$  est contenue dans  $A$ .

Notons  $\hat{A}$  la partie de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  réunion de  $A$ , de l'ensemble des coupures qui séparent  $A$ , et des points singuliers de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  qui correspondent à une intersection vide de boules contenues dans  $A$ . C'est une partie connexe, donc un arbre réel. Écrivons  $A$  comme l'intersection  $\bigcap B_i$  d'un nombre minimal de boules ouvertes ; cette écriture est

8. Nous suivons ici la terminologie de Rivera-Letelier, Yoccoz, etc. Le lecteur doit être averti qu'une telle partie  $A$  est le *complémentaire* de ce qu'on appelle traditionnellement un ensemble affinoïde en géométrie analytique rigide.

unique à permutation près des  $B_i$ . Pour tout  $i$ , soit  $S_i$  l'unique coupure qui contient  $B_i$ ; ces coupures forment les *extrémités* de  $\widehat{A}$  (voir la figure 3).

La *topologie faible* sur  $\widehat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est définie en prenant comme base d'ouverts l'ensemble des parties  $\widehat{A}$ , lorsque  $A$  parcourt l'ensemble des affinoïdes ouverts de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Cette topologie est métrisable et fait de  $\widehat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  un espace compact et contractile. De plus, l'ensemble  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est dense pour la topologie faible qui induit d'ailleurs la topologie  $p$ -adique sur cet ensemble. Restreinte au complémentaire du point à l'infini, la topologie faible est aussi la plus grossière des topologies pour lesquelles les applications  $P \mapsto s(P)$  sont continues, pour tout  $s \in \mathcal{M}$ .

### 3. Action des fractions rationnelles sur l'espace hyperbolique $p$ -adique

Si  $R$  appartient à  $\mathbf{C}_p(z)$ , l'action de  $R$  sur la droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  s'étend à  $\widehat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ ; c'est ce qu'il s'agit de décrire maintenant. Lorsque  $R$  est constante, son extension à  $\widehat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  sera également constante. Nous supposons donc systématiquement que  $R$  n'est pas constante.

**3.1. Image des petites couronnes.** — Soit  $B$  une boule ouverte ou irrationnelle et soit  $(B_i)$  une suite strictement croissante de boules fermées ou irrationnelles dont la réunion est égale à  $B$ . Pour tout  $i$ , soit  $C_i$  la couronne  $B \setminus B_i$ ; son module tend vers 0 et l'intersection des  $C_i$  est vide.

**Lemme 3.1.1** ([26], prop. 4.1). — *Soit  $R$  une fraction rationnelle non constante. Il existe un entier naturel  $d$ , une boule  $B'$  et, pour tout entier  $i$  assez grand, une boule  $B'_i$  fermée ou irrationnelle contenue dans  $B'$  tels que*

- l'image  $R(C_i)$  de la couronne  $C_i$  est la couronne  $B' \setminus B'_i$ ;
- l'application  $R : C_i \rightarrow R(C_i)$  induite par  $R$  est de degré  $d$  (tout point de  $R(C_i)$  a  $d$  antécédents dans  $C_i$  par  $R$ ).

*De plus, le module de la couronne  $R(C_i)$  est égal à  $d$  fois celui de  $C_i$ .*

C'est une application assez simple de la théorie du polygone de Newton (voir par exemple [1, 16] ainsi que [27], §1.3.2).

Le module de la couronne  $C_i$  est égal à la distance entre les coupures déterminées par les boules (fermées ou irrationnelles)  $B_i$ . La dernière assertion du lemme correspond donc à une propriété de dilatation de la distance entre coupures; nous allons préciser ce point dans les paragraphes qui suivent.

**3.2. Action sur les coupures.** — Soit  $S$  une coupure; soit  $B$  l'une des boules ouvertes ou irrationnelles constituant la partition  $S$ . Notons  $\mathcal{B}$  la branche issue de  $S$  qui est déterminée par  $B$  (voir le §2.6). Choisissons une suite croissante  $(B_i)$  de boules fermées ou irrationnelles dont la réunion est égale à  $B$ . Pour tout  $i$ , la boule  $B_i$  détermine une

coupure  $S_i$  qui appartient à  $\mathcal{B}$  et  $S_i$  tend vers  $S$  quand  $i \rightarrow \infty$ . Pour tout  $i$ , posons  $C_i = B \setminus B_i$ .

Puisque la suite de boules  $B_i$  est croissante, la suite des coupures  $S_i$  se déplace le long de l'arc géodésique reliant  $S_0$  à  $S$  dans l'arbre  $\mathbf{H}_p$ .

Pour  $i$  assez grand, l'ensemble  $R(C_i)$  est une couronne d'après le lemme précédent ; on peut donc l'écrire sous la forme  $B' \setminus B'_i$ , où  $B'$  et  $B'_i$  sont des boules de même nature que  $B$  et  $B_i$ . Ces boules définissent des coupures  $S'$  et  $S'_i$  telles que la suite  $S'_i$  tende vers  $S'$ , car le module de  $R(C_i)$  tend vers 0. De plus, les coupures  $S'_i$  appartiennent à une même branche  $\mathcal{B}'$  issue de  $S'$ .

On démontre que la coupure  $S'$  ne dépend que de la coupure  $S$  ; on la note  $R_*(S)$  : c'est l'image de  $S$  par  $R$ . De même, l'entier  $d$  dont le lemme précédent affirme l'existence ne dépend que de la branche  $\mathcal{B}$  mais pas du choix de la suite de boules  $(B_i)$ , on le note  $\deg_{\mathcal{B}}(R)$ .

Lorsque  $S_i$  tend vers  $S$  le long d'un segment géodésique contenu dans la branche  $\mathcal{B}$ , la distance entre  $R_*(S_i)$  et  $R_*(S)$  est égale à  $\deg_{\mathcal{B}}(R) \operatorname{dist}(S_i, S)$ . Autrement dit, pour chaque demi-géodésique  $\gamma : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{H}_p$  issue de  $S = \gamma(0)$  et tracée dans  $\mathcal{B}$ , il existe  $t > 0$  tel que

$$\operatorname{dist}(R_*(\gamma(s)), R_*(\gamma(s'))) = \deg_{\mathcal{B}}(R) \operatorname{dist}(\gamma(s), \gamma(s')) = \deg_{\mathcal{B}}(R) |s - s'|$$

pour tout  $(s, s') \in [0, t]^2$ . La longueur  $t$  sur laquelle cette dilatation a lieu dépend du choix de la géodésique  $\gamma$  issue de  $S$ .

*Cas des coupures irrationnelles.* — La proposition suivante précise ce que peut être le degré d'une fraction rationnelle le long d'une branche issue d'une coupure irrationnelle.

**Proposition 3.2.1.** — *Soit  $R$  un élément non constant de  $\mathbf{C}_p(z)$ . Si  $S$  est une coupure irrationnelle, alors*

- (1)  $\deg_{\mathcal{B}}(R)$  ne dépend pas du choix de la branche  $\mathcal{B}$  issue de  $S$  et sera noté  $\deg_S(R)$  ;
- (2)  $\deg_{\mathcal{B}}(R) = 1$  dès que  $R_*(S) = S$ .

Si  $S$  est une coupure irrationnelle fixée par  $R$ , on a  $\deg_{\mathcal{B}}(R) = 1$  et  $R$  préserve les longueurs le long des deux branches issues de  $S$  (sur un voisinage du point  $S$ ). On parle de *point fixe indifférent* (voir le paragraphe 4.1).

*Esquisse de démonstration.* — On peut supposer que  $S$  est la coupure  $S(r)$ , où  $r$  est un nombre réel strictement positif n'appartenant pas à  $p^{\mathbf{Q}}$ . Comme  $r \notin p^{\mathbf{Q}}$ , il existe deux nombres réels positifs  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $r_1 < r < r_2$  et  $R$  n'ait pas de pôle dans la couronne  $\{r_1 < |z| < r_2\}$ . Notons

$$R(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n z^n$$

le développement de  $R$  en série de Laurent sur cette couronne. On a donc

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |h_n| |z|^n = 0$$

dès que  $r_1 < |z| < r_2$ . Comme  $r \notin p^{\mathbf{Q}}$ , il existe alors un unique entier  $m$  tel que

$$|h_m| r^m = \max(|h_n| r^n);$$

de plus, quitte à diminuer  $r_2$  et à augmenter  $r_1$ , on peut même supposer que

$$|h_m| |z|^m = \max(|h_n| |z|^n) \quad \text{pour tout } z \text{ tel que } r_1 < |z| < r_2.$$

Quitte à composer  $R$  par  $z \mapsto z - h_0$  au but on peut supposer que  $h_0$  est nul. Quitte à composer  $R$  par  $z \mapsto 1/z$  à la source, on peut alors supposer que  $m$  est strictement positif.

Pour tout  $\rho$  tel que  $r_1 < \rho < r_2$ , on a alors  $R_*(S(\rho)) = S(|h_m| \rho^m)$ , d'où  $m = \deg_{\mathcal{B}}(R)$  pour chacune des branches  $\mathcal{B}$  issues de  $S$ .

Enfin, si  $R_*(S(r)) = S(r)$ , alors  $r^{m-1} = 1/|h_m|$ , d'où  $m = 1$  car  $r \notin p^{\mathbf{Q}}$ . Le degré local en une coupure fixe irrationnelle est donc égal à 1.  $\square$

*Cas des coupures rationnelles.* — Soit  $S$  une coupure rationnelle. Rappelons que la partition  $S$  ou, de manière équivalente, l'ensemble des branches de  $\mathbf{H}_p$  issues de  $S$ , est une droite projective, isomorphe à  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$  (voir le §2.4). La proposition suivante utilise implicitement cette paramétrisation des branches par  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$ .

**Proposition 3.2.2.** — *Soit  $R$  un élément non constant de  $\mathbf{C}_p(z)$ . Soit  $S$  une coupure rationnelle. L'application induite par  $R$  entre l'ensemble des branches issues de  $S$  et celui des branches issues de  $R_*(S)$  est une fraction rationnelle  $\overline{R}$  dont le degré, noté  $\deg_S(R)$ , vérifie*

$$\deg_S(R) \leq \deg(R).$$

L'application  $\overline{R}$  s'obtient par réduction de  $R$  en utilisant des coordonnées dans lesquelles  $S$  et  $R_*(S)$  coïncident avec la coupure canonique.

Lorsque  $R_*(S) = S$  et  $\deg_S(R) > 1$ ,  $R$  dilate strictement les longueurs au voisinage de  $S$  le long de chaque géodésique partant de  $S$ . On parlera donc de *point fixe répulsif* (voir le paragraphe 4.1). Ces propriétés de dilatation peuvent être précisées pour montrer que de l'action de  $R_*$  sur l'arbre  $(\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}, \text{dist})$  dilate les distances par un facteur « entier par morceaux ». Afin de décrire cet énoncé, fixons un segment géodésique  $\gamma(t) = S_t$ ,  $t \in I$ , le long duquel  $R_*$  est injective. Pour chaque  $t$  dans  $I$ , notons  $\mathcal{B}_t$  la branche issue de  $\gamma(t) = S_t$  dans laquelle la géodésique  $\gamma$  entre à l'instant  $t$ . Soient  $t < t'$  deux éléments de  $I$ . Alors, la fonction  $s \mapsto \deg_{\mathcal{B}_s}(R)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs entre  $t$  et  $t'$ , et

$$\text{dist}(R_*(S_t), R_*(S_{t'})) = \int_t^{t'} \deg_{\mathcal{B}_s}(R) ds.$$

Le lecteur pourra consulter [26, cor. 4.8] pour une preuve de cette formule.

*Points singuliers.* — On peut prolonger l'action de  $R_*$  aux bouts de  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ , de sorte que chaque point singulier  $S$  de  $\mathbf{H}_p$  soit envoyé par  $R$  sur un point singulier  $R_*(S)$ . Ceci étend l'action de  $R$  sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  à  $\mathbf{H}_p$ , et donc à  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  en une application lipschitzienne

$$R_* : \hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p) \rightarrow \hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p),$$

de l'arbre  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  dans lui-même ; plus précisément,  $R_*$  est lipschitzienne en restriction à  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$  et à  $\mathbf{H}_p$  pour la distance  $\text{dist}$ ,  $R_*$  est lipschitzienne en restriction à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  pour la distance sphérique  $\delta$  et, enfin,  $R_*$  est lipschitzienne sur l'arbre  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  pour la distance  $L$  introduite au paragraphe 2.8.

Nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles [26, 27] pour plus de détails. Citons simplement le fait suivant : *si  $S$  est un point singulier qui est fixé par  $R_*$ , alors  $S$  est un point fixe indifférent.* Ainsi, dans  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ , seules les coupures rationnelles peuvent fournir des points fixes (ou périodiques) répulsifs. Nous emploierons ce fait à plusieurs reprises dans la partie suivante. Terminons celle-ci par un exemple.

**3.3. Le cas des fractions rationnelles de degré 2.** — Sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2, il n'existe qu'une seule fraction rationnelle de degré 2 modulo composition près à droite et à gauche par des transformations de Möbius, c'est la fraction rationnelle  $z \mapsto z^2$ .

Par contre, en caractéristique 2, il existe deux modèles qui sont les applications  $Q: z \mapsto z^2$  et  $R: z \mapsto z + z^2$ . L'application quadratique  $Q(z) = z^2$  commute avec les automorphismes de Möbius de  $\mathbf{P}(\mathbf{F}_2)$ , donc tous les éléments de  $\mathbf{P}(\mathbf{F}_2)$  jouent le même rôle pour cette application. (Plus généralement, si  $k$  est un entier strictement positif et  $M$  un automorphisme de Möbius à coefficients dans le corps  $\mathbf{F}_{2^k}$ , l'itéré  $k$ -fois de  $Q$  commute avec  $M$ . Du point de vue de la dynamique, tous les éléments de  $\mathbf{P}(\overline{\mathbf{F}}_2)$  jouent ainsi essentiellement le même rôle.) En revanche, le point  $\infty$  joue un rôle particulier pour l'application  $R$  : c'est le seul point en lequel le degré local est 2, tandis que que tous les autres points sont géométriquement équivalents car  $R(z + a) = R(z) + R(a)$ .

**Exercice 3.3.1.** — Démontrer ces faits.

Soit  $Q$  une fraction rationnelle de degré 2 à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ . D'après ce qu'on vient de dire, on peut supposer que  $Q(z) = z^2$ .

*Supposons d'abord  $p \neq 2$ .* — Notons  $\gamma$  la géodésique de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  joignant 0 à  $\infty$  ; elle est constituée des coupures  $S(r)$ , le nombre réel  $r$  décrivant  $\mathbf{R}_+$ . Puisque  $Q(B^\bullet(r)) = B^\bullet(r^2)$ , on obtient  $Q_*(S(r)) = S(r^2)$  et  $\deg_{S(r)}(Q) = 2$ . Comme

$$\text{dist}(S(r), S(r')) = \left| \log_p r - \log_p r' \right|,$$

on observe que les distances sont multipliées par 2 le long de  $\gamma$ .



Pour  $a \in \mathbf{C}_p^*$  et  $0 < r < |a|$ , la coupure  $S(a, r)$  (déterminée par la boule  $B^\bullet(a, r)$ ) satisfait  $\text{dist}(S(a, r), \gamma) = \log_p |a| - \log_p r$ . Pour tout  $w \in \mathbf{C}_p$  satisfaisant  $|w| \leq r$ , on a

$$|Q(a+w) - a^2| = |2aw + w^2| = |w| |2a + w| = |a| |w|$$

car  $|a| > r \geq |w|$  et car  $|2a| = |a|$  puisque  $p \neq 2$ . Ainsi

$$Q_*(S(a, r)) = S(a^2, |a|r).$$

La restriction de  $Q_*$  à la demi-géodésique joignant  $a$  à  $\gamma$  (constituée des  $S(a, t)$  avec  $0 < t \leq |a|$ ) est donc une isométrie sur la demi-géodésique joignant  $a^2$  à  $\gamma$ , si bien que

$$\deg_{S(a,r)}(Q) = 1.$$

*Considérons maintenant le cas  $p = 2$ .* — Conservons les notations précédentes. Si  $S$  est située sur  $\gamma$ , la situation est la même que précédemment. Par contre, pour une coupure  $S = S(a, r)$  avec  $0 < r < |a|$ , il faut distinguer trois cas :

(1)  $\text{dist}(S, \gamma) < 1$ , *i.e.*  $r > |a|/2$ . On a alors  $|Q(a+w) - Q(a)| = |w|^2$  pour  $r > |w| > \frac{1}{2}|a|$ , si bien que

$$\begin{aligned} Q_*(S(a, r)) &= S(a^2, r^2) \\ \text{dist}(Q_*(S(a, r)), \gamma) &= 2 \text{dist}(S(a, r), \gamma), \\ \deg_S(Q) &= 2, \end{aligned}$$

et  $\overline{Q}(z) = z^2$  dans les paramétrages naturels de  $S$  et  $Q_*(S)$ .

(2)  $\text{dist}(S, \gamma) > 1$ , *i.e.*  $0 < r < |a|/2$ . On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_*(S(a, r)) &= S(a^2, \frac{1}{2}|a|r), \\ \text{dist}(Q_*(S), \gamma) &= \text{dist}(S, \gamma) + 1, \\ \deg_S(Q) &= 1. \end{aligned}$$

(3)  $\text{dist}(S, \gamma) = 1$ , *i.e.*  $r = |a|/2$ . Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} Q_*(S) &= S(a^2, \frac{1}{4}|a|^2), \\ \text{dist}(Q_*(S), \gamma) &= 2, \\ \deg_S(Q) &= 2, \end{aligned}$$

mais dans les paramétrages naturels,  $\overline{Q}(z) = z + z^2$ .

Ainsi, on a  $\deg_S(Q) = 2$  dans les cas (1) et (3), mais les réductions  $\overline{Q}$  diffèrent.

#### 4. Théorie de Fatou-Julia, domaines quasi-périodiques

Soit  $R$  une fraction rationnelle non constante. On a vu que  $R$  détermine un endomorphisme de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  qui préserve  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ ,  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{R}}$ ,  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{H}_p^{\text{sing}}$ .

Nous allons maintenant décrire le type des points périodiques de  $R$ , ainsi que la structure des ensembles de Fatou et de Julia. Il s'agit d'analyser à la fois la dynamique sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  et  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .

**4.1. Points fixes, points périodiques et bassins d'attraction.** — Dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , un point fixe  $z_0$  de  $R$ , c'est-à-dire un élément  $z_0 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  tel que  $R(z_0) = z_0$ , est dit *super-attractif*, *attractif*, *indifférent* ou *répulsif* suivant que  $R'(z_0) = 0$ ,  $|R'(z_0)| < 1$ ,  $|R'(z_0)| = 1$  ou  $|R'(z_0)| > 1$ . Cette notion est invariante par conjugaison.<sup>(9)</sup>

Dans l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}_p$ , une coupure  $S$  qui est fixée par  $R$  est dite répulsive si  $\deg_S(R) > 1$  et indifférente si  $\deg_S(R) = 1$ . D'après le paragraphe 3.2, une coupure irrationnelle ou un bout singulier fixé par  $R$  est un point fixe indifférent.

Un point périodique de période  $k$  sera dit attractif, indifférent ou répulsif si c'est un point fixe de  $R^k$  de ce type.

Si  $\xi$  est un point de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , on appelle *bassin d'attraction (fin)* l'ensemble des  $x \in \hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  tels que  $R^n(x)$  converge vers  $\xi$  pour la topologie d'arbre réel. *Le bassin d'attraction (fin) d'un point fixe attractif est un ouvert de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  pour la topologie faible.*

Contrairement au cas complexe, il peut y avoir une infinité d'orbites périodiques attractives; en particulier, un bassin d'attraction ne contient pas forcément de point critique.

**Exemple 4.1.1.** — Si  $R(z) = z^p$ , la réduction de  $R$  est donnée par  $\overline{R}(\overline{z}) = \overline{z}^p$ . Ainsi,  $R$  a bonne réduction et  $R(S_{\text{can}}) = S_{\text{can}}$  (voir le §2.2). Toutes les orbites de  $\overline{R}$  dans  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}}_p)$  sont prépériodiques; chaque orbite de période  $k$  se relève en une orbite de même période qui est attractive. (Si  $\alpha$  est un élément du corps fini à  $p^k$  éléments  $\mathbf{F}_{p^k}$  dans  $\overline{\mathbf{F}}_p$ , alors  $\alpha^{p^k} = \alpha$ ; pour tout  $z_0 \in B(\alpha)$ , la suite  $(R^{nk}(z_0))_n$  converge vers une racine de l'unité (ou 0 si  $\alpha = 0$ ) dans  $\mathbf{C}_p$  qu'on appelle le *représentant de Teichmüller* de  $\alpha$ .)

**Exercice 4.1.2.** — Soit  $Q$  la fraction rationnelle définie par

$$Q(z) = \lambda \left( \frac{z}{z-1} + z^p \right),$$

où  $\lambda \in \mathbf{C}_p$  satisfait  $p^{-(p-1)} < |\lambda|^{p+1} < 1$ .

1) Démontrer que 0 et  $\infty$  sont des points critiques fixes et attractifs. Nous noterons  $W_0$  et  $W_\infty$  leurs bassins d'attraction.

9. La dérivée  $R'(z_0)$  est définie de manière analogue à ce qui a été fait p. 2. Si  $z_0 \neq \infty$ , il s'agit de la dérivée usuelle; si  $z_0 = \infty$ , on conjugue d'abord  $R$  par l'inversion.

2) Démontrer que  $|Q(z)| = |\lambda||z|$  lorsque  $|z| < 1$ . En déduire que  $W_0$  contient la boule ouverte  $B(0)$ .

3) Si  $|z| > 1$ , démontrer que  $|Q(z)| = |\lambda||z|^p$ . En déduire que  $W_\infty$  contient l'ensemble des points  $z$  satisfaisant  $|\lambda||z|^{p-1} > 1$ .

4) Démontrer que la valeur absolue de tous les points critiques de  $Q$  dans  $\mathbf{C}_p$  est égale à  $p^{1/(p+1)}$  (commencer par prouver qu'ils sont de valeur absolue  $> 1$ ); en déduire qu'ils sont contenus dans  $W_\infty$ .

5) Démontrer que le bassin d'attraction de l'origine ne contient aucun point critique.

**4.2. Dynamique locale d'une série entière.** — La dynamique locale d'une fraction rationnelle  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  au voisinage d'un point fixe a été étudiée en détail par plusieurs auteurs (voir [25], [21], [19], et les références qui s'y trouvent). Le but de ce paragraphe est de signaler quelques lemmes qui manifestent clairement le caractère non archimédien de  $\mathbf{C}_p$  et permettent d'appréhender la dynamique au voisinage d'un point fixe attractif ou indifférent dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .

Pour simplifier, nous étudions ici la dynamique locale d'une série entière convergente  $f$  fixant l'origine; le cas d'un point périodique  $z_0$  de  $R$  de période  $k$  s'y ramène en remplaçant  $R$  par  $R^k$  et en conjuguant  $R$  par une transformation de Möbius qui envoie  $z_0$  sur l'origine.

*Rayon de convergence, principe du maximum.* — Commençons par quelques généralités. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \dots$$

une série entière à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ . Son rayon de convergence  $\rho(f)$  est donné par la formule usuelle :

$$\rho(f) = 1 / \limsup |a_k|^{1/k}.$$

Supposons-le strictement positif. Comme en analyse complexe,  $f$  définit une fonction continue sur la boule non circonferenciée  $B^\circ(0, \rho(f))$ .

Comme en analyse complexe, les fractions rationnelles peuvent être développées en série entière : si  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  est une fraction rationnelle sans pôle dans le disque non circonferencié  $B^\circ(0, r)$ , alors le développement en série formelle de  $R$  en l'origine possède un rayon de convergence  $\geq r$  et la somme de cette série coïncide avec  $R$  dans le disque  $B^\circ(0, r)$ .

Revenons au cas général d'une série entière à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ , comme ci-dessus. Pour  $r \geq 0$ , posons  $M(r) = \sup_{k \geq 0} |a_k| r^k$ . On a  $M(r) < \infty$  si  $r < \rho(f)$ . De plus,  $M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ . L'inégalité  $|f(z)| \leq M(r)$  si  $|z| \leq r$  résulte en effet simplement de l'inégalité ultramétrique, chaque terme de la série définissant  $f(z)$  étant de module au plus égal à  $M(r)$ . Si  $|z| < r$  et  $f$  n'est pas constante, on constate que l'inégalité est

stricte :  $|f(z)| < M(r)$  — c'est un analogue du *principe du maximum*. Si  $r \notin p^{\mathbb{Q}}$ , la borne supérieure n'est pas non plus atteinte puisqu'il n'existe pas d'élément de  $\mathbb{C}_p$  de module  $r$ . Elle est en revanche atteinte en un point  $z$  de module  $r$  dans le cas où  $r \in p^{\mathbb{Q}}$ . (L'argument est analogue à celui du lemme 2.9.3 ; voir aussi [16], p. 114, prop. 1.1.) Par passage à la limite, on en déduit aussi que  $M(r) = \sup_{|z| < r} |f(z)|$  si  $r \leq \rho(f)$ .

Si de plus  $f(0) = 0$ , la théorie du polygone de Newton (voir [16], chapitre II) entraîne même que  $f(B^{\bullet}(0, r)) = B^{\bullet}(0, R)$ . Il est en tout cas assez facile de vérifier que  $f$  prend une valeur de module  $R$  sur  $B^{\bullet}(0, r)$  ; par changement de variables et multiplication par un scalaire analogues à ce qui a été fait p. 19, on se ramène au cas où  $r = R = 1$ . Alors, la réduction  $\bar{f}$  modulo  $\mathfrak{m}$  de  $f$  est un polynôme et pour tout élément  $z$  de  $\mathcal{O}$  dont la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  n'est pas un zéro de  $\bar{f}$ , on a  $|f(z)| = 1$ .

*Boules invariantes.* — Dans la suite de ce paragraphe, on considère une série entière. On a  $f'(0) = a_1$ . Supposons  $a_1 \neq 0$ . Alors, pour  $|z|$  assez petit,  $|f(z)| = |a_1||z|$ . Par l'inégalité ultramétrique, il suffit en effet que  $|z| < r$ , où  $r$  est choisi de sorte que  $|a_n|r^{n-1} \leq |a_1|$  pour tout  $n \geq 1$ .

En particulier, si 0 est un point fixe répulsif, alors  $|a_1| > 1$  et, pour  $r$  assez petit, aucune boule  $B(0, r)$  de  $\mathbb{C}_p$  n'est stable par  $f$ .

En revanche, si 0 est un point fixe indifférent ou attractif, toute boule de centre 0 et de rayon assez petit est stable par  $f$ . Cela vaut encore si  $f'(0) = 0$ , il suffit de reprendre l'argument précédent en tenant compte du premier terme non nul (si c'est celui de degré  $d$ , on aura  $|f(z)| = |a_d||z^d|$  pour  $|z|$  assez petit).

Nous avons ainsi justifié le lemme suivant.

**Lemme 4.2.1.** — *Supposons que 0 soit un point fixe indifférent ou attractif. Toute boule de centre 0 et de rayon assez petit est alors stable par  $f$ .*

*Inversement, si 0 est un point fixe répulsif, aucune boule de centre 0 et de rayon assez petit n'est stable par  $f$ .*

Dans le complexe, c'est-à-dire pour la dynamique d'un polynôme ou d'une application holomorphe d'une variable, la dynamique au voisinage d'un point fixe indifférent est en générale très riche. Nous renvoyons le lecteur au livre [23], qui contient une description de la dynamique lorsque la dérivée de l'application au point fixe est une racine de l'unité (fleur de Leau-Fatou) ou d'ordre infini (phénomènes de petits diviseurs). Le lemme précédent montre que ces phénomènes disparaissent dans le monde de la dynamique  $p$ -adique (ou ultramétrique). Plus précisément, il résulte de ce lemme et du suivant que la dynamique au voisinage d'un point fixe indifférent est celle d'une isométrie. Les subtilités de la théorie des systèmes dynamiques complexes causés par les phénomènes de petits diviseurs n'ont donc pas d'analogue  $p$ -adique.

**Lemme 4.2.2.** — Soit  $r$  un nombre réel strictement positif. Soit  $f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k$  une série entière à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$ . Soit  $c$  un nombre réel positif.

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le rayon de convergence de  $f$  est au moins égal à  $r$  et l'on a  $|f(z)| \leq c|z|$  pour tout point  $z$  de  $B^\circ(0, r)$  ;

(ii) Pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $|a_k| \leq cr^{1-k}$ .

2) Si elles sont satisfaites, l'application  $f$  est  $c$ -lipschitzienne sur  $B(0, r)$ .

3) Supposons qu'elles soient satisfaites ; les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(i)  $f$  induit une isométrie de  $B(0, r)$  ;

(ii)  $f$  induit un automorphisme de  $B(0, r)$  ;

(iii) pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ , on a  $|f'(z)| = 1$ .

(iv) pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ , on a  $|f'(z)| \leq 1$  et l'égalité est atteinte ;

*Démonstration.* — Lorsque  $|f(z)|$  est inférieur à  $c|z|$  sur la boule de centre 0 et de rayon  $r$ , le supremum de  $|f(z)|$  sur cette boule est inférieur à  $cr$  ; ainsi, le maximum des  $|a_k| r^k$  est inférieur à  $cr$ . Réciproquement, lorsque  $\max(|a_k| r^{k-1})$  est majoré par  $c$ , on obtient

$$|f(z)| = \left| \sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1} \right| |z| \leq c|z|.$$

Ceci démontre la première propriété énoncée. La deuxième s'en déduit à l'aide de la majoration

$$\left| z^k - w^k \right| = |z - w| \left| z^{k-1} + z^{k-2}w + \dots + w^{k-1} \right| \leq r^{k-1} |z - w|$$

pour  $z, w \in B^\circ(0, r)$ . Passons à la troisième.

Par hypothèse,  $|f(z)| \leq c|z|$  si  $|z| < r$ . D'autre part, on vient de rappeler que pour  $s < r$ ,  $f(B^\bullet(0, s)) = B^\bullet(0, s')$ , où  $s' = \max |a_n| s^n$ . Lorsque  $s$  tend vers  $r$ ,  $s'$  tend vers  $r' = \max |a_n| r^n = \tilde{c}r$ , où  $\tilde{c}$  est défini par

$$\tilde{c} = \max |a_n| r^{n-1}.$$

L'image de  $B^\circ(0, r)$  est donc la boule  $B^\circ(0, \tilde{c}r)$ . Sous les assertions (i) et (ii), on voit donc que  $\tilde{c} = 1$ .

Commençons par établir l'analogie du *lemme de Schwarz* en démontrant que  $|f'(z)| \leq \tilde{c}$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ . Posons en effet  $g(z) = f(z)/z$  pour  $z \in B^\circ(0, r)$  ; c'est la somme d'une série entière convergente et  $|g(z)| \leq \tilde{c}r/s$  si  $|z| \leq s < r$ . Par le principe du maximum, on a donc  $\sup_{B^\bullet(0, s)} |g| \leq \tilde{c}r/s$ . Faisant tendre  $s$  vers  $r$ , on voit que  $|g(z)| \leq \tilde{c}$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ . En particulier,  $|g(0)| = |f'(0)| \leq \tilde{c}$ . Le cas général s'en déduit en considérant la série  $f(z+w)$ , pour  $w \in B^\circ(0, r)$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le point (3). L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est évidente, de même que l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv). Sous l'assertion (i), la formule de Taylor

$$|f(z+w) - f(z)| = |f'(z)| |w| + O(|w|^2),$$

pour  $z$  et  $w \in B^\circ(0, r)$ , entraîne que  $|f'(z)| = 1$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ , d'où (iii).

Supposons (ii). Comme une série formelle n'est pas injective au voisinage d'un point critique,  $f'$  ne s'annule pas sur  $B^\circ(0, r)$ . Le principe du maximum pour  $1/f'$  entraîne alors que  $|f'|$  est de module constant sur la boule  $B^\circ(0, r)$ , nécessairement égal à 1.

Il reste à démontrer que (iv) entraîne (i). On observe d'abord par le principe du maximum que  $|f'(z)| = 1$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ . En particulier,  $f'$  ne s'annule pas sur  $B^\circ(0, r)$ . Reprenons la fonction  $g(z) = f(z)/z$  pour  $z \in B^\circ(0, r)$  utilisée pour démontrer le lemme de Schwarz. On a vu que  $|g(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ . Puisque  $|g(0)| = |f'(0)| = 1$ , le principe du maximum entraîne de nouveau que  $|g(z)| = 1$  pour tout  $z \in B^\circ(0, r)$ , autrement dit  $|f(z)| = |z|$ . En appliquant ce raisonnement à la série entière  $f(z+w)$ , pour  $w \in B^\circ(0, r)$  fixé, on en déduit que  $f$  est une isométrie de  $B^\circ(0, r)$ .  $\square$

### 4.3. Ensemble exceptionnel et bonne réduction. —

**Définition 4.3.1.** — On dit qu'un point  $z \in \hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est *exceptionnel* si la réunion des  $R^{-n}(z)$ , pour  $n \geq 0$ , est un ensemble fini.

Dans le cas complexe, on sait qu'il y a au plus deux points exceptionnels. S'il y en a exactement un,  $R$  est conjuguée à un polynôme; s'il y en a deux, alors  $R$  est conjuguée à  $z^d$  ou à  $z^{-d}$ . Une démonstration est possible via la formule de Riemann–Hurwitz (voir [23], lemma 4.9, ou [28], theorem 1.6). Elle s'étend à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  ( $\mathbf{C}_p$  est de caractéristique 0) :

**Proposition 4.3.2.** — *Il y a au plus deux points exceptionnels dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . S'il y en a deux,  $R$  est conjuguée à  $z^d$  ou à  $z^{-d}$ ; s'il y en a un seul,  $R$  est conjuguée à un polynôme.*

Comme dans le cas complexe, on observe que ces points exceptionnels sont attractifs. La nouveauté provient donc des autres points de l'espace hyperbolique  $p$ -adique :

**Proposition 4.3.3 (Rivera-Letelier, [27], §7).** — *La coupure canonique est un point exceptionnel si et seulement si la fraction rationnelle  $R$  a bonne réduction.*

*Il y a au plus un point exceptionnel dans  $\mathbf{H}_p$ ; si un tel point existe, il est rationnel.*

S'il y a un point exceptionnel supplémentaire, on peut conjuguer  $R$  de sorte que ce soit la coupure canonique; alors  $R$  a bonne réduction. Autrement dit, il y a un point exceptionnel supplémentaire  $S$  si et seulement si la fraction rationnelle  $R$  est simple. En outre, ce point exceptionnel est répulsif car  $\deg_S R = \deg R > 1$ ; un tel point se situe donc dans l'ensemble de Julia, tandis que les points exceptionnels de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  appartiennent à l'ensemble de Fatou.

**Exercice 4.3.4.** — Soit  $P \in \mathbf{C}_p[z]$  un polynôme de degré au moins 2. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $P$  est conjugué à une fraction rationnelle ayant bonne réduction ;
- (2)  $P$  possède un point fixe totalement invariant dans  $\mathbf{H}_p^{\mathbf{Q}}$  ;
- (3)  $P$  est conjugué à un polynôme ayant bonne réduction.

**4.4. Dynamique des applications ayant bonne réduction.** — Passons maintenant à l'étude des applications ayant bonne réduction.

*Dynamique sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .* — Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $\geq 2$  ayant bonne réduction. Soit  $\mathbf{F}_q$  un sous-corps fini de  $\overline{\mathbf{F}_p}$  contenant les coefficients de la réduction  $\overline{R}$  de  $R$ . La dynamique de  $\overline{R}$  sur  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$  est assez simple, puisque tout point est prépériodique. En effet, si  $\alpha$  est un tel point, il existe un sous-corps fini  $F$  de  $\overline{\mathbf{F}_q}$  contenant  $\mathbf{F}_p$  tel que  $\alpha \in \mathbf{P}^1(F)$  ; alors,  $\mathbf{P}^1(F)$  est un ensemble fini stable par  $\overline{R}$ , en particulier, l'orbite de  $\alpha$  par  $\overline{R}$  est finie.

Si  $\pi$  désigne l'application de réduction de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  sur  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$ , on a  $\pi \circ R = \overline{R} \circ \pi$ . Plus précisément, la théorie du polygone de Newton entraîne que l'image  $R(B(\alpha))$  de la boule  $B(\alpha)$  par  $R$  est égale à  $B(\overline{R}(\alpha))$  et l'application  $R : B(\alpha) \rightarrow B(\overline{R}(\alpha))$  est de degré  $\deg_{\alpha}(\overline{R})$ . À chaque point périodique  $\alpha$  de  $\overline{R}$  correspond en particulier une boule  $B(\alpha)$  qui est périodique pour  $R$ , au sens où un itéré convenable  $R^k$  de  $R$  applique  $B(\alpha)$  sur elle-même. D'après le lemme 4.2.2, la dynamique de  $R^k$  en restriction à cette boule est isométrique ou attractive. La proposition suivante précise cela.

**Proposition 4.4.1 (voir [25], prop. 4.32).** — Soit  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  une fraction rationnelle ayant bonne réduction. Soit  $\alpha$  un point de  $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$  qui est périodique de période  $k$ .

(1) Pour que la boule  $B(\alpha)$  contienne un point périodique attractif de période  $k$ , il faut et il suffit que  $(\overline{R}^k)'(\alpha) = 0$ .

(2) Si  $z$  est un tel point,  $B(\alpha)$  est la plus grande boule centrée en  $z$  qui soit contenue dans le bassin d'attraction de  $z$ .

(3) Si, au contraire,  $(\overline{R}^k)'(\alpha) \neq 0$ , la boule  $B(\alpha)$  est contenue dans le domaine de quasi-périodicité<sup>(10)</sup> de  $R$  et contient un point périodique indifférent de période  $k$ .

**Remarque 4.4.2.** — Cette proposition peut-être complétée par le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas. Soit  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  une fraction rationnelle. Si l'on munit  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  de la distance sphérique,  $R$  est lipschitzienne de rapport  $\Delta(R)^{-2}$ . Si  $R$  a bonne réduction,  $R : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est donc 1-lipschitzienne et tous ses points périodiques sont donc attractifs ou indifférents (voir [24]).

10. Le domaine de quasi-périodicité est défini ci-dessous au paragraphe 4.6.

*Éléments de démonstration.* — Soit  $z$  un point périodique attractif de période  $k$  dans  $B(\alpha)$ ; alors  $\bar{z} = \alpha$  est un point périodique pour  $\bar{R}$  dont la période divise  $k$ . Comme  $(\bar{R}^k)'(\bar{z})$  est la réduction de  $(R^k)'(z)$ , on a  $(\bar{R}^k)'(\alpha) = 0$ .

Soit  $B$  une boule centrée en  $z$  qui n'est pas contenue dans  $B(\alpha)$ . La réduction de  $B$  contient une infinité de points  $\beta$  de  $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{F}}_p)$  pour lesquels la suite  $(\bar{R}^k)(\beta)$  est prépériodique et ne contient pas  $\alpha$ . Pour un tel  $\beta$ , la boule  $B(\beta)$  est donc disjointe du bassin d'attraction de  $z$ .

Supposons, inversement, que  $(\bar{R}^k)'(\alpha) = 0$  et démontrons que  $R^k$  possède un unique point fixe dans  $B(\alpha)$ . Quitte à conjuguer par une homographie de  $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$ , on suppose  $\alpha = 0$  et on écrit  $R^k = a_0 + a_1z + \dots$  le développement en série entière de  $R^k$ . Il est de rayon de convergence au moins égal à 1 car  $R^k$  n'a pas de pôle dans la boule  $B(\alpha) = B^\circ(0, 1)$ . Comme  $\bar{R}^k(\alpha) = \alpha$ , on a  $|a_0| < 1$ ; comme  $(\bar{R}^k)'(\alpha) = 0$ ,  $|a_1| < 1$ . En outre,  $\sup_{B^\circ(0,1)} |R^k| = \max(|a_n|) \leq 1$  car  $R^k$  a bonne réduction. Soit  $r$  un nombre réel tel que  $|a_0| < r < 1$ . Posons  $c = \max_{n \geq 1} |a_n| r^{n-1}$ ; on a  $c < 1$ . D'après le lemme 4.2.2,  $R^k$  est  $c$ -lipschitzienne sur la boule  $B^\bullet(0, r)$  et  $|R^k(z)| \leq \max(cr, r) \leq r$  pour tout  $z \in B^\bullet(0, r)$ . Par le théorème du point fixe, il en résulte que  $R^k$  possède un unique point fixe  $z_0$  dans  $B^\bullet(0, r)$  et, par conséquent, un unique point fixe, attractif, dans  $B(\alpha)$ . Plus généralement, on voit que  $z$  est l'unique point périodique de  $R^k$  dans  $B(\alpha)$ .

Nous renvoyons à [25] pour le reste de la démonstration.  $\square$

*Dynamique sur  $\mathbf{H}_p$ .* — Décrivons la dynamique de  $R$  sur  $\mathbf{H}_p$ . La coupure canonique  $S_{\mathrm{can}}$  est totalement invariante et les branches issues de  $S_{\mathrm{can}}$ , en bijection avec  $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{F}}_p)$ , sont toutes prépériodiques. Si  $S$  est un élément de  $\mathbf{H}_p$ , on a expliqué au §3.2 que

$$\mathrm{dist}(R_*(S), S_{\mathrm{can}}) \geq \mathrm{dist}(S, S_{\mathrm{can}}).$$

Si le degré de  $R$  sur la branche contenant  $S$  est strictement plus grand que 1, alors, au voisinage de  $S_{\mathrm{can}}$ ,  $R_*$  dilate strictement la géodésique reliant  $S_{\mathrm{can}}$  à  $S$ ; dans ce cas, l'inégalité est donc stricte. La figure 4 illustre ce cas lorsque la branche est fixée par  $R$ ; la boule qui définit cette branche contient donc un point fixe attractif (cf. la proposition 4.4.1).

*Réduction inséparable et cycles attractifs.* — On dit que la réduction d'une fraction rationnelle  $R$  est *inséparable* lorsque la dérivée de  $\bar{R}$  est identiquement nulle. Cela revient à dire que  $\bar{R}$  est de la forme  $Q(z^p)$  pour un élément  $Q$  de  $\bar{\mathbf{F}}_p(z)$ .

**Proposition 4.4.3.** — *Soit  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  une fraction rationnelle ayant bonne réduction.*

- (1) *Si la réduction de  $R$  est inséparable, alors  $p$  divise le degré de  $R$  et tout point périodique est attractif.*
- (2) *Si  $\bar{R}'$  n'est pas identiquement nulle, tout cycle attractif de  $R$  attire un point critique, si bien que le nombre de cycles attractifs est majoré par  $2 \deg(R) - 2$ .*



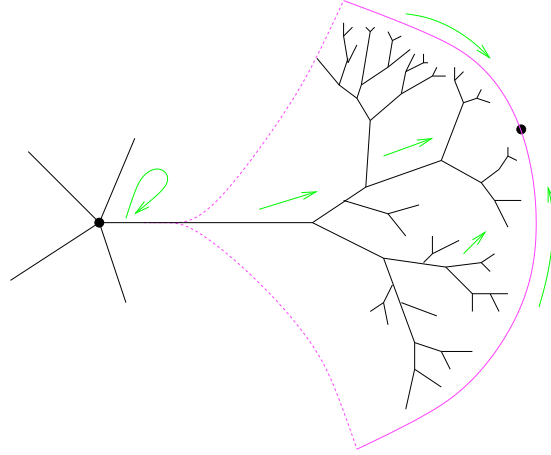


FIGURE 4. BASSIN D'ATTRACTION : Bassin d'attraction d'un point pour une transformation rationnelle qui a bonne réduction :  $R(S_{\text{can}}) = S_{\text{can}}$  ; ici, le cycle attractif est réduit à un point fixe et la branche « pointant vers ce point » est donc fixée.

*Démonstration.* — Par bonne réduction, le degré de  $R$  est égal à celui de  $\bar{R}$ . Puisque  $\bar{R}$  est de la forme  $Q(z^p)$ ,  $\deg(R)$  est un multiple de  $p$ . Le reste de l'assertion (1) découle alors de la proposition précédente. (Voir aussi [27], prop. 6.4.) L'assertion (2) est le point (iv) de la proposition 4.32 de [25] ; recopions ce qu'écrit Rivera-Letelier. Soit  $w$  un point périodique attractif de période  $k$ . Quitte à conjuguer  $R$  par une homographie  $H \in \text{PSL}(2, \mathcal{O})$ , nous supposons que  $w = 0$ . Développons alors  $R^k$  en série entière au voisinage de 0,

$$R^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Puisque  $R$  a bonne réduction,  $|a_n| \leq 1$  pour tout entier  $n$ , et comme 0 est attractif,  $|a_1| < 1$  ; comme  $\bar{R}'$  n'est pas identiquement nulle, il existe un indice  $i$  tel que  $|a_i| = 1$ . La théorie du polygone de Newton montre alors qu'il existe un point  $z$  de valeur absolue  $|z| < 1$  tel que  $(R^k)'(z) = 0$ . Puisque  $|z| < 1$ ,  $z$  est un point critique attiré par notre cycle attractif.  $\square$

**Théorème 4.4.4** ([27], **théorème 2**). — *Une fraction rationnelle a un et un seul point périodique dans  $\mathbf{H}_p$  si, et seulement si, après changement de coordonnée, elle a bonne réduction inséparable.*

Dans ce cas, tous les points périodiques de la fraction rationnelle dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  sont attractifs (cf. le point (1) de la proposition 4.4.3), et l'unique point fixe dans  $\mathbf{H}_p$  est répulsif.

**4.5. Ensembles de Julia et de Fatou.** — On appelle *ensemble de Julia* de  $R$  et on note  $\mathcal{J}(R)$  l'adhérence pour la topologie faible de l'ensemble des points périodiques répulsifs de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .

**Théorème 4.5.1 (Rivera-Letelier).** — Soit  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  une transformation rationnelle de degré au moins 2. Alors,  $R$  possède au moins un point fixe répulsif dans  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ . De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $R$  ne possède aucun point périodique dans  $\mathbf{H}_p$  ;
- (2)  $R$  n'a qu'un nombre fini de points périodiques non répulsifs dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  ;
- (3)  $R$  possède un seul point périodique non répulsif dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ .

Si ces propriétés sont satisfaites, l'unique point périodique non répulsif de  $R$  dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est un point fixe attractif.

**Remarque 4.5.2.** — Rivera-Letelier montre aussi qu'une fraction rationnelle  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  de degré  $\geq 2$  a nécessairement 0, 1, ou une infinité de points périodiques dans  $\mathbf{H}_p$ . Les deux théorèmes précédents caractérisent donc les fractions rationnelles qui n'ont qu'un nombre fini d'orbites périodiques dans  $\mathbf{H}_p$ .

Nous retiendrons en particulier du théorème précédent que *l'ensemble de Julia n'est pas vide*. En revanche, il peut ne contenir aucun point de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . En effet, on a  $\mathcal{J}(R) = \{S_{\text{can}}\}$  lorsque  $R$  a bonne réduction (voir le §4.4). Plus généralement, lorsque  $R$  a un point exceptionnel  $S$  dans  $\mathbf{H}_p$ ,  $\mathcal{J}(R)$  est réduit au singleton  $\{S\}$ .

On définit l'*ensemble de Fatou* de  $R$  comme le complémentaire de l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}(R)$  ; on le note  $\mathcal{F}(R)$ . Comme en dynamique holomorphe, on peut démontrer que l'ensemble de Fatou est le plus grand ouvert sur lequel la suite  $(R^n)$  est une famille normale. Nous renvoyons le lecteur à [20] et [28], §5.4, 5.7 et 5.10.3.2 pour plus de détails.

Par définition, les points périodiques répulsifs sont dans l'ensemble de Julia. D'après les résultats du paragraphe 4.2, la dynamique au voisinage d'un point périodique indifférent est isométrique ; par suite, les points périodiques indifférents appartiennent à l'ensemble de Fatou, et il en est de même des points périodiques attractifs. D'après le théorème suivant, de tels points périodiques existent toujours.

**Théorème 4.5.3 (Benedetto, [5]).** — Toute transformation rationnelle  $R \in \mathbf{C}_p(z)$  de degré au moins 2 possède un point fixe dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  qui est attractif ou indifférent.

Par conséquent, *l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}(R)$  n'est pas vide*. Ce résultat va à l'encontre de ce qui est valable pour la dynamique complexe puisque, sur  $\mathbf{C}$ , l'ensemble de Fatou peut être vide et il n'existe pas toujours de point périodique attractif ou indifférent (voir par exemple les « exemples de Lattès », [13], §7, 11 et 12).

*Démonstration (voir aussi [5], §2.4.4).* — Soit  $d \geq 2$  le degré de  $R$  et notons  $z_0, \dots, z_d$  les  $d + 1$  points fixes de  $R$  répétés suivant leur multiplicité. Pour  $i \in \{0, \dots, d\}$ , soit  $\lambda_i = R'(z_i)$  le multiplicateur de  $R$  au point  $z_i$ . Si tous les  $\lambda_i$  sont différents de 1, alors les  $z_i$  sont distincts et

$$(4.5.1) \quad \sum_{i=0}^d \frac{1}{\lambda_i - 1} = 1.$$

Dans le cas complexe, c'est-à-dire pour  $R \in \mathbf{C}(z)$  et  $z_i \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , cette égalité résulte de la formule de Lefschetz holomorphe, qui peut être démontrée facilement à l'aide du théorème des résidus (voir [23], §12, et [18], §3.4). Mais il s'agit en fait d'une identité algébrique que l'on peut démontrer directement (voir l'exercice 4.5.4). Elle est donc valable dans notre cas.

Supposons maintenant par l'absurde que la valeur absolue de chaque multiplicateur  $\lambda_i$  soit strictement supérieure à 1. Dans ce cas, l'inégalité ultramétrique entraîne tout d'abord que

$$\left| \frac{1}{\lambda_i - 1} \right| = \frac{1}{|\lambda_i|} < 1$$

pour tout indice  $i$ , puis que la somme des inverses des  $|\lambda_i - 1|$  est elle-même strictement inférieure à 1. Ceci contredit la formule de Lefschetz, et montre donc le résultat annoncé.  $\square$

**Exercice 4.5.4.** — Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré  $d$ , qu'on écrit  $P/Q$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes premiers entre eux. On suppose pour simplifier que  $\deg(Q) = d$ , c'est-à-dire que  $\infty$  n'est pas un point fixe de  $R$ . Les points fixes de  $R$  sont alors les  $d + 1$  zéros, disons du polynôme  $zQ(z) - P(z)$ ; nous les noterons  $z_0, \dots, z_d$ .

1) Si  $z_i$  est un point fixe multiple, démontrer que son multiplicateur  $R'(z_i)$  est égal à 1.

2) Si les  $z_i$  sont distincts deux à deux, écrire la formule d'interpolation de Lagrange pour le polynôme  $Q$  et en déduire la formule 4.5.1.

L'ensemble de Julia et l'ensemble de Fatou sont totalement invariants :

$$R^{-1}(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R), \quad R^{-1}(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R).$$

Ils jouissent des propriétés suivantes. La première proposition est à opposer au cas complexe, puisque l'ensemble de Julia peut, dans ce cas, être égal à  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  tout entier.

**Proposition 4.5.5.** — Soit  $R$  un élément de  $\mathbf{C}_p(z)$  de degré  $\geq 2$ . Alors

- (1) l'ensemble de Julia est d'intérieur vide;
- (2) si  $R$  n'a pas de point exceptionnel,  $\mathcal{J}(R)$  n'a pas de point isolé;
- (3) l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}(R)$  est ouvert et dense.

La seconde proposition est l'analogue d'une propriété bien connue de dynamique holomorphe ([23], theorem 4.10).

**Proposition 4.5.6.** — *Soit  $V$  un ouvert pour la topologie faible qui rencontre  $\mathcal{F}(R)$  mais ne contient pas de point exceptionnel. Il existe alors un entier  $N > 0$  tel que  $R^N(V)$  contienne  $\mathcal{F}(R)$  et la réunion des  $R^n(V)$ , pour  $n \geq 0$ , est le complémentaire des points exceptionnels dans  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ .*

**4.6. Structure de l'ensemble de Fatou et domaine de quasi-périodicité.** — Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré au moins 2. On dit qu'un point  $z$  de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est *récurrent* si l'adhérence de son orbite contient  $z$ . On appelle *domaine de quasi-périodicité*  $\mathcal{E}(R)$  l'intérieur de l'ensemble des points récurrents pour la topologie faible. Il est donc contenu dans l'ensemble de Fatou. De plus, il vérifie les propriétés suivantes ([25], §4.2 et §5) :

(1) c'est un ensemble invariant,  $R_*(\mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(R)$ , et la restriction de  $R$  à  $\mathcal{E}(R)$  définit un homéomorphisme de  $\mathcal{E}(R)$  sur lui-même (mais, en général,  $\mathcal{E}(R)$  n'est pas totalement invariant) ;

(2) pour tout entier  $n > 0$ , on a  $\mathcal{E}(R) = \mathcal{E}(R^n)$  ;

(3) l'intersection de  $\mathcal{E}(R)$  et de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est formé des points  $z_0 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  tels qu'il existe une boule ouverte  $B$  contenant  $z_0$  et une suite  $(n_i)$  d'entiers tels que  $R^{n_i}$  converge uniformément vers l'identité sur  $B$  ;

(4) en particulier, l'ensemble  $\mathcal{E}(R)$  contient tout point périodique indifférent de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  (voir le paragraphe 4.2) ;

(5) une coupure  $S_0$  appartient à  $\mathcal{E}(R)$  si et seulement s'il existe un entier  $N > 0$  et un nombre réel  $\delta > 0$  tel que  $R_*^N(S) = S$  pour toute coupure  $S$  telle que  $\text{dist}(S, S_0) < \delta$ .

**Exemple 4.6.1.** — Si  $R(z) = p^3 z^2 + z$ , de sorte que  $\bar{R}(z) = z$ , alors  $S_{\text{can}}$  appartient à  $\mathcal{E}(R)$  et satisfait la propriété (5) ci-dessus.

**4.7. Composantes errantes.** — Soit  $C$  une composante connexe de l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}(R)$ . Alors,  $R(C)$  est une composante connexe de  $\mathcal{F}(R)$  et  $R^{-1}(C)$  est une réunion finie de composantes connexes de  $\mathcal{F}(R)$ .

Dans le cas complexe, Sullivan a démontré que les composantes connexes de  $\mathcal{F}(R)$  sont prépériodiques ; autrement dit, « l'ensemble de Fatou n'a pas de composante errante » (voir [23], appendix F et les références qui s'y trouvent). En revanche, dans le cas  $p$ -adique, Benedetto a exhibé une famille de polynômes dont l'ensemble de Fatou possède des composantes errantes (voir [9]). Il s'agit de polynômes à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  (pas dans  $\bar{\mathbf{Q}}_p$ ), que nous décrirons au paragraphe 5.5.

**Théorème 4.7.1 (Rivera-Letelier).** — *Toute composante connexe périodique de  $\mathcal{F}(R)$  est soit contenue dans un bassin d'attraction d'une orbite périodique attractive, soit une composante connexe du domaine de quasi-périodicité.*

Rappelons que dans le cas complexe, une composante périodique de l'ensemble de Fatou est soit un bassin d'attraction d'un point fixe attractif ou parabolique, soit un disque de Siegel, soit un anneau d'Herman (voir [23], §15). Les composantes connexes de  $\mathcal{E}(R)$  sont les analogues des disques de Siegel et anneaux d'Herman.

Le théorème suivant utilise la notion d'affinoïde ouvert et les notations introduites au paragraphe 2.10.

**Théorème 4.7.2 (Rivera-Letelier).** — *Soit  $C$  une composante connexe de  $\mathcal{E}(R)$ . Alors  $C$  est périodique. De plus, si  $C$  est fixe, il existe un affinoïde ouvert  $A \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  tel que*

- (1)  $R(A) = A$ ,  $\widehat{A} = C$  et  $A$  est maximal dans  $\mathcal{E}(R)$  ;
- (2) les extrémités  $S_i$  de  $\widehat{A}$  sont des points périodiques répulsifs de  $R$  ; en particulier, les  $S_i$  sont des coupures rationnelles (voir la proposition 3.2.1).

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 de [25] pour les démonstrations.

## 5. Le cas des polynômes

Dans cette partie, nous précisons la dynamique sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  induite par un polynôme, puis nous décrivons les exemples de Benedetto. Soit  $P$  un élément de  $\mathbf{C}_p[z]$  de degré  $d > 1$ , que nous écrirons

$$P(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i.$$

**5.1. Polynômes ayant bonne réduction.** — Supposons que le polynôme  $P$  a bonne réduction, c'est-à-dire que  $|a_d| = \max_i |a_i| = 1$  (voir l'exercice 2.2.3) et notons  $\overline{P}$  sa réduction.

D'après l'étude de la dynamique des fractions rationnelles ayant bonne réduction, exposée au paragraphe 4.4, l'ensemble de Julia est réduit à  $\{S_{\text{can}}\}$  et deux cas peuvent se présenter suivant que le polynôme  $\overline{P}$  est inséparable ou non.

Lorsque le polynôme  $\overline{P}$  est inséparable (c'est-à-dire lorsque sa dérivée est identiquement nulle), toutes les orbites périodiques de  $P$  situées dans  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  sont attractives. Le domaine de quasi-périodicité est vide et l'ensemble de Fatou est constitué de bassins d'attraction.

Inversement, lorsque le polynôme  $\overline{P}$  est séparable, il n'existe qu'un nombre fini d'orbites périodiques attractives et toutes les autres sont indifférentes.

**5.2. Codage et hyperbolicité.** — Le point à l'infini est un point fixe exceptionnel de  $P$ .

Écrivons  $P$  sous la forme

$$P(z) = z + a_d \prod_{i=1}^d (z - z_i)$$

où les  $z_i$  sont les points fixes de  $P$  dans  $\mathbf{C}_p$ , répétés selon leur multiplicité. Quitte à conjuguer  $P$  par une homothétie, on peut supposer que  $\max(|z_i|) = 1$ . Si  $|a_d| = 1$ , alors  $P$  a bonne réduction ; plus généralement, le changement de variables  $z' = \lambda z$  transforme  $P$  en un polynôme ayant bonne réduction dès que  $\lambda$  vérifie  $|\lambda|^{d-1} |a_d| = 1$  et  $|z_i/\lambda| \leq 1$  pour tout  $i$ .

Si  $P$  n'a qu'un seul point fixe dans  $\mathbf{C}_p$ , on peut supposer que c'est 0, quitte à conjuguer  $P$  par une translation. En prenant  $\lambda = a_d^{-1/(d-1)}$ , on voit que  $P$  est conjugué à un polynôme ayant bonne réduction.

Si  $P$  a au moins deux points fixes, on peut conjuguer  $P$  par une homothétie et supposer que  $\max(|z_0|, \dots, |z_d|) = 1$ . Si  $|a_d| \leq 1$ ,  $P$  est encore conjugué à un polynôme ayant bonne réduction.

Dans la suite, nous supposons que *le polynôme  $P$  n'est pas conjugué à un polynôme ayant bonne réduction*. D'après l'exercice 4.3.4,  $P$  n'est pas non plus conjugué à une fraction rationnelle ayant bonne réduction. Conservant les notations précédentes, on a donc  $\max(|z_i|) = 1$  et  $|a_d| > 1$ .

On appelle *ensemble de Julia rempli* de  $P$  l'ensemble  $\mathcal{K}(P)$  des points de  $\mathbf{C}_p$  dont l'orbite est bornée. C'est un ensemble totalement invariant de  $\mathbf{C}_p$ . Pour tout  $z \in \mathbf{C}_p$  tel que  $|z| > 1$ , on a  $|z - z_i| = |z|$  pour tout  $i$ , d'où  $|P(z)| = |a_d| |z|^d$ . Par suite,  $P^n(z) \rightarrow \infty$  si  $|z| > 1$ . Cela entraîne que  $\mathcal{K}(P)$  est contenu dans  $B^\bullet(0, 1)$ , donc aussi dans  $P^{-n}(B^\bullet(0, 1))$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Puisque l'intersection des  $P^{-n}(B^\bullet(0, 1))$  est contenue dans  $\mathcal{K}(P)$ , nous obtenons l'égalité

$$(5.2.1) \quad \mathcal{K}(P) = \bigcap_{n \geq 1} P^{-n}(B^\bullet(0, 1)).$$

D'après la proposition 2.3.3,  $P^{-n}(B^\bullet(0, 1))$  est la réunion d'une famille finie  $\Sigma_n$  de boules fermées deux à deux disjointes.

Si  $B$  appartient à  $\Sigma_n$ , il existe une unique boule  $B'$  appartenant à  $\Sigma_{n-1}$  qui contient  $B$  ; nous la noterons  $i(B)$ . On définit ainsi une application  $i : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$ . Soit  $\Sigma_\infty$  la limite projective des  $\Sigma_n$  (suivant les applications  $i$ ) ; un élément  $B_\infty$  de  $\Sigma_\infty$  est donc une suite  $(B_n)$  de boules emboîtées, où  $B_n \in \Sigma_n$  pour tout  $n$ .

À toute boule  $B \in \Sigma_n$  sont associés deux nombres :

- (1) le diamètre de  $B$ , noté  $\text{diam}(B)$  ; c'est un élément de  $p^{\mathbf{Q}}$ .
- (2) le degré de  $P|_B : B \rightarrow P(B)$ , noté  $\text{deg}(B)$  ; c'est un entier inférieur ou égal à  $\text{deg}(P)$ .

Soit  $B_\infty$  un point de  $\Sigma_\infty$ , défini par une suite  $(B_n)$  de boules emboîtées, avec  $B_n \in \Sigma_n$  pour tout  $n$ . Les suites  $(\text{diam}(B_n))$  et  $(\text{deg}(B_n))$  convergent car elles sont décroissantes. Nous noterons  $\text{diam}(B_\infty)$  et  $\text{deg}(B_\infty)$  leurs limites.

Par ailleurs, si  $B$  appartient à  $\Sigma_n$ , alors  $P(B)$  est une boule qui appartient à  $\Sigma_{n-1}$ ; si l'on note encore  $P$  l'application de  $\Sigma_n$  dans  $\Sigma_{n-1}$  ainsi définie, on a la relation

$$P \circ i = i \circ P.$$

Par conséquent, le polynôme  $P$  induit une application de  $\Sigma_\infty$  dans lui-même, toujours notée  $P$ .

Soit  $z$  un point de  $\mathcal{K}(P)$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $z \in P^{-n}(B^\bullet(0,1))$  donc il existe une unique boule  $B \in \Sigma_n$  telle que  $z \in B$ . Notons  $j_n(z)$  cette boule. On a  $i(j_n(z)) = j_{n-1}(i(z))$ ; on peut donc définir  $j(z)$  comme étant l'élément  $(j_n(z))$  de  $\Sigma_\infty$ .

**Remarque 5.2.1.** — Rappelons qu'à toute boule fermée ou irrationnelle  $B \subset \mathbf{C}_p$  est associée une coupure de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , correspondant à la semi-norme  $\nu_B(\cdot) = \sup_B |\cdot|$  de l'espace de Berkovich de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . Alors, à une suite  $B_\infty = (B_n)$  de boules emboîtées correspond la semi-norme  $\nu_{B_\infty} = \inf \nu_{B_n}$  de  $\mathbf{P}_{\text{Ber}}^1(\mathbf{C}_p)$  dont la nature dépend de l'intersection  $\bigcap B_n$ .

On a  $j^{-1}(B_\infty) = \bigcap B_n$ . Lorsque  $\text{diam}(B_\infty) = 0$ , le théorème des fermés emboîtés affirme que l'intersection des boules en question est un singleton de  $\mathbf{C}_p$ ; c'est l'unique antécédent de  $B_\infty$  par  $j$ . En revanche, lorsque  $\text{diam}(B_\infty) > 0$ , deux cas sont possibles : si l'intersection  $\bigcap B_n$  est vide, le point  $\nu_{B_\infty}$  est un point singulier de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  et  $B_\infty$  n'a pas d'antécédent par  $j$ ; si cette intersection n'est pas vide, c'est une boule fermée ou irrationnelle,  $\nu_{B_\infty}$  est le point correspondant de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$ , et tout point de cette boule est un antécédent de  $B_\infty$  par  $j$ .

En particulier, le lecteur prendra garde au fait que  $B_\infty$  désigne un point de  $\Sigma_\infty$ , et pas une boule.

**Définition 5.2.2.** — On dit qu'un point  $B_\infty$  de  $\Sigma_\infty$  est un point critique si  $\text{deg}(B_\infty) > 1$ .

**Remarque 5.2.3.** — 1) Soit  $z \in \mathbf{C}_p$  un point critique de  $P$  situé dans  $\mathcal{K}(P)$ ; alors  $B_\infty = j(z)$  est un point critique de  $\Sigma_\infty$ . En effet, la restriction de  $P$  à toute boule centrée en  $z$  est de degré  $\geq 2$ .

2) Inversement, soit  $B_\infty \in \Sigma_\infty$  un point critique. Si  $\text{diam}(B_\infty) = 0$ ,  $j^{-1}(B_\infty)$  est un point critique de  $P$ . En revanche, si  $\text{diam}(B_\infty) > 0$ , il est possible que  $j^{-1}(B_\infty)$  ne contienne pas de point critique, même si l'intersection de la suite  $(B_n)$  définissant  $B_\infty$  n'est pas vide.

L'application  $j : \mathcal{K}(P) \rightarrow \Sigma_\infty$  n'est en général ni injective ni surjective. Elle s'insère cependant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(P) & \xrightarrow{j} & \Sigma_\infty \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathcal{K}(P) & \xrightarrow{j} & \Sigma_\infty \end{array}$$

qui fournit un modèle symbolique (partiel, si  $j$  n'est pas un homéomorphisme) pour la dynamique de  $P$  sur  $\mathcal{K}(P)$ .

**Définition 5.2.4.** — On dit que le polynôme  $P$  est *hyperbolique de type Cantor* s'il existe  $c > 1$  et  $n \geq 1$  tels que

$$|(P^n)'(z)| \geq c$$

pour tout point  $z$  de l'ensemble  $\mathcal{K}(P)$ .

**Remarque 5.2.5.** — La terminologie provient de l'analogie avec le cas complexe : si la propriété analogue est vérifiée,  $P$  est *expansive* sur son ensemble de Julia rempli, et est donc *hyperbolique*; les points critiques sont alors attirés par l'infini et l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor (voir par exemple [3], §9.8).

Supposons que  $P$  soit hyperbolique de type Cantor. Dans ce cas, les diamètres des boules  $B_n$  tendent vers 0, si bien que  $\mathcal{K}(P)$  est compact et que  $j$  est une application bijective (voir par exemple [12], propositions 15 et 16). L'application  $j$  est donc un homéomorphisme qui conjugue la dynamique de  $P$  sur  $\mathcal{K}(P)$  à celle du décalage  $P : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$ .

**Proposition 5.2.6.** — Soit  $P \in \mathbf{C}_p[z]$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Le polynôme  $P$  est hyperbolique de type Cantor.
- (ii) Le polynôme  $P$  n'est pas simple et  $\Sigma_\infty$  ne contient pas de point critique.

Lorsqu'elles sont vérifiées, l'application  $j$  est un homéomorphisme et la dynamique de  $P$  est conjuguée par  $j$  à celle d'un décalage.

Esquisons la preuve de l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii).

*Esquisse de démonstration.* — Lorsque  $P$  est hyperbolique de type Cantor,  $P$  ne peut avoir de point critique dans  $\mathcal{K}(P)$ . Le deuxième point de la remarque 5.2.3 entraîne alors qu'il n'y a pas de point critique dans  $\Sigma_\infty$ . De plus,  $P$  n'est pas simple, car sinon  $P$  aurait des points périodiques attractifs ou indifférents, en contradiction avec l'hypothèse  $|(P^n)'(z)| \geq c > 1$  sur  $\mathcal{K}(P)$ .

Supposons inversement que  $P$  ne soit pas simple et que  $\Sigma_\infty$  ne contienne pas de point critique. L'absence de point critique assure l'existence d'un entier positif  $n$  tel



que  $P$  soit de degré 1 en restriction à chaque boule  $B$  de  $\Sigma_n$  ( $\Sigma_n$  paramètre les boules constituant  $P^{-n}(B^*(0, 1))$ ). Soit  $B$  une boule de  $\Sigma_n$ . Ses préimages par  $P$  sont des boules  $B'$  sur lesquelles  $P : B' \rightarrow B$  est de degré 1 ; ainsi,  $P : B' \rightarrow B$  dilate les distances d'un facteur  $c = \text{diam}(B)/\text{diam}(B')$  (lemme 4.2.2). Puisque  $P$  n'est pas simple, on montre que  $c > 1$ , pour tout choix du couple  $(B, B')$  dans  $\Sigma_n \times \Sigma_{n+1}$  et  $P(B') = B$ . Itérant cette remarque, on observe que les diamètres des éléments de  $\Sigma_{n+k}$  tendent exponentiellement vite vers 0. On en déduit alors que  $\mathcal{K}(P)$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  sur lequel  $j$  est une bijection, puis que  $P$  est hyperbolique (voir par exemple [12], prop. 17).  $\square$

**Exercice 5.2.7.** — (Voir [25], exemple 6.1, ainsi que [8], exemple 7, p. 253 et [20], exemple 4.1, p. 699.) Soit  $P$  le polynôme défini par  $P(z) = (z - z^p)/p$ . Le but de cet exercice est de démontrer que  $\mathcal{K}(P) = \mathbf{Z}_p$  et que le polynôme  $P$  est hyperbolique de type Cantor. Notons  $W$  le bassin d'attraction de  $\infty$ .

(1) Vérifier que les points fixes de  $P$  distincts de l'origine sont de valeur absolue égale à 1, conformément à la normalisation employée dans ce paragraphe.

(2) Montrer que  $|P'(z)| = p$  si  $|z| \leq 1$ ; en déduire que l'égalité  $\mathcal{K}(P) = \mathbf{Z}_p$  entraîne que  $P$  est hyperbolique de type Cantor.

(3) Démontrer que  $P(\mathbf{Z}_p)$  est contenu dans  $\mathbf{Z}_p$ ; en déduire que  $\mathbf{Z}_p$  est inclus dans  $\mathcal{K}(P)$ . Il s'agit donc désormais de démontrer l'inclusion  $\mathcal{K}(P) \subset \mathbf{Z}_p$ .

(4) Démontrer que le bassin  $W$  contient  $\{|z| > 1\}$ .

(5) Soit  $w \in \mathbf{C}_p$  satisfaisant  $|w - i| = 1$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Démontrer que  $|w - w^p| = 1$  puis en déduire que  $w \in W$ .

(6) Soit  $i$  un élément de  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ . Soit  $B_i$  la boule ouverte de centre  $i$  et de rayon 1. Montrer que  $P(B_i)$  coïncide avec  $B^\circ(p) = \{|z| < p\}$  et que l'application induite  $P : B_i \rightarrow B^\circ(p)$  est bijective. Dans la suite, nous noterons  $P_i^{-1} : B^\circ(p) \rightarrow B_i$  son inverse.

(7) Démontrer par récurrence sur  $k$  que

$$\mathcal{K}(P) \subset \bigcup_{i_0, \dots, i_k} P_{i_0}^{-1} \circ \dots \circ P_{i_k}^{-1}(B^\circ(p)).$$

(8) Montrer que

$$P_{i_0}^{-1} \circ \dots \circ P_{i_k}^{-1}(B^\circ(0, p)) = \left\{ z; \left| z - (i_0 + \dots + i_k p^k) \right| < p^{-k} \right\}.$$

(9) Déduire des questions précédentes que  $\mathcal{K}(P) = \mathbf{Z}_p$ .

### 5.3. Points périodiques et disques errants. —

5.3.1. *Orbites infinies* (voir [26] §5.2). — Soit  $B_\infty$  un point de  $\Sigma_\infty$  qui est périodique de période  $T$  pour l'application  $P: \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$ . Posons

$$D = \prod_{i=0}^{T-1} \deg(P^i(B_\infty)).$$

Soit  $(B_n)$  la suite de boules emboîtées correspondant à  $B_\infty$ ; par définition,  $P(B_\infty)$  est la suite de boules  $(P(B_n))$  et on a vu que les applications  $P: B_n \rightarrow P(B_n)$  sont surjectives. On a donc  $P^T(B_n) = B_{n-T}$  pour tout  $n \geq T$ .

Soit  $B$  l'ensemble  $j^{-1}(B_\infty)$ . On a expliqué dans la remarque 5.2.1 qu'il s'agit d'un point, d'une boule ou de l'ensemble vide suivant que le point correspondant de  $\hat{\mathbf{P}}^1(\mathbf{C}_p)$  est un point classique de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ , une coupure, ou un point singulier. En tant que point de l'espace de Berkovich, ce point est périodique.

S'il s'agit d'un point classique, ce point est répulsif par construction, et l'on a donc  $D = 1$ . De même, les points périodiques de  $R$  dans  $\mathbf{H}_p$  qui sont singuliers ou irrationnels ont un degré local égal à 1 (voir le paragraphe 3.2). Ainsi, lorsque  $D > 1$ ,  $B$  est une boule fermée et celle-ci détermine une coupure rationnelle. Cette boule est stable par  $P^T$  et  $D$  est le degré de l'application  $P^T: B \rightarrow P^T(B)$ . Si  $r$  est le diamètre de  $B$ , celui de  $P^T(B)$  est de la forme  $|a| r^D$ , où  $a \in \mathbf{C}_p^*$ ; on a donc bien  $r \in p^{\mathbf{Q}}$ .

5.3.2. *Orbites infinies*. — Soit maintenant  $B_\infty$  un point de  $\Sigma_\infty$  qui n'est pas prépériodique. En supposant que son diamètre est strictement positif, deux cas sont possibles : ou bien  $j^{-1}(B_\infty)$  est vide, ou bien  $j^{-1}(B_\infty)$  est un disque errant. Si cette dernière situation se produit, elle fournit alors un « contre-exemple » à l'analogie du théorème de Sullivan.

**Lemme 5.3.3.** — *Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  qui n'est pas simple. Soit  $B_\infty$  un élément de  $\Sigma_\infty$  qui n'est pas prépériodique. Si  $j^{-1}(B_\infty)$  n'est pas vide, la limite inférieure de la suite  $\text{diam}(P^n(j^{-1}(B_\infty)))$  est égale à 0. Si, de plus, les coefficients de  $P$  appartiennent à  $\overline{\mathbf{Q}_p}$ , cette suite tend vers 0.*

*Esquisse de démonstration* (voir [25], lemme 4.29 pour plus de détails)

Le cas d'un singleton étant évident, on suppose que  $j^{-1}(B_\infty)$  est une boule fermée ou irrationnelle. Posons  $B_n = P^n(j^{-1}(B_\infty))$ ,  $d_n = \text{diam}(B_n)$ , et observons que les boules  $B_n$  sont deux à deux disjointes, car  $B_\infty$  n'est pas prépériodique.

Commençons par traiter le cas particulier où les coefficients de  $P$  appartiennent à  $\overline{\mathbf{Q}_p}$ . Soit donc  $K$  une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$  qui contient les coefficients de  $P$  et au moins un point de  $j^{-1}(B_\infty)$ . Pour tout  $n$ ,  $B_n \cap K$  est une boule de  $K$  dont le diamètre est au moins celui de  $B_n$  divisé par  $p$ . Si la suite  $(d_n)$  ne tendait pas vers 0, on pourrait alors extraire de la suite  $(B_n \cap K)$  une suite infinie de boules disjointes et de rayons minorés dans  $K$ , en contradiction avec le caractère localement compact du corps  $K$ . Nous avons ainsi démontré que  $d_n$  tend vers 0.

Dans le cas général, on raisonne encore par l'absurde en supposant qu'il existe  $c > 0$  tel que  $d_n > c$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Soit  $Q$  un polynôme à coefficients dans  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  satisfaisant

$$\sup_z \delta(P(z), Q(z)) \leq c/2,$$

où  $\delta$  désigne la distance sphérique. Soit  $D$  une boule dont l'image par  $P$  a un diamètre supérieur à  $c$ ; on montre alors que les deux boules  $Q(D)$  et  $P(D)$  s'intersectent et ont le même diamètre, donc que  $P(D) = Q(D)$  (voir l'exercice 2.3.6). En particulier,  $B_n = P^n(j^{-1}(B_\infty)) = Q^n(j^{-1}(B_\infty))$  pour tout  $n$ . Le raisonnement utilisé dans le cas où les coefficients de  $P$  sont algébriques sur  $\mathbf{Q}_p$  fournit alors la contradiction recherchée.  $\square$

**5.4. Un exemple de Rivera-Letelier.** — L'exemple que nous traitons ici est tiré de [25]; il s'agit d'un polynôme pour lequel l'image de l'application  $j$  est l'ensemble dénombrable des points prépériodiques de  $\Sigma_\infty$ . Comme  $\Sigma_\infty$  a la puissance du continu, on voit que l'application  $j$  est loin d'être surjective.

Soit  $P$  le polynôme défini par

$$P(z) = \frac{1}{p} (z^p - z^{p^2}).$$

Comme 0 est fixe par  $P$  et  $P(1) = 0$ , les points 0 et 1 appartiennent à  $\mathcal{K}(P)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |P(z)| &= p|z|^{p^2} && \text{si } |z| > 1; \\ |P(z)| &= p|z|^p && \text{si } |z| < 1. \end{aligned}$$

On en déduit que tout point  $z$  tel que  $|z| > 1$  appartient au bassin d'attraction  $W_\infty$  de l'infini, et que tout point  $z$  tel que  $|z| < p^{-1/(p-1)}$  appartient au bassin d'attraction  $W_0$  de 0. En particulier,  $\mathcal{K}(P)$  est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. Le point  $z = 0$  est un point critique de  $P$ ; les autres points critiques  $z$  satisfont  $1 = pz^{p+1}$ ; ils ont donc une valeur absolue  $> 1$  et appartiennent à  $W_\infty$ .

**Lemme 5.4.1.** — Soit  $B$  une boule contenue dans  $B^\bullet(0, 1)$  dont le diamètre vérifie

$$\text{diam}(B) > p^{-1/(p-1)}.$$

L'ensemble  $P^{-1}(B)$  est une réunion finie de  $p$  boules deux à deux disjointes  $(B_i)_{0 \leq i \leq p-1}$  telles que

- (1) le diamètre de chaque  $B_i$  est égal à  $(\text{diam}(B)/p)^{1/p}$ ;
- (2) pour tout  $1 \leq i \leq p$ , la boule  $B_i$  est contenue dans  $B^\bullet(i, p^{-1/p})$ .

*Démonstration.* — Soit  $w \in \mathbf{C}_p$  tel que  $|w| \leq 1$ . En développant

$$P(z+w) - P(w) = P(z) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{k} w^{p-k} z^k - \sum_{k=1}^{p^2-1} \frac{1}{p} \binom{p^2}{k} w^{p^2-k} z^k,$$

on constate que l'on a

$$|P(z+w) - P(w)| = |P(z)| = p|z|^p \quad \text{si } p^{-1/(p-1)} < |z| < 1.$$

Appliquons la proposition 2.3.3 à l'ensemble  $P^{-1}(B^\bullet(0,1))$  : c'est la réunion d'une famille finie  $(D_i)$  de boules disjointes telles que l'application induite  $P: D_i \rightarrow B^\bullet(0,1)$  soit surjective. Ces boules sont contenues dans  $B^\bullet(0,1)$ , et d'après le calcul qui vient d'être présenté, ces boules sont de diamètre  $p^{-1/p}$ . Les solutions non nulles de l'équation  $z^{p^2} - z^p = 0$  sont les racines  $(p^2 - p)$ -ièmes de l'unité et pour chacune d'entre elles, il existe un unique entier  $i$  de  $\{1, \dots, p-1\}$  tel que  $|z-i| = p^{-1/p}$ . Il en résulte que  $P^{-1}(B^\bullet(0,1))$  est la réunion disjointe des boules  $B^\bullet(i, p^{-1/p})$ , pour  $0 \leq i < p$ , et  $P: B^\bullet(i, p^{-1/p}) \rightarrow B^\bullet(0,1)$  est surjective. Quitte à permuter les  $D_i$ , nous pouvons donc supposer que  $D_i = B^\bullet(i, p^{-1/p})$  pour tout  $0 \leq i \leq p-1$ .

Soit maintenant  $B$  une boule vérifiant les hypothèses du lemme. D'après la proposition 2.3.3, l'ensemble  $P^{-1}(B)$  est la réunion disjointe d'un nombre fini de boules  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq s$ , telles que  $P(B_j) = B$ . Puisque chaque application  $P: D_i \rightarrow B^\bullet(0,1)$  est surjective, le nombre  $s$  de boules  $B_j$  est au moins égal à  $p$ .

Soit  $c$  un centre de  $B$  pour lequel  $|c| > p^{-1/(p-1)}$ . Soit  $w_j$  un antécédent de  $c$  situé dans  $B_j$ . Le calcul précédent et la preuve de la proposition 2.3.3 montrent que  $B_j$  coïncide avec la boule de centre  $w_j$  et de rayon  $(\text{diam}(B)/p)^{1/p}$ .

Observons aussi que  $P(\xi z) = P(z)$  pour toute racine  $p$ -ième de l'unité  $\xi$ . Comme  $|\xi-1| = p^{-1/(p-1)} < p^{-1/p}$ , chacune des boules  $B_j$  est stable par multiplication par  $\xi$  (autrement dit,  $\xi B_j = B_j$  pour tout  $j$ ) et la restriction à  $B_j$  du polynôme  $P$  est donc au moins de degré  $p$ . Par suite,  $s \leq p$ .

On a ainsi  $s = p$  et l'on peut indexer les boules  $B_i$  de sorte que  $B_i \subset D_i = B^\bullet(i, p^{-1/p})$ . □

Comme on l'a vu dans la démonstration,  $P: B_i \rightarrow B$  est de degré  $p$  et  $\xi B_i = B_i$  pour toute racine  $p$ -ième de l'unité  $\xi$ . Notons en outre que

$$(\text{diam}(B)/p)^{1/p} > (p^{-p/(p-1)})^{1/p} = p^{-1/(p-1)}.$$

Partant de la boule  $B^\bullet(0,1)$ , on peut donc appliquer ce lemme par récurrence aux boules de  $P^{-n}(B^\bullet(0,1))$ . On en déduit que pour tout entier  $n \geq 0$ , l'ensemble  $P^{-n}(B^\bullet(0,1))$  est la réunion de boules deux à deux disjointes  $B_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}$ , indexées par l'ensemble des suites  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  d'entiers  $a_i$  tels que  $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Ces boules ont toutes le même diamètre, à savoir

$$p^{-(1/p+1/p^2+\dots+1/p^n)} = p^{-(1-p^{-n})/(p-1)}.$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , ce diamètre tend donc vers  $p^{-1/(p-1)}$ .

L'ensemble  $\Sigma_\infty$  s'identifie alors à l'ensemble  $\{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$  des suites infinies  $a_\infty = (a_0, a_1, \dots)$  où chaque  $a_n$  appartient à  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ ; à une telle suite  $a_\infty$  correspond

une suite  $B_\infty = (B_n)$  de boules emboîtées telle que  $P^{n-1}(B_n) = B^\bullet(a_n, p^{-1/p})$ . L'intersection  $j^{-1}(B_\infty)$  de ces boules est soit vide, soit une boule de rayon  $p^{-1/(p-1)}$ . Nous noterons  $B_\infty \mapsto a(B_\infty)$  cette bijection entre  $\Sigma_\infty$  et  $\{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ .

Considérons d'abord une suite  $B_\infty \in \Sigma_\infty$ , dont le codage associé  $a(B_\infty)$  est périodique de période  $T$ . On a vu dans ce cas que  $j^{-1}(B_\infty)$  est une boule. En outre, utilisant le fait que  $P^T$  applique  $B_{n+T}$  sur  $B_n$  mais que le diamètre de  $B_{n+T}$  est strictement inférieur à celui de  $B_n$ , on démontre (voir l'exercice 2.3.6 ou [25], lemme 4.13) que l'équation  $P^T(z) = z$  a une solution dans  $B_{n+T}$ . Autrement dit, chacune des boules  $B_n$  contient un point de période  $T$  et il en est de même de leur intersection  $j^{-1}(B_\infty)$ . La boule  $j^{-1}(B_\infty)$  contient donc un point périodique de période  $T$ .

Plus généralement, si  $B_\infty$  est prépériodique,  $j^{-1}(B_\infty)$  est encore une boule fermée qui contient un point prépériodique.

Soit enfin  $B_\infty$  une suite qui n'est pas prépériodique. Comme le diamètre des disques  $B_n$  est minoré par  $p^{-1/(p-1)}$ , il résulte du lemme 5.3.3 que  $j^{-1}(B_\infty)$  est vide.

Nous avons ainsi démontré que *l'image de  $\mathcal{K}(P)$  par  $j$  est égale à l'ensemble des points prépériodiques de  $\Sigma_\infty$* . Comme l'ensemble  $\Sigma_\infty$  a la puissance du continu et que l'ensemble des points prépériodiques est dénombrable, la majeure partie des éléments de  $\Sigma_\infty$  n'a pas d'antécédent par  $j$  dans  $\mathcal{K}(P)$ .

**Remarque 5.4.2.** — Comme promis, cela construit un ensemble non dénombrable de points singuliers dans  $\mathbf{H}_p$ .

**5.5. L'exemple de Benedetto.** — Nous terminons ce texte en esquissant la construction, due à R. Benedetto, d'un polynôme  $P \in \mathbf{C}_p[z]$  possédant des disques errants (voir [9, 10]).

**Théorème 5.5.1 (Benedetto).** — Pour  $\lambda \in \mathbf{C}_p$ , soit  $P_\lambda$  le polynôme de  $\mathbf{C}_p[z]$  donné par

$$P_\lambda(z) = \lambda z^p + (1 - \lambda)z^{p+1}.$$

Il existe un élément  $\lambda$  de  $\mathbf{C}_p$  vérifiant  $|\lambda| > 1$  et tel que  $P_\lambda$  a un disque errant qui ne soit pas attiré par un cycle attractif.

*Esquisse de démonstration.* — La démonstration consiste à produire un paramètre  $\lambda$  et un élément  $z$  de  $\mathcal{K}(P_\lambda)$  dont la dynamique symbolique ne soit pas prépériodique. Un tel élément appartiendra à un disque errant.

Supposons  $|\lambda| > 1$  et posons  $\rho = |\lambda|^{-1/(p-1)}$ .

Lorsque  $|z| > 1$ ,  $|P_\lambda(z)| > |\lambda||z|^p$ , si bien que le complémentaire de  $B^\bullet(0, 1)$  est contenu dans le bassin d'attraction de l'infini pour  $P_\lambda$ .

*Dynamique sur la boule de rayon 1.* — Analysons maintenant le comportement de  $P_\lambda$  sur  $B^\bullet(0, 1)$ . L'origine 0 est un point fixe super-attractif. De plus, si  $|z| < 1$ , on a  $|P_\lambda(z)| =$

$|\lambda||z|^p$ . On en déduit que le bassin d'attraction de 0 contient la boule  $B^\circ(0, |\lambda|^{-1/(p-1)}) = B^\circ(0, \rho)$ .

En revanche, lorsque  $\rho < |z| < 1$  on a  $|P_\lambda(z)| > |z|$ , de sorte que les orbites de  $P_\lambda$  sur cette couronne s'éloignent de l'origine.

Au voisinage de 1, la situation est plus simple. En effet,  $P_\lambda(1) = 1$  et

$$P'_\lambda(1) = p\lambda - (p+1)(1-\lambda)$$

est de module  $|\lambda|$ ; autrement dit, 1 est un point fixe répulsif. Plus généralement,  $P'_\lambda$  est de module constant  $|\lambda|$  sur le disque  $B^\circ(1, 1)$ .

**Exercice 5.5.2.** — 1) Montrer que  $|P'(z)| < 1$  pour tout point  $z$  satisfaisant  $|z| = \rho$ .

2) Montrer que  $|P'(z)| = |\lambda|$  pour tout point  $z$  satisfaisant  $|z| = 1$ . En particulier, la valeur absolue de  $P'$  est égale à  $|\lambda|$  sur la boule  $B^\circ(1, 1)$ .

*Dynamique symbolique.* — L'image réciproque de la boule  $B^\bullet(0, 1)$  par  $P_\lambda$  est la réunion disjointes de deux boules

- $B_0 = B^\bullet(0, \lambda^{-1/p})$  sur laquelle  $P_\lambda$  est de degré  $p$ ,
- $B_1 = B^\bullet(1, 1/|\lambda|)$  sur laquelle  $P_\lambda$  est de degré 1;

chacune de ces boules est appliquée surjectivement sur  $B^\bullet(0, 1)$  par  $P_\lambda$ .

Par récurrence,  $P_\lambda^{-n}(B^\bullet(0, 1))$  est réunion d'un ensemble fini de boules disjointes dont l'une, notée  $B_0^{(n)}$  est centrée en 0 et une autre, notée  $B_1^{(n)}$  est centrée en 1. En outre,  $\text{diam}(B_1^{(n)}) = |\lambda|^{-n}$  et

$$r_n := \text{diam}(B_0^{(n)}) = |\lambda|^{-(p^n-1)/p^n(p-1)}.$$

La suite  $r_n$  décroît et tend vers  $|\lambda|^{-1/(p-1)} = \rho$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Stratégie.* — La stratégie de la construction consiste à construire un élément  $B_\infty$  de  $\Sigma_\infty$  qui n'est pas prépériodique et pour lequel  $j^{-1}(B_\infty)$  est une boule (de rayon strictement positif).

Pour cela il s'agit de construire un point  $z$ , et un paramètre  $\lambda$ , tels que l'orbite de  $z$  s'approche de  $B^\circ(0, \rho)$  pendant un temps  $n_1$ , puis en ressort nécessairement pour arriver dans le disque autour de 1 au temps  $n_2$ , y retourne au temps  $n_3$ , ..., et ainsi de suite.

Le point  $B_\infty$  de  $\Sigma_\infty$  correspond alors à la suite de boules  $(B_{a_n}^{(n)})$ , où  $a_n = 0$  jusque  $n_1$ , puis  $a_n = 1$  jusque  $n_2$ , puis  $a_n = 0$  jusque  $n_3$ , etc. Pour que  $j^{-1}(B_\infty)$  soit effectivement un disque errant, on doit empêcher la suite  $(P_\lambda^n(B_\infty))$  d'être prépériodique et s'assurer que  $\text{diam}(B_\infty)$  est strictement positif. L'ensemble  $j^{-1}(B_\infty)$  ne sera pas vide car il contient le point  $z$ ; ce sera donc bien une boule de rayon strictement positif.

Nous passons sous silence la condition effectivement imposée sur la suite  $(n_k)$ ; disons juste que la suite  $(n_{2k} - n_{2k-1})$  tend vers l'infini, mais pas trop vite, de sorte que le

point  $z$  passe des temps de plus en plus grands près de 1 pour empêcher la pré périodicité, mais pas trop pour que le diamètre de  $B_\infty$  soit strictement positif.

*Construction.* — Revenons maintenant à la construction de Benedetto. On commence par choisir  $z$  de sorte que  $P_\lambda^{n_0}(z) = 1$  mais  $P_\lambda^{n_0-1}(z) \neq 1$ . Ce point  $z$  sera désormais fixé ; c'est le paramètre  $\lambda$  qu'on va modifier.

De même qu'on a facilement pu analyser le comportement de  $P_\lambda$  dans la couronne centrée en 0 et dans le disque  $B^\circ(1, 1)$ , il est relativement simple, quoique technique, d'évaluer l'effet d'une perturbation de  $\lambda$ . Posant  $\lambda_0 = \lambda$ , cela permet de modifier  $\lambda_0$  en  $\lambda_1$  de sorte que  $|\lambda_1 - \lambda_0|$  soit petit, et que l'orbite de  $z$  par  $P_{\lambda_1}$  soit convenable jusqu'à l'instant  $n_1$ , avec  $P_{\lambda_1}^{n_1}(z) = 0$ . On perturbe de même  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  pour que l'orbite de  $z$  par  $P_{\lambda_2}$  soit convenable jusqu'à l'instant  $n_2$ , avec  $P_{\lambda_2}^{n_2}(z) = 0$ , et ainsi de suite. En choisissant judicieusement les  $n_i$ , Benedetto montre que la suite  $(\lambda_n)$  est de Cauchy et que sa limite  $\lambda_\infty$  est un paramètre qui convient. Nous renvoyons à l'article [10] pour les détails.  $\square$

La preuve précédente ne fournit pas d'exemple avec  $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_p$  car, comme l'indique Benedetto dans [10],  $\lambda_\infty$  ne peut appartenir à aucun sous-corps de  $\mathbf{C}_p$  dont la valuation soit discrète. En outre, les points critiques de  $P_\lambda$  sont 0,  $\infty$  et  $c = p\lambda/(p+1)(\lambda-1)$  ; les deux premiers sont superattractifs donc appartiennent à l'ensemble de Fatou et le troisième appartient souvent au bassin d'attraction de 0 (si  $|\lambda| < p^{p-1}$ ) ou de  $\infty$  (si  $|\lambda| > p^p$ ). Dans ces deux cas, il résulte des résultats de [6] qu'il n'y a pas de domaine errant si  $\lambda$  est algébrique.

À l'heure actuelle, on ne sait pas si une fraction rationnelle à coefficients algébriques peut avoir un disque errant qui ne soit pas attiré par un point périodique attractif. Le lecteur pourra consulter les textes de Benedetto sur le sujet, notamment [6], où le résultat suivant est démontré.

**Théorème 5.5.3 (Benedetto).** — *Soit  $P$  un élément de  $\overline{\mathbf{Q}}_p[z]$  de degré supérieur ou égal à 2. Soit  $B_\infty$  un élément de  $\Sigma_\infty$  pour lequel  $j^{-1}(B_\infty)$  n'est pas vide. Il existe alors une sous-suite  $(P^{n_k}(B_\infty))$  qui converge vers un point critique  $z$  de  $P$  satisfaisant :*

- (1)  $z$  est récurrent ( $z$  est adhérent à son orbite positive  $\{P^n(z), n > 0\}$ ) ;
- (2) l'indice de ramification de  $P$  en  $z$  est divisible par  $p$ .

## Références

- [1] Y. AMICE – *Les nombres  $p$ -adiques*, Collection SUP : Le Mathématicien, vol. 14, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
- [2] M. BAKER – « An introduction to Berkovich analytic spaces and non-Archimedean potential theory on curves », in  *$p$ -adic geometry*, Univ. Lecture Ser., vol. 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p. 123–174.

- [3] A. F. BEARDON – *Iteration of rational functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 132, Springer-Verlag, New York, 1991, Complex analytic dynamical systems.
- [4] R. BENEDETTO, J.-Y. BRIEND & H. PERDRY – « Dynamique des polynômes quadratiques sur les corps locaux », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **19** (2007), no. 2, p. 325–336.
- [5] R. L. BENEDETTO – « Fatou components in  $p$ -adic dynamics », *PhD Thesis*. (1998), p. 1–98.
- [6] ———, «  $p$ -adic dynamics and Sullivan’s no wandering domains theorem », *Compositio Math.* **122** (2000), no. 3, p. 281–298.
- [7] ———, « Hyperbolic maps in  $p$ -adic dynamics », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), no. 1, p. 1–11.
- [8] ———, « Components and periodic points in non-Archimedean dynamics », *Proc. London Math. Soc. (3)* **84** (2002), no. 1, p. 231–256.
- [9] ———, « Examples of wandering domains in  $p$ -adic polynomial dynamics », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), no. 7, p. 615–620.
- [10] ———, « Wandering domains in non-Archimedean polynomial dynamics », *Bull. London Math. Soc.* **38** (2006), no. 6, p. 937–950.
- [11] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [12] J.-P. BÉZIVIN – « Sur la compacité des ensembles de Julia des polynômes  $p$ -adiques », *Math. Z.* **246** (2004), no. 1-2, p. 273–289.
- [13] S. CANTAT – « Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux : existence, exemples, rigidité », *Ce volume* (2006).
- [14] A. DOUADY & J. H. HUBBARD – « On the dynamics of polynomial-like mappings », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **18** (1985), no. 2, p. 287–343.
- [15] A. DUCROS – « Espaces analytiques  $p$ -adiques au sens de Berkovich », *Astérisque* (2007), no. 311, p. Exp. No. 958, viii, 137–176, Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006.
- [16] B. DWORK, G. GEROTTO & F. J. SULLIVAN – *An introduction to  $G$ -functions*, Annals of Math. Studies, no. 133, Princeton Univ. Press, 1994.
- [17] C. FAVRE & J. RIVERA-LETÉLIER – « Théorie ergodique des fractions rationnelles sur un corps ultramétrique », *Manuscript* (2007), p. 1–39.
- [18] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.
- [19] M. HERMAN & J.-C. YOCOZ – « Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields », in *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, p. 408–447.
- [20] L.-C. HSIA – « Closure of periodic points over a non-Archimedean field », *J. London Math. Soc. (2)* **62** (2000), no. 3, p. 685–700.
- [21] J. LUBIN – « Non-Archimedean dynamical systems », *Compositio Math.* **94** (1994), no. 3, p. 321–346.
- [22] C. T. McMULLEN – « Frontiers in complex dynamics », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **31** (1994), no. 2, p. 155–172.



- [23] J. MILNOR – *Dynamics in one complex variable*, third éd., Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [24] P. MORTON & J. H. SILVERMAN – « Periodic points, multiplicities, and dynamical units », *J. Reine Angew. Math.* **461** (1995), p. 81–122.
- [25] J. RIVERA-LETELIER – « Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux », *Astérisque* (2003), no. 287, p. xv, 147–230, Geometric methods in dynamics. II.
- [26] ———, « Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles », *Compositio Math.* **138** (2003), no. 2, p. 199–231.
- [27] ———, « Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique  $p$ -adique », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 3, p. 593–629.
- [28] J. H. SILVERMAN – *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007.
- [29] J.-C. YOCCOZ – « Dynamique des polynômes quadratiques », in *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panor. Synthèses, vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 1999, Notes prepared by Marguerite Flexor, p. x, xii, 187–222.