CROISSANCE DES VARIÉTÉS INSTABLES

SERGE CANTAT

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, Bât. 22-23, 35042 Rennes cedex, France. cantat@maths.univ-rennes1.fr

Résumé. Nous étudions la croissance des variétés instables des automorphismes (i.e. des difféomorphismes holomorphes) des surfaces complexes. Ces variétés sont paramétrées holomorphiquement par la droite complexe $\mathbb{C}$ et la croissance est à prendre au sens de Nevanlinna. La formule obtenue exprime le taux de croissance en fonction des exposants de Lyapunov et de l'entropie topologique. La technique employée est également valable pour les difféomorphismes Anosov de $\mathbb{T}^2$.

1. Introduction

Cet article concerne la croissance asymptotique des variétés stables et instables associées aux difféomorphismes Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ et aux difféomorphismes holomorphes des surfaces complexes. La majeure partie de ce texte traîte du second cas : il s'agit donc principalement de dynamique holomorphe à plusieurs variables.

1.1. Commençons toutefois par le cas plus simple des difféomorphismes Anosov. Si $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ est un difféomorphisme Anosov, on sait depuis les travaux de Ghys et Sullivan que les feuilles stables et instables de ϕ supportent une unique structure affine préservée par la dynamique. Chaque variété instable $W^u(x)$ est donc paramétrée par une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ transportant bijectivement la structure affine standard de $\mathbb{R}$ sur celle de $W^u(x)$. Par définition, l'ordre de croissance de $W^u(x)$ est la limite supérieure de la fonction

$$s \mapsto \frac{\log\left(\mathrm{Longueur}(f([-s,s]))\right)}{\log(s)}$$

lorsque s tend vers $+\infty$. Cet ordre de croissance ne dépend ni du paramétrage affine f choisi pour le définir, ni de la métrique riemannienne fixée sur $\mathbb{T}^2$. Cet ordre de croissance est donc uniquement associé à la dynamique de ϕ.

Nous montrerons dans ce texte le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difféomorphisme Anosov de classe $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ dont les feuilletages stables et instables sont orientables. Soit ν une mesure de probabilité ϕ-invariante, ergodique et d'entropie strictement positive. Alors, pour ν presque tout point x, l'ordre de croissance de la feuille* *instable au point x est égal au quotient de l'entropie topologique de ϕ par l'exposant de Lyapunov positif en ce point.*

1.2. Une formule analogue apparaît en dynamique holomorphe à une variable. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale pour laquelle l'origine est un point fixe répulsif. Si α désigne la dérivée de P à l'origine, le module de α est donc strictement supérieur à 1 et le théorème de Königs permet de linéariser P localement, c'est-à-dire de trouver un germe de difféomorphisme holomorphe f satisfaisant $P \circ f(z) = f(\alpha z)$. Grace à cette équation fonctionnelle, f s'étend en une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$\log(|f(z)|) \leq C_0 + C_1 |z|^\rho, \tag{1}$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes positives et

$$\rho = \frac{\log(\deg(P))}{\log |\alpha|}. \tag{2}$$

En corollaire, on montre sans peine que "*l'ordre de croissance de la linéarisante est égal au quotient de l'entropie topologique,* $\log(deg(P))$, *par l'exposant de Lyapunov,* $\log|\alpha|$".

1.3. Le théorème principal que nous avons en vue est une généralisation directe des deux résultats précédents pour les variétés instables des automorphismes des surfaces complexes. Nous traîterons essentiellement les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ et des surfaces K3. Rappelons à ce propos qu'une surface K3 est une surface complexe compacte simplement connexe qui supporte une 2-forme holomorphe partout non nulle. Les automorphismes des surfaces compactes dont l'entropie est strictement positive sont quasiment tous définis sur des tores ou des surfaces K3 [5]. En outre, les rares exemples actuellement connus qui ne le soient pas sont tous conjugués par un revêtement double à un automorphisme d'une surface K3. L'étude des automorphismes des surfaces K3 se révèle donc suffisante pour comprendre la dynamique de tous les automorphismes des surfaces complexes compactes (voir [4] pour plus de détails).

Les variétés stables et instables unidimensionnelles d'un difféomorphisme holomorphe sont presque toutes paramétrées par la droite $\mathbb{C}$. Elles sont donc canoniquement munies d'une structure affine, ce qui permet de définir sans ambiguité leur ordre de croissance.

Théorème 1.2. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie topologique est strictement positive. L'ordre de croissance de presque toute variété instable $W^u(x)$ est alors égal au quotient de l'entropie topologique de ϕ par l'exposant de Lyapunov positif au point x.*

Il faut bien sûr préciser ce qu'on entend par "*ordre de croissance*", "*presque toute variété instable*" et "*l'exposant de Lyapunov*". C'est ce que nous ferons dès le premier paragraphe. Après cela, nous prouverons ce théorème dans un cadre légèrement différent, celui des points périodiques ϕ-hyperboliques.

Nous retrouverons ainsi un résultat antérieur de Teisuke Jin [10]. Cette première étape permettra d'illustrer l'usage de la théorie du potentiel dans notre situation et de présenter l'idée principale de la preuve du théorème 1.2. Le paragraphe 4 sera entièrement consacré à la démonstration de ce théorème. Enfin, nous étendrons la méthode au cas des applications de type Hénon, vues comme transformations birationnelles du plan projectif, ce qui permettra de construire de jolis exemples de courbes entières injectives dans $\mathbb{P}^2$.

La théorie du pluripotentiel joue un rôle important dans les démonstrations que nous proposons ; les variétés instables des difféomorphismes holomorphes permettent en effet de construire des courants positifs fermés dilatés par le difféomorphisme. Nous serons donc conduits à effectuer de nombreux rappels dans les premiers paragraphes. Le lecteur savant peut ainsi sauter la seconde section et s'y reporter ultérieurement si le besoin s'en fait sentir.

1.4. Nous avons choisi de présenter d'entrée de jeu le cas des difféomorphismes holomorphes. Le cas plus simple des difféomorphismes Anosov est donc relégué au dernier paragraphe. Dans ce contexte, le rôle joué par les courants positifs fermés doit être remplacé par la notion de cycle feuilleté le long des feuilletages stables et instables [18]. La méthode est ensuite la même, ce que nous expliquerons. Suivant la culture ou l'intérêt du lecteur, il peut être fructueux de lire d'abord le dernier paragraphe de ce texte, puis de remplacer toutes les notions "holomorphes" des premiers paragraphes par leurs analogues "feuilletés".

1.5. **Remerciements.** Un grand merci à Étienne Ghys pour avoir encadré ma thèse et motivé mes recherches sur ce sujet. Merci à Jean-Christophe Yoccoz pour son enthousiasme et ses conseils avisés. Merci à Dominique Cerveau pour sa disponibilité chaleureuse.

2. Courbes entières, ordre de croissance et variétés instables

2.1. **Ordre de croissance des courbes entières.** Si $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante, l'ordre de croissance $\rho(s)$ de s est défini par la formule

$$\rho(s) = \limsup_{r \to +\infty} \left(\frac{\log(s(r))}{\log(r)} \right). \tag{3}$$

Ce nombre correspond donc au taux de croissance polynomial de s. Il est égal à l'infimum des réels α pour lesquels l'intégrale de $s(r)/r^{\alpha+1}$ entre 1 et $+\infty$ converge. Lorsque s est identiquement nulle, on pose donc $\rho(s) = -\infty$.

Par définition, une courbe entière tracée sur une variété complexe X est une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$. Si X est munie d'une métrique hermitienne h et si f est une courbe entière à valeurs dans X, nous noterons $A_h(r, f)$ l'aire de $f(\mathbb{D}_r)$ pour la métrique h ; ici, et dans toute la suite, $\mathbb{D}_r$

désigne le disque de rayon r centré à l'origine dans $\mathbb{C}$, si bien que

$$A_h(r,f) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \| f'(re^{i\theta}) \|_h^2 \; r dr d\theta. \tag{4}$$

L'ordre de croissance de la fonction $A_h(r,f)$ est noté $\rho_h(f)$ et s'appelle "*l'ordre de* f". Lorsque X est compacte, $\rho_h(f)$ ne dépend pas du choix de h et est noté $\rho(f)$, sans référence à la métrique employée pour le calculer.

Remarque 2.1. Si $\psi : z \mapsto az + b$ est un automorphisme quelconque de la droite $\mathbb{C}$, l'ordre de f est égal à celui de $f \circ \psi$. En particulier, deux courbes entières injectives qui ont la même image ont le même ordre de croissance.

Exemple 2.1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière et $\mathrm{M}(r,f)$ le supremum de $|f(z)|$ sur le disque de rayon r. L'ordre de croissance de f, vue comme courbe entière tracée sur $\mathbb{P}^1$, est alors égal à celui de $\log(\mathrm{M}(r,f))$ (voir [19], p. 204). En particulier, dans l'exemple présenté au paragraphe 1.2, la fonction entière linéarisant le polynôme P est bien d'ordre $\rho = \log(\deg(P))/\log|\alpha|$.

2.2. **Variétés instables et courbes entières.** Soit $\phi : S \to S$ un automorphisme d'une surface complexe et K un compact ϕ-invariant sur lequel ϕ a une entropie topologique strictement positive. Soit ν une mesure de probabilité sur K qui est ϕ-invariante, ergodique et d'entropie non nulle. D'après l'inégalité de Ruelle, le plus petit exposant de Lyapunov de ν, χ^-, est strictement négatif, et le plus grand, χ^+, est strictement positif. Puisque ϕ est holomorphe, les espaces stables et instables sont invariants par multiplication par $\sqrt{-1}$. La dimension complexe de S étant égale à 2, χ^+ et χ^- sont les seuls exposants de Lyapunov de la mesure ν et cette mesure n'a donc aucun exposant nul. En accord avec le vocabulaire introduit par Katok dans [11], nous dirons donc qu'une mesure de probabilité ν qui est ϕ-invariante, ergodique et d'entropie non nulle est une mesure ϕ-hyperbolique.

Considérons maintenant les variétés stables et instables globales de ϕ: elles sont définies pour ν-presque tout point, sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et, en chaque point, leur espace tangent est un sous-espace complexe de l'espace tangent à S. Ce sont donc des surfaces de Riemann biholomorphes au disque $\mathbb{D}$ ou à la droite $\mathbb{C}$. En fait, elles sont presque toutes biholomorphes à $\mathbb{C}$ ([20] ou [2], page 87). Nous noterons Λ_ν l'ensemble des points réguliers au sens de Pesin dont la variété instable est paramétrée par $\mathbb{C}$. L'union des Λ_ν lorsque ν décrit l'ensemble des mesures de probabilité ϕ-hyperboliques sera noté Λ_ϕ.

En résumé, par tout point x de Λ_ϕ passe une courbe entière injective $f_x : \mathbb{C} \to S$ qui paramètre la variété instable de x. Ce paramétrage n'est pas unique, mais deux d'entre-eux diffèrent au plus d'une composition à la source par un automorphisme de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire par une transformation affine.

Supposons que X est une compactification lisse de S fixée une fois pour toutes. Dans les exemples, ou bien S coïncidera avec X et sera une surface K3, ou bien S sera le plan affine $\mathbb{C}^2$ et X le plan projectif $\mathbb{P}^2$. D'après la remarque 2.1, l'ordre de croissance de f_x, vue comme courbe entière tracée sur X, ne dépend que de la variété instable au point x : il ne dépend pas du choix du paramétrage f_x. Nous le noterons $\rho(x)$, sans référence à la compactification X.

Avec le vocabulaire que nous venons d'introduire, le théorème 1.2 peut-être précisé de la manière suivante :

Théorème 2.1. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective avec une mesure de probabilité ν qui est ϕ-invariante, ergodique et d'entropie non nulle. Alors, pour ν-presque tout point x,*

$$\rho(x) = \frac{h_{top}(\phi)}{\chi^+(x)},$$

$h_{top}(\phi)$ désignant l'entropie topologique de ϕ et $\chi^+(x)$ l'exposant de Lyapunov positif au point x.

Remarque 2.2. 1- Au premier abord, ce résultat est décevant. Il affirme en effet que $\rho(x)$ n'apporte aucune information supplémentaire sur la nature de la dynamique si l'on connaît déjà $h_{top}(\phi)$ et $\chi^+(x)$. En particulier, $\rho(x)$ s'exprime à partir de quantités qui ne font pas appel au caractère holomorphe de la dynamique. Nous verrons cependant comment utiliser ce théorème "à l'envers" pour obtenir des exemples intéressants de courbes entières dont on sait calculer la croissance.

2- Pour ν presque tout point x, on peut choisir un paramétrage f_x : $\mathbb{C} \to X$ de sa feuille instable qui envoie 0 sur x. Un tel choix étant fait, les applications $f_{\phi(x)}^{-1} \circ \phi \circ f_x$ sont des automorphismes de $\mathbb{C}$ fixant l'origine, donc des homothéties ; de cette manière, l'automorphisme ϕ est globalement linéarisé le long de ses variétés instables. Le théorème 1.2 peut donc être énoncé sous la forme : "*l'ordre de croissance des linéarisantes est égal au quotient de l'entropie topologique par l'exposant de Lyapunov positif* ".

Pour clarifier l'analogie avec l'exemple donné au paragraphe 1.2, il suffit maintenant de faire deux remarques. La première, c'est que, dans cet exemple, $f(\mathbb{C})$ est bien une variété instable pour la transformation polynomiale P. La seconde est déjà contenue dans l'exemple 2.1 : l'ordre de croissance évoqué dans l'introduction coïncide bien avec celui de f, vue comme courbe entière tracée sur $\mathbb{P}^1$.

3. Théorie du potentiel et dynamique

Ce paragraphe résume quelques uns des résultats de [4] et [6] qui seront utiles pour la suite, puis démontre un cas particulier du théorème 1.2. La majeure partie de ce paragraphe concerne l'usage de la théorie du potentiel en dynamique holomorphe.

L'espace des 2-formes différentielles continues est muni de la topologie de la convergence uniforme. Une 2-forme α est dite positive si $\alpha(v, \sqrt{-1}\, v)$ est positif pour tout vecteur tangent v. Par définition, un courant est une forme linéaire continue sur l'espace des 2-formes différentielles (il s'agit donc en fait de courants de degré 2 et d'ordre 0). Un courant T est fermé s'il est nul sur les formes exactes, il est positif si $\langle T|\alpha\rangle$ l'est pour toute forme positive α. Si ϕ est un automorphisme et T est un courant, nous noterons $\phi_* T$ le courant dont la valeur en une forme α est égale à $\langle T|\phi^*\alpha\rangle$. Si C est une courbe compacte, éventuellement à bord, nous noterons $\{C\}$ le courant d'intégration sur C. C'est un courant positif qui est fermé si, et seulement si la longueur du bord de C est nulle.

3.1. **Action en homologie, courants positifs et entropie.** Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'une surface K3 et $\phi_* : \mathrm{H}_2(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}_2(X,\mathbb{R})$ l'action associée sur le second groupe d'homologie de X. D'après les travaux de Gromov et Yomdin, l'entropie topologique de ϕ est égale au logarithme du rayon spectral de ϕ_* (cf. [6]). Nous supposerons donc à partir de maintenant que ce rayon spectral, noté λ, est strictement supérieur à 1. D'après [6], les seules valeurs propres de ϕ_* de module différent de 1 sont λ et $1/\lambda$ et la multiplicité de chacune d'entre-elles est égale à 1. Cette propriété reste d'ailleurs valable au niveau des courants positifs fermés:

Théorème 3.1 ([6]). *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie topologique* $\log(\lambda)$ *est strictement positive. Il existe alors un courant positif, fermé et non nul, noté T^+, vérifiant $\phi_* T^+ = \lambda T^+$. Ce courant est unique à un facteur multiplicatif près.*

De même, on peut construire un courant positif fermé T^-, essentiellement unique, qui satisfait l'équation $\phi_* T^- = (1/\lambda) T^-$. Dans [6], nous avons montré que le produit $T^+ \wedge T^-$ définit une mesure de probabilité ϕ-invariante qui s'avère être l'unique mesure d'entropie maximale de ϕ.

3.2. **Première construction de T^+.** Soit X une variété complexe compacte munie d'une métrique hermitienne h de forme fondamentale κ. Si $f : \mathbb{C} \to X$ est une courbe entière non constante, on définit les "courants de Nevanlinna"de f par la formule

$$\langle \mathrm{N}(r,f)|\alpha\rangle = \frac{1}{T(r,f)} \int_0^r \int_{\mathbb{D}_t} f^*(\alpha)\, \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

La fonction $T(r,f)$ désigne l'indicatrice de Nevanlinna de f. Autrement dit, $T(r,f)$ est égale à la moyenne logarithmique de l'aire $A_h(t,f)$ pour t variant de 0 à r. La suite $\mathrm{N}(r,f)$ est donc une suite de courants positifs de norme 1.

Lemme 3.2 (Dinghas, cf. [19] thm.V.4). *Il existe un sous-ensemble B_f de $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Le complémentaire de B_f est une union dénombrable d'intervalles fermés disjoints et sa mesure est finie pour la mesure $dr/(2\pi r\log(r))$.*
2. *Si r_i est une suite d'éléments de B_f tendant vers l'infini, toute valeur d'adhérence de $N(r_i,f)$ est un courant positif fermé de masse 1.*

Les courants positifs fermés construits par ce lemme seront appelés "*courants d'intégration le long de f*". Si la courbe entière est feuille d'une lamination, on retrouve la méthode de Plante et la notion de cycle feuilleté introduite par Sullivan [18], [4].

Reprenons l'étude d'un automorphisme $\phi : X \to X$ d'une surface K3 dont l'entropie est différente de zéro et supposons que le courant T^+ associé à ϕ ait été choisi de telle sorte que sa norme soit égale à 1 pour la métrique h employée. D'après la partie précédente, presque toute variété instable de ϕ est paramétrée par une courbe entière : on peut donc naturellement construire des "*courants d'intégration sur les variétés instables*". Le théorème suivant montre que presque tous ces courants coïncident avec T^+ :

Théorème 3.3 ([6]). *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie est strictement positive. Si x est un élément de l'ensemble Λ_ϕ ou si x est un point périodique hyperbolique de ϕ qui n'est pas sur une courbe algébrique ϕ-invariante, alors tout courant fermé adhérent à la suite $N(r, f)$ coïncide avec le courant T^+.*

Remarque 3.1. 1.- Si C est une courbe algébrique qui contient l'image d'une courbe entière injective f, alors C est rationnelle et $f(z) = [z : 1]$ si les coordonnées homogènes de C sont convenablement choisies. On en déduit sans peine que la suite des courants de Nevanlinna $N(r, f)$ converge vers un multiple du courant d'intégration sur la courbe C.

2.- Voici un exemple explicite où une variété instable est contenue dans une courbe rationnelle. On considère une courbe elliptique $E = \mathbb{C}/\Lambda$ et la variété abélienne $A = E \times E$. La transformation linéaire $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ préserve le réseau $\Lambda \times \Lambda$ et induit donc un automorphisme Φ de A. Le point $(0, 0)$ est fixé par Φ. Si on l'éclate, Φ s'étend en un automorphisme $\tilde{\Phi}$ de la variété éclatée $\tilde{A}$. Les deux directions propres de Φ déterminent chacune un point fixe de $\tilde{\Phi}$ situé sur le diviseur exceptionnel. Ces deux points fixes sont hyperboliques et la variété stable de l'un coïncide (presque) avec la variété instable de l'autre : chacune est égale au complémentaire de l'autre point fixe dans le diviseur exceptionnel.

Pour obtenir un exemple sur une surface K3, on procède de la manière suivante. Après avoir éclaté le point $(0, 0)$, on poursuit en éclatant les 15 points d'ordre 2 du groupe A. L'automorphisme Φ s'étend à la variété obtenue. L'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ s'y étend également et commute avec Φ. On peut donc passer au quotient par cette involution et récupèrer un automorphisme ϕ sur la surface quotient X. Grace aux éclatements ainsi effectués, on vérifie sans peine que X est lisse : c'est la surface de Kummer associée à A [1].

3.- Sur une surface K3, les automorphismes à entropie non nulle n'ont qu'un nombre fini de courbes algébriques périodiques et chacune d'entre elles contient au plus deux points périodiques hyperboliques (cf. [6]). Par ailleurs, les travaux de Katok montrent que ces automorphismes admettent toujours une infinité de points périodiques hyperboliques. Le théorème 3.3 et la proposition 3.5 permettent donc en fait de traiter presque tous les points périodiques hyperboliques.

Le théorème 3.3 relie le courant T^+ aux variétés instables. Intuitivement, la variété instable au point x est dilatée par le facteur $\exp(\chi^+(x))$, tandis que T^+ est dilaté par λ. Puisque l'entropie topologique de ϕ est égale à $\log(\lambda)$, il semble que nous ayons tous les éléments nécessaires à notre disposition pour démontrer le théorème 1.2. C'est effectivement le cas, à quelques problèmes techniques près que nous réglerons au cours des paragraphes suivants. Auparavant, nous allons commencer par le cas simple où x est un point périodique hyperbolique.

3.3. **Le cas des points périodiques hyperboliques.** Commençons par un petit lemme dont la preuve, élémentaire, peut-être trouvée au chapitre V du livre de Tsuji [19].

Lemme 3.4. *Si $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante, l'ordre de croissance de s est égal à celui de la fonction*

$$t(r) = \int_1^r s(t)\frac{dt}{t}.$$

En appliquant ce résultat à la fonction d'aire $A_h(r, f)$, on en déduit que l'ordre de croissance de la fonction $T(r, f)$ est égal à $\rho(f)$ pour toute courbe entière. Nous allons tout de suite employer cette remarque pour calculer l'ordre de croissance des variétés instables des points périodiques hyperboliques de ϕ.

Proposition 3.5. *Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'une surface $K3$ projective dont l'entropie topologique est strictement positive. Soit x un point périodique hyperbolique pour ϕ. La variété instable de x est alors paramétrée par une courbe entière injective f. Si f n'est pas contenue dans une courbe algébrique ϕ-périodique, son ordre de croissance est égal à*

$$\rho(x) = \frac{h_{top}(\phi)}{\chi^+(x)},$$

où $\chi^+(x)$ est l'exposant de Lyapunov au point x.

Argument heuristique. Soit x un point périodique hyperbolique de période τ et $W^u(x)$ sa variété instable. Nous avons déjà expliqué dans la première partie de cet article que $W^u(x)$ est une surface de Riemann homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Puisque ϕ induit un biholomorphisme de $W^u(x)$ avec un point fixe répulsif, $W^u(x)$ est nécessairement biholomorphe à $\mathbb{C}$. On peut donc fixer un paramétrage $f : \mathbb{C} \to X$ de $W^u(x)$ et supposer que $f(0) = x$. L'ordre de croissance de f ne dépend que de $W^u(x)$ et pas du choix de f. Puisque $f(0) = x$, l'application $f^{-1} \circ \phi^\tau_{|W^u(x)} \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$ fixant l'origine. C'est donc une homothétie dont le rapport est égal à la valeur propre de $d\phi^\tau_x$ le long de la direction instable. Nous noterons β cette valeur propre et retiendrons que l'exposant de Lyapunov de ϕ au point x est égal à $\log(\beta)/\tau$.

Appliquons le lemme 3.2 à la courbe f et notons B_f l'ensemble des rayons "admissibles" donnés par ce lemme. Supposons qu'il existe un réel strictement positif r_0 et un entier k_0 tels que $\beta^k r_0$ appartienne à B_f pour tout k supérieur ou égal à k_0. Alors toutes les valeurs d'adhérence de la suite

$N(\beta^k r_0, f)$ sont des courants positifs fermés, donc, d'après le théorème 3.3, cette suite converge vers T^+. Appliquons maintenant l'automorphisme ϕ^τ en utilisant la continuité de ϕ_* et la définition de T^+. On obtient :

$$\lim_{k\to\infty}\left(\phi_*^\tau N(\beta^k r_0, f)\right) = \lambda^\tau T^+. \tag{6}$$

Puisque ϕ^τ est une homothétie de rapport β le long de f, la définition de $N(r, f)$ et un calcul immédiat entraînent

$$\phi_*^\tau(N(r,f)) = \frac{T(\beta r, f)}{T(r,f)} N(\beta r, f). \tag{7}$$

En reportant cette équation dans la précédente et en évaluant les deux membres sur la forme fondamentale de la métrique h, on obtient finalement

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{T(\beta^{k+1} r_0, f)}{T(\beta^k r_0, f)}\right) = \lambda^\tau. \tag{8}$$

Puisque $T(r, f)$ est une fonction croissante (et même convexe) de la variable $\log(r)$ (cf. [19], p. 238), cette dernière propriété suffit à montrer que $T(r, f)$ est d'ordre

$$\rho(f) = \frac{\log(\lambda^\tau)}{\log(\beta)} = \frac{\mathrm{h}_{top}(\phi)}{\chi^+(x)}, \tag{9}$$

ce qui est bien la formule annoncée.

L'hypothèse que nous avons faite concernant l'appartenance de $\beta^k r_0$ à B_f peut a priori ne pas être vérifiée. Dans un tel cas, l'argument que nous venons de donner n'est plus valable. Plutôt que de le réparer, nous allons maintenant donner une preuve plus simple (et complète) mais qui utilise une autre construction du courant T^+. □

3.4. **Seconde construction de T^+ et application.** Dans la preuve de la proposition 3.5, nous n'avons pas vraiment utilisé que la suite des courants de Nevanlinna converge vers T^+. En fait, seule la suite de disques $(\phi^{\tau n})_*\{f_x(\mathbb{D}_{r_0})\}$ a été réellement employée. Le résultat suivant va donc nous permettre de donner une preuve complète et simplifiée de la proposition 3.5.

Proposition 3.6 ([6]). *Soit C un courant positif sur X et Ψ une fonction positive et lisse dont le support ne rencontre pas le bord de C. La suite de courants*

$$C_n = \frac{1}{\lambda^n}\phi_*^n(\Psi C)$$

converge alors vers un multiple de T^+.

Remarque 3.2. 1.– Ce résultat s'applique bien sûr aux courants positifs fermés en prenant Ψ constante égale à 1. Si l'on change ϕ^n en ϕ^{-n}, la suite C_n converge vers un multiple de T^-. Si κ est une forme de Kähler, ces deux remarques montrent que la suite de formes différentielles $(1/\lambda^n)(\phi^n)^*\kappa$ converge, au sens des courants, vers un multiple non nul de T^-.

2.– Si les courants T^+ et T^- sont normalisés de telle sorte que chacun soit de masse 1 et que $T^+ \wedge T^-$ soit une mesure de probabilité, la suite C_n

tend vers le produit de T^+ par la masse totale de la mesure $T^- \wedge (\Psi C)$ [6]. Si x vérifie les hypothèses du théorème 3.3, si C est le courant d'intégration sur un disque de $W^u(x)$ centré en x et si $\Psi(x)$ est strictement positive, alors cette constante n'est pas nulle. Sinon on aurait $T^+ \wedge T^- = 0$ en itérant et en passant à la limite, ce qui est impossible car $T^+ \wedge T^-$ est une mesure de probabilité [6].

Afin d'appliquer ce résultat à la suite de courants $(\phi^n)_*\{f_x(\mathbb{D}_1)\}$ pour toute variété instable $f_x : \mathbb{C} \to X$, quelques notations seront utiles.

3.5. **Notations.** Soit $\psi_1 : \mathbb{D}_1 \to [0,1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, invariante par rotation, qui est égale à 1 sur le disque de rayon $1/2$ et qui s'annule en dehors du disque de rayon $3/4$. Pour tout $r > 0$, on note $\psi_r(z) = \psi_1(z/r)$. Soit $f_x : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière qui paramètre la variété instable d'un point x, qui envoie 0 sur x et dont la dérivée à l'origine est de norme 1. On note $A_h^\psi(x,r)$ la masse du courant $(f_x)_*\{\psi_r \mathbb{D}_r\}$ pour la métrique h. En d'autres termes,

$$A_h^\psi(x,r) = \int_{\mathbb{D}_r} \psi_r\, f_x^*(\kappa). \tag{10}$$

Le choix de ψ_1 montre que la fonction $r \mapsto A_h^\psi(x,r)$ a même ordre de croissance que la fonction $A_h(f,r)$. Les courants $(f_x)_*\{\psi_r \mathbb{D}_r\}$ sont tous du type $\Psi\{f_x(\mathbb{D}_r)\}$ où Ψ est une fonction positive convenable qui étend la fonction $\psi_r \circ f_x^{-1}$ à un voisinage du disque $f_x(\mathbb{D}_r)$: on pourra donc appliquer la proposition 3.6 pour $\psi C = (f_x)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\}$.

Seconde démonstration de la proposition 3.5. Soit x un point périodique hyperbolique qui n'est pas situé sur une courbe algébrique ϕ-invariante. Si τ désigne la période de x et β la valeur propre de $d\phi_x^\tau$ le long de $W^u(x)$, alors

$$f_x^{-1} \circ \phi^\tau \circ f_x(z) = \beta z,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

D'après la proposition 3.6, la suite de courants $(1/\lambda^n)(\phi^{\tau n})_*\left((f_x)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\}\right)$ converge vers un multiple de T^+. Si ce multiple est non nul, ce qui revient à dire que le courant $(f_x)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\}$ coupe T^- strictement positivement, on obtient donc :

$$\exists\, c > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda^{\tau n}} A_h^\psi(x, \beta^n) = cT^+(\kappa). \tag{12}$$

En particulier, la fonction $A_h^\psi(x,r)$ est d'ordre $\tau \log(\lambda)/\log(\beta)$, ce qu'il fallait montrer. D'après la seconde partie de la remarque 3.2, l'hypothèse faite est toujours vérifiée : T^- doit couper le disque $(f_x)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\}$ strictement positivement. □

On obtient ainsi une preuve légèrement simplifiée de la proposition 3.5. C'est cette stratégie que nous allons adopter pour démontrer le théorème 1.2.

4. Démonstration du théorème principal

4.1. Étude des disques de rayon 1. Reprenons les notations du paragraphe 2.2 dans le cadre d'un automorphisme $\phi : X \to X$ d'une surface K3. Soit h une métrique kählérienne sur X de forme fondamentale κ. Pour chaque point x de Λ_ϕ, on dispose d'une application $f_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective qui paramètre la variété instable $W^u(x)$ et que l'on peut normaliser en imposant :

$$f_x(0) = x \text{ et } \parallel f_x'(0) \parallel_h = 1 \tag{13}$$

Le choix de f_x est unique modulo une rotation à la source. En particulier, les images des cercles et des disques centrés en l'origine ne dépendent pas de ce choix. Pour x dans Λ_ϕ, notons $A_h(x,r)$ l'aire de $f_x(\mathbb{D}_r)$ pour la métrique h. Le but de ce paragraphe est de montrer que $A_h(x,1)$ est une fonction mesurable qui est tempérée le long des orbites de ϕ.

Remarque 4.1. Nous serons amenés à employer la proposition 3.6 de manière analogue à ce que nous avons déjà fait dans le paragraphe 3.4. Les notations introduites dans la section précédente, notamment la définition de $A_h^\psi(x,r)$, resteront donc valables tout au long de ce paragraphe. Le choix de ψ_1 montre que les fonctions $r \mapsto A_h(x,r)$ et $r \mapsto A_h^\psi(x,r)$ ont même ordre de croissance.

Lemme 4.1. *Les fonctions $A_h(x,1)$ et $A_h^\psi(x,1)$ sont des fonctions mesurables de l'ensemble Λ_ϕ vers $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. Nous allons seulement traiter le cas de la fonction $A_h(x,1)$, celui de $A_h^\psi(x,1)$ étant analogue. Soit x un point de Λ_ϕ. Notons $H_r(x)$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives $g : \mathbb{D}_r \to X$ qui envoient 0 sur x, dont la dérivée à l'origine est de module 1 et dont l'image est contenue dans $W^u(x)$. Puisque $W^u(x)$ est biholomorphe à $\mathbb{C}$, ces ensembles sont non vides et

$$A_h(x,1) = \lim_{r\to\infty} \left(\sup \left\{ \int_{\mathbb{D}_1} g^*\kappa \mid g \in H_r(x) \right\} \right). \tag{14}$$

Pour une fonction holomorphe g, la condition globale $g(\mathbb{D}_r) \subset W^u(x)$ peut être remplacée par la condition locale : $g^{-1}(W^u_{loc}(x))$ contient l'origine dans son intérieur. Puisque les variétés instables locales dépendent mesurablement du point, le lemme découle immédiatement de la formule (14). □

Définition 4.1. Soit $\phi : X \to X$ une transformation continue d'un espace compact et Λ un borélien ϕ-invariant. On dit qu'une fonction $A : \Lambda \to \mathbb{R}^+$ est tempérée sur Λ si

$$\lim_{n\to\pm\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log A(\phi^n(x)) \right\} = 0 \tag{15}$$

pour tout point x de Λ, privé d'une partie mesurable dont la mesure est nulle pour toute probabilité ϕ-invariante.

Proposition 4.2. *Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie topologique est strictement positive. Soit Λ_ϕ l'ensemble des points réguliers au sens de Pesin, dont les exposants de Lyapunov ne sont pas nuls et dont la variété instable est paramétrée par $\mathbb{C}$. Alors $A_h(x,1)$ et $A_h^\psi(x,1)$ sont des fonctions tempérées sur Λ_ϕ.*

Remarque 4.2. Soit (X, Ω) un espace mesurable et $\phi : X \to X$ une bijection bimesurable qui préserve une mesure de probabilité ν ergodique. Soit $B \subset X$ une partie mesurable de X de ν-mesure strictement positive et $a_B : X \to \mathbb{N} \cup +\infty$ la fonction qui, à tout point x, associe le plus petit entier positif n tel que $\phi^{-n}(x) \in B$. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, cette fonction ne prend la valeur $+\infty$ que sur un ensemble de mesure nulle. Elle est mesurable et ne s'annule que sur B. Si $\phi(x)$ n'appartient pas à B alors $a_B(\phi(x)) - a_B(x) = 1$. Sinon $a_B(x) - a_B(\phi(x))$ est le temps de retour de $\phi(x)$ dans B pour les itérés successifs $\phi^{-n}(x)$, $n \geq 0$. Le lemme de Kac affirme que ce temps de retour est une fonction ν-intégrable, l'intégrale valant $\nu(X)/\nu(B)$. La fonction $a_B \circ \phi - a_B$ est donc intégrable. En corollaire, le théorème ergodique assure que la limite de $\frac{1}{n} a_B(\phi^n(x))$ est nulle pour ν-presque tout point x (cf. [12], p. 100). Nous allons utiliser cette propriété dès maintenant.

Démonstration de la proposition. Ici encore, nous nous contenterons de traiter le cas de la fonction $A_h(x,1)$. Avant de commencer réellement la preuve, remarquons qu'il suffit d'établir que, pour toute mesure de probabilité ϕ-hyperbolique, l'ensemble des points x vérifiant

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log A_h(\phi^n(x)) \right\} = 0 \tag{16}$$

a une mesure totale. Cette propriété sera alors valable pour toute mesure ergodique : celles qui ne sont pas ϕ-hyperboliques affectent en effet une masse nulle à l'ensemble Λ_ϕ.

Fixons donc une mesure de probabilité ϕ-hyperbolique ν. Soit M une constante positive et B' l'ensemble des points x de Λ_ϕ en lesquels $1/M \leq A_h(x,1) \leq M$; si M est suffisamment grande, la mesure de B' est strictement positive. Soit χ^+ l'exposant de Lyapunov positif de ν, et ϵ un réel strictement positif très petit devant χ^+. Pour ν-presque tout point x de Λ_ϕ, la dérivée au point x de ϕ^n le long de $W^u(x)$ est plus grande que $\exp(\chi^+(x) - \epsilon)$ lorsque n est suffisamment grand. Il existe donc un entier positif N_0 et une partie B de B' de mesure strictement positive tels que : pour tout point x de B et pour tout entier n supérieur à N_0, le module de la dérivée au point x de ϕ^n le long de $W^u(x)$ est plus grand que 1.

Soit a_B la fonction associée au borélien B au cours de la remarque 4.2. Si x appartient à X et si n est supérieur à N_0, il existe alors un point z de B tel que $\phi^n(x) = \phi^k(z)$, où $k = a_B(\phi^{n-N_0}(x)) + N_0$. Le choix de N_0 assure que $f_{\phi^n(x)}(\mathbb{D}_1)$ est contenu dans $\phi^k(f_z(\mathbb{D}_1))$, donc

$$A_h(\phi^n(x), 1) \leq \| d\phi \|^{2k} A_h(z, 1). \tag{17}$$

En utilisant que $A_h(z,1)$ est majoré par M et en passant au logarithme, on obtient :

$$\log A_h(\phi^n(x),1) \leq \left(a_B(\phi^{n-N_0}(x)) + N_0\right)\log(\| d\phi \|^2) + \log(M) \tag{18}$$

ce qui montre que

$$\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\log A_h(\phi^n(x),1)\right\} \leq \mathrm{C}^{ste}\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}a_B(\phi^{n-N_0}(x))\right\}. \tag{19}$$

D'après la remarque 4.2, on a donc établi :

$$\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n}\log A_h(\phi^n(x),1)\right\} \leq 0. \tag{20}$$

De la même manière, mais en allant chercher le premier point de l'orbite positive $(\phi^n(x))_{n\geq 0}$ qui se situe dans B, on montre l'inégalité opposée, ce qui achève la preuve. □

4.2. **Majoration de l'ordre de croissance.** Nous abordons maintenant la première étape de la démonstration du théorème 1.2. *Il s'agit de montrer que, pour presque tout point x de Λ_ϕ,*

$$\rho(x) \leq \frac{h_{top}(\phi)}{\chi^+(x)}, \tag{21}$$

avec $h_{top}(\phi) = \log(\lambda)$ supposée non nulle.

Soit Λ_ϕ^t l'ensemble des points de Λ_ϕ pour lesquels l'égalité (16) est valable. Soit ν une mesure de probabilité ϕ-hyperbolique et χ^+ l'exposant de Lyapunov positif de ν. D'après la proposition 4.2, $\nu(\Lambda_\phi^t) = 1$. Soit x un point de Λ_ϕ^t, d'exposant de Lyapunov χ^+. Pour tout entier positif n, nous noterons $\overline{\chi}^n(x)$ la norme de la dérivée de ϕ^n au point $\phi^{-n}(x)$ le long de la variété instable $W^u(\phi^{-n}(x))$: $\overline{\chi}^n(x)$ est égal au rapport de l'homothétie $z \mapsto f_x^{-1}\circ\phi^n\circ f_{\phi^{-n}(x)}$.

Soit ϵ un réel strictement positif petit devant χ^+. Puisque x est un point de Pesin d'exposant χ^+, il existe une constante $C(x,\epsilon)$ telle que :

$$\forall n\geq 0,\ C(x,\epsilon)\exp\left(n(\chi^+-\epsilon)\right) \leq \overline{\chi}^n(x) \leq C(x,\epsilon)^{-1}\exp\left(n(\chi^++\epsilon)\right). \tag{22}$$

Si r est un réel positif nous noterons $n(r)$ le plus petit entier positif pour lequel $C(x,\epsilon)\exp(n(\chi^+-\epsilon))$ est plus grand que r. Asymptotiquement, $(\chi^+-\epsilon)n(r)$ se comporte donc comme $\log(r)$.

Le choix de $n(r)$ est tel que $f_x(\mathbb{D}_r)$ est inclus dans $\phi^{n(r)}(f_{\phi^{-n(r)}(x)}(\mathbb{D}_1))$. Après intégration et prise du logarithme, on obtient donc :

$$\log(A_h^\psi(x,r)) \leq \log\left(\int_{\mathbb{D}_1}\psi_1\ (\phi^{n(r)}\circ f_{\phi^{-n(r)}(x)})^*(\kappa)\right). \tag{23}$$

En divisant chaque membre de cette inégalité par $(\chi^+ - \epsilon)n(r)$ et en normalisant la forme $(\phi^{n(r)})^*(\kappa)$ par le facteur $\lambda^{n(r)}$, on en déduit que

$$\frac{\log(A_h^{\psi}(x,r))}{(\chi^+ - \epsilon)n(r)} \leq \frac{\log\langle (f_{\phi^{-n(r)}(x)})_*\{\psi_1\mathbb{D}_1\} \mid \frac{1}{\lambda^{n(r)}}(\phi^{n(r)})^*(\kappa)\rangle}{(\chi^+ - \epsilon)n(r)} + \frac{\log(\lambda)}{\chi^+ - \epsilon}. \tag{24}$$

La limite supérieure du membre de gauche converge vers l'ordre de croissance de f_x (car $(\chi^+ - \epsilon)n(r)$ se comporte comme $\log(r)$). Dans le membre de droite, le second terme correspond, à ϵ près, à l'ordre de croissance annoncé par le théorème 1.2. Pour obtenir l'inégalité (21) il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\langle (f_{\phi^{-n}(x)})_*\{\psi_1\mathbb{D}_1\} \mid \frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)^*(\kappa) \right\rangle \leq 0. \tag{25}$$

D'après la proposition 4.2, la masse des courants $(f_{\phi^{-n}(x)})_*\{\psi_1\mathbb{D}_1\}$ est tempérée. Si les formes $(1/\lambda^n)(\phi^n)^*(\kappa)$ étaient toutes égales à une forme κ_0, l'inégalité serait donc immédiate. Bien sûr, ce n'est pas le cas : on sait seulement que la suite de formes différentielles $(1/\lambda^n)(\phi^n)^*(\kappa)$ converge au sens des courants vers T^- (remarque 3.2, 1.–), ce qui n'est pas suffisant pour conclure. Nous allons donc devoir affiner l'étude de cette convergence.

4.3. **Convergence d'images directes de courants lisses vers T^+.** Conservons les notations de la partie 3 et du paragraphe précédent : $\phi : X \to X$ est un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie $\mathrm{h}_{top}(\phi) = \log(\lambda)$ est strictement positive, h est une métrique kählérienne de forme κ et T^+ est l'unique courant positif fermé de norme 1 qui vérifie l'équation $\phi_* T^+ = \lambda T^+$.

Proposition 4.3 ([6]). *Soit κ_0 une forme de Kähler sur X. Pour tout recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts acycliques $\mathcal{U}_i$, il existe une constante M et une suite de fonctions lisses $u_i^n : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall i, n, \quad |u_i^n(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathcal{U}_i, \tag{26}$$

$$\forall i, n, \quad \frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)^*\kappa_0 = dd^c(u_i^n) \ \ \textit{sur } \mathcal{U}_i. \tag{27}$$

Nous allons maintenant utiliser cette proposition pour conclure la première étape de la preuve du théorème 1.2. Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une application holomorphe et $\psi : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse et positive qui s'annule dans un voisinage du bord de $\mathbb{D}_1$. On s'intéresse à la quantité

$$M_n = \langle f_*\{\psi\mathbb{D}_1\} \mid \frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)^*\kappa_0 \rangle. \tag{28}$$

Soit $\{\mathcal{U}_i\}_{1\leq i\leq k}$ un recouvrement ouvert de X, (u_i^n) la suite de fonctions donnée par la proposition précédente et $\{\Psi_i\}$ une partition de l'unité associée au recouvrement $\{\mathcal{U}_i\}$. On peut alors écrire :

$$M_n = \langle f_*\{\psi\mathbb{D}_1\} \mid \sum_{i=1}^{k} \Psi_i dd^c u_i^n \rangle \tag{29}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{D}_1} \psi\ f^* \left(\Psi_i dd^c u_i^n\right) \tag{30}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{D}_1} \psi\left(\Psi_i \circ f\right)\left(dd^c u_i^n \circ f\right) \tag{31}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{D}_1} dd^c(\psi\ \Psi_i \circ f)\ u_i^n \circ f \tag{32}$$

Chaque intégrale qui apparaît dans cette somme est majorée par le produit de l'intégrale de $\| f' \|^2$ sur $\mathbb{D}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ et d'une constante qui ne dépend que de M, de ψ et des Ψ_i. La suite M_n est donc majorée par l'aire $A_h(f, 1)$.

Si l'on applique cette remarque aux fonctions $f_{\phi^{-n}(x)}$, la proposition 4.2 permet immédiatement de conclure la preuve de la première étape.

4.4. **Minoration de l'ordre de croissance.** Nous attaquons maintenant la seconde étape de la preuve du théorème 1.2. *Il s'agit d'établir la minoration*

$$\frac{\mathrm{h}_{top}(\phi)}{\chi^+(x)} \leq \rho(x). \tag{33}$$

Pour l'obtenir, il nous suffit de construire une suite de rayons r_n tendant vers l'infini et vérifiant

$$\log(A_h^{\psi}(x, r_n)) \geq \log(r_n)\frac{\mathrm{h}_{top}(\phi)}{\chi^+(x)}. \tag{34}$$

Pour cela, nous utiliserons les images de certains disques $f_{\phi^{-n}(x)}(\mathbb{D}_1)$ par ϕ^n : la suite r_n sera donc constituée de rayons du type $\overline{\chi}^n(x)$. La seule difficultée est de choisir convenablement les itérés $\phi^{-n}(x)$ pour avoir un contrôle de l'aire $A_h(x, r_n)$.

Pour tout entier positif n, on a

$$A_h^{\psi}(x, \overline{\chi}^n(x)) = \langle (f_{\phi^{-n}(x)})_*\{\psi_1\mathbb{D}_1\} \mid (\phi^n)^*\kappa\rangle. \tag{35}$$

D'après la proposition 3.6, on s'attend à ce que cette aire se comporte comme λ^n. La minoration que l'on cherche à établir est d'ailleurs équivalente à l'existence d'une constante ϵ strictement positive telle que :

$$\frac{1}{\lambda^n}\langle (f_{\phi^{-n}(x)})_*\{\psi_1\mathbb{D}_1\} \mid (\phi^n)^*\kappa\rangle \geq \epsilon \tag{36}$$

pour une infinité d'entiers positifs n.

Soit ϵ strictement positif et $B_N(\epsilon)$ l'ensemble des points y de Λ_ϕ pour lesquels

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{\lambda^n}\langle (f_y)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\} \mid (\phi^n)^*\kappa \rangle \geq \epsilon. \tag{37}$$

D'après la remarque 3.2 2., il existe un réel positif ϵ suffisamment petit et un entier N suffisamment grand tels que la mesure $\nu(B_N(\epsilon))$ soit strictement positive. En dehors d'un ensemble de mesure nulle, tout point x admet une infinitié d'antécédents $\phi^{-n_i}(x)$ dans $B_N(\epsilon)$. Pour tous ces points x, la suite $r_{n_i} = \overline{\chi}^{n_i}(x)$ vérifie l'équation (36). La preuve de la minoration est donc établie et le théorème 1.2 est maintenant complètement démontré.

5. Applications

5.1. Dimension de Hausdorff et ordre de croissance. Sur une surface K3, il existe une forme volume invariante par tout automorphisme. Pour la construire, on part d'une 2-forme holomorphe partout non nulle, ω, et l'on considère

$$\Omega = \omega \wedge \overline{\omega}. \tag{38}$$

Cette 4-forme différentielle ne s'annule jamais et est invariante par tout automorphisme. En particulier, les exposants de Lyapunov de tout automorphisme sont opposés : $\chi^+(x) = -\chi^-(x)$.

Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 d'entropie positive. D'après [6], nous savons que ϕ admet une unique mesure de probabilité d'entropie maximale notée μ. Cette mesure est égale au produit $T^+ \wedge T^-$. Les courants T^+ et T^- sont des courants laminaires et la mesure μ^- obtenue localement par désintégration de μ le long des variétés instables de ϕ s'identifie à la mesure transverse de T^+ (voir [6] pour des définitions précises). La dimension de Hausdorff de cette mesure peut donc être interprétée comme dimension de Hausdorff "*transverse aux courbes* f_x". La formule de Ledrappier-Young affirme alors que, **pour μ-presque tout point x, l'ordre de croissance de f_x est égal à la moitié de "la dimension de Hausdorff transverse à f_x".**

Les exemples explicites pour lesquels on sait calculer l'exposant de Lyapunov, et donc l'ordre de croissance, sont les points périodiques hyperboliques. Par ailleurs, nous avons montré que la moyenne des exposants de Lyapunov positifs aux points périodiques converge vers l'exposant de Lyapunov de la mesure d'entropie maximale [6], [4]. En théorie, on est donc en possession de courbes entières explicites pour lesquelles on sait estimer l'ordre de croissance et la dimension de Hausdorff transverse.

5.2. Le cas des automorphismes de Hénon. Tout ce qui a été employé pour les automorphismes des surfaces K3 est valable pour les automorphismes de Hénon, vus comme transformations birationnelles du plan projectif. Ce sont d'ailleurs les méthodes mises au point dans le cadre des transformations de Hénon qui nous avaient guidé dans [6] pour démontrer les théorèmes 3.1 et 3.3 et les propositions 3.6 et 4.3.

Afin de permettre au lecteur de localiser dans la littérature les résultats qui nous sont utiles, reprenons un à un les énoncés clé que nous avons employés au paragraphe 4. Soit $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la transformation birationnelle associée à un automorphisme de type Hénon et d son degré.

(i) L'entropie topologique de ϕ est égale à $\log(d)$ [17].

(ii) Si $f_x : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2$ paramètre une feuille instable de ϕ, la suite de courants

$$\frac{1}{d^n}(\phi^n)_*((f_x)_*\{\psi_1 \mathbb{D}_1\})$$

converge vers le courant de Green dilaté par ϕ [3]. Ce courant vérifie l'équation fonctionnelle $\phi_* T = dT$.

(iii) Si ω désigne la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$, la suite de formes différentielles $(1/d^n)(\phi^n)^*\omega$ converge vers le courant de Green dilaté et est localement donnée par des potentiels lisses uniformément bornés [16].

Tous les ingrédients utilisés pour démontrer le théorème 1.2 sont donc valables dans le cadre des transformations de Hénon. On dispose ainsi des énoncés analogues à ceux employés pour les surfaces K3.

Théorème 5.1. *Soit $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la transformation birationnelle associée à un automorphisme de type Hénon. Soit μ la mesure d'entropie maximale de ϕ. Pour μ presque tout point x, la variété instable $W^u(x)$ est paramétrée par une courbe entière injective d'ordre :*

$$\rho(x) = \frac{\log(d)}{\chi^+(x)}, \tag{39}$$

où $\chi^+(x)$ est l'exposant de Lyapunov positif au point x. Ce résultat est encore valable si x est un point périodique hyperbolique de ϕ.

Exemple 5.1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ la transformation de Hénon

$$\phi(x, y) = (y, y^2 + 1 - x). \tag{40}$$

Le point de coordonnées $x = y = (2 + i\sqrt{3})/2$ est un point fixe dont l'exposant de Lyapunov positif vaut :

$$\chi^+ = \frac{1}{2}\log\left(\frac{7}{4} - (2 - \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}\right). \tag{41}$$

On en déduit que la variété instable du point fixe est d'ordre $\rho = 3.419$ environ.

5.3. **Difféomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$.** La technique développée dans les premiers paragraphes de ce texte permet également de calculer l'ordre de croissance des feuilles stables et instables des difféomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Soit ϕ un tel difféomorphisme, de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour simplifier. Puisque ses feuilletages stables et instables sont de dimension 1, chacun est muni d'une structure affine le long de ses feuilles [7], [8] ou [9].

On peut donc paramétrer chaque feuille instable $W^u(x)$ par une application $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ transportant la structure affine standard de $\mathbb{R}$ bijectivement sur $W^u(x)$. L'ordre de croissance $\rho(x)$ de la fonction $L(r) = \mathrm{Longueur}(f_x[-r, r])$ détermine une fonction mesurable de $\mathbb{T}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5.2. *Soit ϕ un difféomorphisme d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ qui soit de classe $\mathcal{C}^{1+\epsilon}$ et dont les feuilletages stables et instables sont orientables. Soit ν une mesure de probabilité ϕ-invariante, ergodique et d'entropie strictement positive. Alors, pour ν presque tout point x, on a*

$$\rho(x) = \frac{h_{top}(\phi)}{\chi^+(x)}, \tag{42}$$

où $\rho(x)$ désigne l'ordre de croissance de la feuille instable au point x et $\chi^+(x)$ l'exposant de Lyapunov positif en ce point.

Quelques remarques sont nécessaires pour expliquer l'analogie entre le cas des difféomorphismes Anosov et celui des automorphismes des surfaces K3 et esquisser une démonstration sur le même schéma que les sections précédentes.

Avant toutes choses, rappelons que chaque difféomorphisme Anosov de $\mathbb{T}^2$ est topologiquement conjugué à l'automorphisme linéaire dont l'action sur $H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ est égale à celle de ϕ. Nous noterons λ la valeur propre dilatante de cette matrice. L'entropie topologique de ϕ est égale à $\log(\lambda)$.

Suivant Ruelle et Sullivan [15], on est conduit à étudier les cycles feuilletés le long du feuilletage instable $\mathcal{F}^u$. Puisque ce feuilletage est homéomorphe à un feuilletage linéaire de pente irrationnelle, il admet une unique mesure transverse invariante (une rotation irrationnelle est uniquement ergodique), en particulier, pour tout point x de $\mathbb{T}^2$, la famille de courants

$$C_x(r) : \alpha \mapsto \frac{1}{L(r)} \int_{[-r,r]} f_x^*(\alpha) \tag{43}$$

converge vers l'unique cycle feuilleté par $\mathcal{F}^u$. D'après [13], [14], [15], ce cycle feuilleté C^+ vérifie

$$\phi_* C^+ = \lambda C^+. \tag{44}$$

Tout ceci montre que le courant C^+ joue un rôle totalement analogue à celui joué par T^+ dans les paragraphes précédents.

Il reste encore à expliquer comment se passer de l'importante notion de "courant positif" dont nous disposions sur les variétés complexes, et à donner un substitut pour la forme de Kähler κ. Le point clef est que, maintenant, les variétés stables et instables s'organisent en deux vrais feuilletages continus et orientables. On peut donc construire un champ de vecteurs continu $\mathbf{x}^u$ le long de $\mathcal{F}^u$ qui soit partout de norme 1. Soit κ^u la forme duale (pour la métrique employée) et κ^s la forme analogue le long de $\mathcal{F}^s$. La forme $\kappa = \kappa^u + \kappa^s$ est une forme continue non fermée qui remplace avantageusement la forme de Kähler utilisée au paragraphe 4. Par exemple, il est facile de voir que le courant donné par le champ $\mathbf{x}^u$ converge vers C^+ lorsqu'on lui applique $(1/\lambda^n)(\phi_*)^n$.

Tous ces résultats étant contenus dans [18], nous n'en dirons pas plus.

Remarque 5.1. Les automophismes des surfaces complexes compactes qui sont de type Anosov sont tous des automorphismes affines de tores [9]. Une classification similaire est également valable pour les automorphismes Axiome A ou "pseudo-Anosov" [6]. En règle générale, les automorphismes des surfaces présentent une dynamique qui n'est pas uniformément hyperbolique [2], [6].

Références

[1] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes.* Société Mathématique de France, Paris, 1978. Astérisque, No. 54.

[2] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1):77–125, 1993.

[3] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.*, 294(3):395–420, 1992.

[4] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes. *Thèse de l'É.N.S.-Lyon*, 137(10):1–189, 1999.

[5] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10):901–906, 1999.

[6] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces K3. *Acta Mathematica*, à paraitre:52 p., 2001.

[7] Étienne Ghys. Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(1-2):209–247, 1992.

[8] Étienne Ghys. Rigidité différentiable des groupes fuchsiens. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78):163–185 (1994), 1993.

[9] Étienne Ghys. Holomorphic Anosov systems. *Invent. Math.*, 119(3):585–614, 1995.

[10] Teisuke Jin. Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$: stable and unstable manifolds. 2000. voir http:/member.nifty.ne.jp/jin-t/.

[11] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[12] Ricardo Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Portuguese by Silvio Levy.

[13] David Ruelle. Integral representation of measures associated with a foliation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48):127–132, 1978.

[14] David Ruelle. Invariant measures for a diffeomorphism which expands the leaves of a foliation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48):133–135, 1978.

[15] David Ruelle and Dennis Sullivan. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology*, 14(4):319–327, 1975.

[16] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$. *Panoramas et Synthèses*, 7:97–185, 1999.

[17] John Smillie. The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 36:225–255, 1976.

[18] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36:225–255, 1976.

[19] M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory.* Maruzen Co., Tokyo, 1959.

[20] He Wu. Complex stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(4):1349–1358, 1993.