Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes

Serge Cantat,
École normale supérieure de Lyon, UMR 5669.
46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France.

Résumé. Nous étudions la dynamique des automorphismes des surfaces complexes projectives dont l'entropie topologique est strictement positive. Si ϕ est un tel automorphisme nous construisons une mesure de probabilité canoniquement associée à ϕ et à la structure complexe de la surface. C'est l'unique mesure ϕ-invariante ergodique et d'entropie maximale. Les points périodiques de ϕ sont équidistribués pour cette mesure.

On the dynamics of automorphisms of complex projective surfaces

Abstract. *We study the dynamics of automorphisms of complex projective surfaces. Let ϕ be such an automorphism whose topological entropy is not zero. We construct a probability measure associated to ϕ and the complex structure. This measure is ϕ-invariant, ergodic and has maximal entropy. This is the unique measure satisfying these properties and periodic points are equidistributed with respect to this measure.*

Abridged English Version

Proposition 1 *Let X be a compact complex surface and $Aut(X)$ its automorphisms group. If there exists $\phi \in Aut(X)$ whose topological entropy is positive then X is a torus, a K3 surface, an Enriques surface or a non minimal rational surface.*

Sketch of proof. Let $\kappa(X)$ and $a(X)$ denote respectively the Kodaira and algebraic dimension of X. If $\kappa(X) = 2$, then Aut(X) is finite. If $\kappa(X) = 1$ or $a(X) = 1$ or X is hyperelliptic, there is an Aut(X)-invariant elliptic fibration on X and the entropy of every automorphism vanishes. If X is ruled, of genus bigger than one, the ruling is invariant and we can apply the same idea. For surfaces in class VII, the intersection form on $H^2(X, \mathbb{Z})$ is semi-negative and therefore the Lefschetz numbers of ϕ^k are bounded for every $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$. This implies that the number of hyperbolic periodic points of ϕ is finite and shows $h_{top}(\phi) = 0$ [7]. □

We now suppose that X is a **projective** surface and denote by $NS(X)$ its Néron-Severi group and q the intersection form on $NS(X)$. If $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$, ϕ_* acts on $NS(X)$ and preserves q. Using [6] and [12] we easily obtain the following theorem.

Theorem 1 (Gromov,Yomdin) *If λ is the spectral radius of ϕ_* then*

$$h_{top}(\phi) = Log(\lambda).$$

Then, we study the action of ϕ on the cone of closed positive $(1,1)$-currents and show that :

Theorem 2 *There exists a non zero closed positive current T^+ such that $\phi_* T^+ = \lambda T^+$. If J is another closed current of order zero satisfying this equation, then $J = \alpha T^+$ for some real number α. Among closed positive currents, T^+ is uniquely determined by its homology class and is on an extremal ray.*

Sketch of proof. Let t^+ be a λ-eigenvector of ϕ_*. Since the λ-eigenspace lies in the closure of the Kähler cone of X, the set of closed positive currents whose homology class coincides with t^+ is nonempty and Schauder-Tychonov fixed point theorem exhibits at least one current T^+ satisfying the above relation. If J is another eigencurrent with the same homology class, it differs from T^+ by $\partial\overline{\partial}$ of a finite $\frac{1}{\lambda}\phi_*$-invariant measure. Since ϕ is a diffeomorphism this measure vanishes. □

We then study T^+. If $L_1, \ldots, L_\rho$ are line bundles whose Chern classes form a basis of the Picard group of X and E is the direct product of these $\mathbb{C}^*$-principal bundles, we show that ϕ extends to $\Phi : E \to E$. Let h_i, $1 \leq i \leq \rho$, be a hermitian metric on L_i. If $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$ are the coordinates of $[T^+]$ in the dual basis of (e_i), the sequence

$$G_n(x) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_i \alpha_i \log\left(h_i(\Phi(x))\right)$$

converges uniformly on E toward a continuous plurisubharmonic function G^+ whose associated current projects on T^+ and as a consequence we obtain the following theorem.

Theorem 3 *The currents T^+ and T^- admit local continuous potentials.*

If p is a hyperbolic periodic point of ϕ, its unstable manifold can be parametrized by an injective entire curve $f : \mathbb{C} \to \mathbb{X}$. The sequence of currents

$$C_r = \frac{1}{Area(f(\mathbb{D}_\searrow))} \int_{f(\mathbb{D}_\searrow)}$$

admits a weakly converging subsequence whose limit is T^+. From this, we deduce that T^+ is **laminar**: this is theorem 4.

The existence of continuous potentials enables us to define $\mu = T^+ \wedge T^-$ as an invariant probability measure. This measure is mixing and therefore ergodic and the above properties are sufficient to apply [3] and [2].

Theorem 5 *The measure μ is the unique ϕ-invariant probability measure with maximal entropy. Periodic points are equidistributed with respect to this measure.*

Nous résumons ici des résultats dont les démonstrations complètes paraîtront ultérieurement.

1. Introduction

Soit X une surface complexe compacte et $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe de ses automorphismes, c'est-à-dire de ses difféomorphismes holomorphes. Supposons qu'il existe un élément ϕ de $\mathrm{Aut}(X)$ dont l'entropie topologique est positive. Que peut-on dire de X et de la dynamique de ϕ ?

Cette note présente quelques résultats concernant cette question dans l'esprit des études précédemment effectuées pour les automorphismes du plan affine [3], [2] ou les endomorphismes du plan projectif [5].

Remerciements. Je remercie Étienne Ghys de m'avoir soumis la question précédente puis d'avoir encadré mes travaux pour y répondre. Ce travail a également bénéficié de nombreuses discussions avec Bruno Sévennec. Je l'en remercie chaleureusement.

2. La surface X

Proposition 1 *Soit X une surface complexe compacte possédant un automorphisme d'entropie topologique non nulle. Alors X est un tore, une surface K3, une surface de Enriques, ou une surface rationnelle non minimale.*

Esquisse de démonstration. Notons $\kappa(X)$ la dimension de Kodaira de X et $a(X)$ sa dimension algébrique. Lorsque $\kappa(X) = 2$, $\mathrm{Aut}(X)$ est fini. Si $\kappa(X) = 1$ ou $a(X) = 1$ ou si X est hyperelliptique, il existe sur X une fibration elliptique $\mathrm{Aut}(X)$-invariante et l'on vérifie alors sans peine que tout automorphisme est d'entropie nulle. Pour les surfaces réglées de genre supérieur à un, le réglage est préservé et la même méthode s'applique. Pour les surfaces de type VII la forme d'intersection est semi-négative ce qui entraîne que les nombres de Lefschetz des itérés de tout automorphisme sont bornés. Les automorphismes d'une telle surface n'ont donc qu'un nombre fini de points périodiques hyperboliques et leur entropie est nécessairement nulle [7]. Les cas restant sont ceux admis dans l'énoncé car les automorphismes des surfaces rationelles minimales ont une entropie nulle. □

Remarques. Sur un tore tout automorphisme provient d'un élément du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ et détermine un difféomorphisme d'Anosov s'il est d'entropie positive.

Le premier exemple d'automorphisme d'une surface K3 consiste à prendre la surface de Kummer d'un tore admettant un automorphisme d'Anosov. D'autres exemples nettement plus intéressants sont décrits dans [8] et [11].

Les surfaces de Enriques sont des quotients des surfaces K3 et l'étude de leur groupe d'automorphismes se ramène au cas précédent. Il faut toutefois noter que ces surfaces admettent en général une infinité d'automorphismes, ce qui n'est pas le cas des surfaces K3 ou des surfaces rationelles. C'est d'ailleurs cette dernière famille qui est la moins bien comprise, les seuls exemples connus de l'auteur étant la surface de Coble [4] et quelques analogues construits par Nikulin [9].

3. Entropie, homologie et courants

Dorénavant ϕ est un automorphisme d'une surface compacte X dont l'entropie topologique est non nulle. La proposition énoncée au paragraphe précédent montre que X est kählérienne mais dans toute la suite nous la supposerons **projective**. Cette restriction ne concerne que les surfaces K3.

La surface X étant fixée, nous noterons $NS(X)$ son groupe de Néron-Severi :

$$NS(X) = H_{1,1}(X, \mathbb{R}) \cap H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Cet espace est muni d'une forme quadratique q (la forme d'intersection) et l'action de ϕ en homologie préserve $NS(X)$ et q. Le théorème de la signature de Hodge affirme que cette forme est hyperbolique (non dégénérée) de signature $(1, \rho - 1)$ où $\rho = \dim(NS(X) \otimes \mathbb{R})$.

Théorème 1 (Gromov, Yomdin) *Soit λ le rayon spectral de $\phi_* : NS(X) \to NS(X)$. L'entropie topologique de ϕ est donnée par la formule :*

$$h_{top}(\phi) = Log(\lambda).$$

Ce théorème est une conséquence directe des travaux de Gromov [6] et Yomdin [12] sur l'entropie des difféomorphismes. Puisque q est hyperbolique, l'isométrie ϕ_* dilate donc exactement une droite D^+, contenue dans le cône de lumière de q, et en contracte exactement une autre D^-. Le facteur de dilatation est l'inverse du facteur de contraction : il vaut λ.

Soit $\mathcal{C}_X$ l'espace des (1,1)-courants d'ordre 0 et fermés sur X et $\mathcal{C}_X^+$ l'ensemble de ceux qui sont positifs : c'est un cône à semelle compacte pour la topologie faible de $\mathcal{C}_X$. Tout automorphisme ϕ de X agit continûment sur $\mathcal{C}_X$ en préservant $\mathcal{C}_X^+$, l'image $\phi_* T$ d'un courant T étant donnée par :

$$\phi_* T(\alpha) = T(\phi^* \alpha), \quad \forall \alpha \in \Lambda^{1,1}(X).$$

En suivant une idée de Sullivan (cf. [10]) on peut alors appliquer un théorème de point fixe pour obtenir des courants invariants, dilatés ou contractés par ϕ.

Théorème 2 *Soit X une surface complexe compacte admettant un automorphisme ϕ d'entropie positive. Il existe alors un unique courant positif fermé T^+ de norme un satisfaisant $\phi_* T^+ = \lambda T^+$.*

Ce courant est extrémal dans le cône $\mathcal{C}_X^+$; il y est uniquement déterminé par sa classe d'homologie. Tout autre courant fermé J vérifiant $\phi_* J = \lambda J$ est un multiple de T^+.

Le même énoncé est bien sûr valable avec T^- à la place de T^+ et ϕ^{-1} à la place de ϕ. Les courants T^+ et T^- sont canoniquement associés à l'automorphisme ϕ étudié et à la structure complexe de X. Ils dépendent uniquement de la normalisation effectuée.

Esquisse de démonstration. La droite D^+ est dans l'adhérence du cône de Kähler de X : il existe donc au moins un courant positif fermé de classe d'homologie $t^+ \in D^+$. L'ensemble de ces courants forme un convexe compact invariant par $\frac{1}{\lambda}\phi_*$ ce qui permet d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff pour obtenir au moins un courant positif T^+ vérifiant $\phi_* T^+ = \lambda T^+$. Si J est fermé et vérifie la même relation, la classe d'homologie de l'un de ses multiples αJ coïncide avec celle de T^+. Le courant $T^+ - \alpha J$ est égal à $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\mu$ où μ est une mesure finie contractée par ϕ ce qui est impossible. Ceci, et le fait que $[T^+]$ est extrémale dans $[\mathcal{C}_X^+]$, entraînent le reste des propriétés annoncées. □

4. Structure et construction de T^+ et T^-

Dans ce paragraphe nous expliquons comment obtenir T^+ (resp. T^-) à l'aide de constructions de nature dynamique. Nous en déduisons deux résultats sur la structure locale de ce courant.

Potentiels continus. L'outil essentiel utilisé pour l'étude des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ ou des endomorphismes de $\mathbb{CP}^2$ est une fonction plurisousharmonique G^+ (et le courant associé). Dans le cas des endomorphismes de $\mathbb{CP}^2$ cette fonction est construite de la manière suivante: si $f : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$ est un endomorphisme, il existe trois polynômes homogènes P, Q, R premiers entre eux et de même degré d tels que $f([x : y : z]) = [P(x, y, z) : Q(x, y, z) : R(x, y, z)]$. La fonction $F = (P, Q, R)$ apparaît ainsi comme un relevé de f à $\mathbb{C}^3$. Il se trouve alors que la suite de fonctions

$$G_n(x, y, z) = \frac{1}{d^n}\mathrm{Log}|F^n(x, y, z)|$$

converge uniformément vers une fonction plurisousharmonique continue G^+. Le courant associé $T^+ = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}G^+$ se projette sur $\mathbb{CP}^2$ et vérifie des relations d'invariance semblables à celles du théorème 2. Pour comprendre cette construction il faut remarquer que $\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$ est l'espace total du fibré tautologique de $\mathbb{CP}^2$, que ce fibré détermine une base de $NS(\mathbb{CP}^2)$ et que d est justement la valeur propre de $f_* : NS(\mathbb{CP}^2) \to NS(\mathbb{CP}^2)$.

Dans notre cadre, la situation est un peu plus compliquée. Voici comment procéder. Tout d'abord, on fixe une base $e_1, \ldots, e_\rho$ de $NS(X)^*$ représentée par des fibrés en droites $L_1, \ldots, L_\rho$. Chaque fibré L_i est un $\mathbb{C}^*$-fibré principal au dessus de X et leur produit direct E est un $(\mathbb{C}^*)^\rho$-fibré principal. C'est l'espace total de E qui joue le rôle de $\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$:

Proposition 2 *Il existe une application holomorphe $\Phi : E \to E$ vérifiant $\pi \circ \Phi = \phi \circ \pi$ où π est la projection de E sur X. L'application Φ est de surcroit régulière dans les fibres de E.*

Cet énoncé n'est pas propre aux surfaces et fonctionne en dimension quelconque mais ici la variété d'Albanese des surfaces envisagées est triviale ce qui simplifie la construction.

Esquisse de démonstration. Il suffit de voir que $\phi^* E$ et E sont deux $(\mathbb{C}^*)^\rho$-fibrés principaux isomorphes. Leurs classes de Chern sont deux éléments de $H^2(X, \mathbb{Z}^\rho) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^\rho$. Celle de $\phi^* E$ est obtenue à partir de celle de E en faisant agir ϕ^* sur $H^2(X, \mathbb{Z})$. Soit $[a_{ij}]$ la matrice de ϕ^* dans la base $e_1, ..., e_r$. On peut faire agir $(\mathbb{C}^*)^\rho$ par les caractères χ_i de poids a_{ij} le long des fibres de E ; on change ainsi la classe de Chern de E par l'action de la matrice $[a_{ij}]$ sur le deuxième terme du produit tensoriel : $\mathbb{Z}^\rho$. La classe de Chern de ce fibré principal (évidemment isomorphe à E) est alors la même que celle de $\phi^* E$ ce qui suffit pour conclure. $\square$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$ sont les coordonnées de $[T^+]$ dans la base duale des (e_i) et si $h_1, \ldots, h_\rho$ sont des métriques hermitiennes sur chaque L_i, alors la suite

$$G_n(x) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_i \alpha_i \mathrm{Log}(h_i(\Phi^n(x))$$

converge uniformément vers une fonction plurisousharmonique et continue G^+. Le courant associé se projette sur T^+ et l'on obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 3 *Les courants T^+ et T^- admettent des potentiels locaux continus.*

Feuilles instables. Puisque ϕ est d'entropie positive, il existe au moins un point périodique hyperbolique p pour ϕ [7]. Soit k la période de ce point. La variété instable de p est une surface de Riemann plongée dans X biholomorphe à $\mathbb{C}$. Il existe donc un paramétrage holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{X}$ de cette variété qui envoie l'origine de $\mathbb{C}$ sur le point p. Fixons une métrique hermitienne sur X et notons $A(r, f)$ l'aire de l'image $f(\mathbb{D}_\searrow)$ du disque de rayon r. La suite de courants positifs

$$C_r = \frac{1}{A(r,f)} \int_{f(\mathbb{D}_\searrow)}$$

est une suite bornée (en norme) et l'on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente : $C_{r_n} \rightharpoonup C_\infty$. Le lemme d'Ahlfors (cf. [1], page 186) permet même de supposer que C_∞ est fermé. Ce courant étant dilaté par ϕ^k on montre sans peine qu'il coïncide avec T^+, hormis le cas négligeable où la feuille instable de p est contenue dans une courbe compacte ϕ^k-invariante. Bien sûr, il n'est pas nécessaire de prendre une feuille instable d'un point périodique, et la construction précédente est valable pour tout point hyperbolique de l'ensemble de Pesin de ϕ.

Le courant T^+ s'obtient donc comme courant limite de courbes entières injectives. En s'inspirant des travaux de Bedford, Lyubich et Smillie, on peut montrer qu'un tel courant est toujours « laminaire ».

Théorème 4 *Les courants T^+ et T^- sont laminaires.*

Esquisse de démonstration. Après avoir fixé un pinceau de courbes à points bases isolés et avoir éclaté ces points nous pouvons supposer que X fibre sur $\mathbb{CP}^1$. Soit π la projection et f le paramétrage de la feuille instable. La fonction $\pi \circ f$ est méromorphe et l'on peut lui appliquer la théorie d'Ahlfors-Nevanlinna.

Soit $\epsilon > 0$ proche de zéro et $R \gg 1$. Fixons un recouvrement de $\mathbb{CP}^1$ par des disques (topologiques) de diamètre inférieur à ϵ. Soit Δ l'un de ces disques et T la fibre au dessus d'un point intérieur à Δ. À toute composante connexe B de $(\pi \circ f)^{-1}(\Delta) \cap \mathbb{D}_\mathbb{R}$ dont l'image $f(B)$ est un revêtement non ramifié de Δ on associe le point $p(B) = f(B) \cap T$. Soit $\mu_{R,\Delta}$ la mesure positive sur T obtenue en sommant les masses de Dirac aux points $p(B)$ pour toutes les composantes B ainsi construites et en divisant la mesure obtenue par $A(R, f)$. La théorie d'Ahlfors-Nevanlinna permet d'affirmer que cette suite de mesures converge (après extraction) vers une mesure non nulle, excepté peut-être pour trois des disques du recouvrement.

Le courant obtenu en intégrant sur les plaques $f(B)$ puis contre la mesure transverse $\mu_{R,\Delta}$ admet alors une limite non nulle qui approche T^+ dans $\pi^{-1}(\Delta)$. C'est un courant d'intégration sur une lamination de $\pi^{-1}(\Delta)$ par des disques.

On peut effectuer cette construction au dessus de chacun des disques du recouvrement et sommer les courants obtenus. Si les disques du recouvrement sont d'intérieurs deux à deux disjoints, le courant ainsi construit tend vers T^+ quand ϵ tend vers 0 : c'est encore une conséquence de la théorie d'Ahlfors-Nevanlinna. □

5. Application dynamique : l'unique mesure d'entropie maximale

Les courants T^+ et T^- admettant des potentiels locaux continus on peut définir la multiplication :

$$\mu = T^+ \wedge T^-.$$

Cette mesure est ϕ-invariante, mélangeante, et satisfait aux propriétés suivantes :

Théorème 5 *La mesure μ est l'unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale $Log(\lambda)$. Elle est la limite des points périodiques de ϕ : si $P_n = \{x \in X : \phi^n(x) = x\}$ alors*

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{card(P_n)} \sum_{x \in P_n} \delta_x \right).$$

Ce résultat est analogue au théorème principal de Bedford, Lyubich et Smillie pour les automorphismes polynomiaux du plan affine complexe. À ce stade, les démonstrations suivent essentiellement la même trame en présentant cependant des difficultés techniques distinctes.

Références

[1] Lars Ahlfors. Zur Theorie der Überlagerungflächen. *Acta Math.*, 65:157–194, 1935.

[2] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 114(2):277–288, 1993.

[3] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{c}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1):77–125, 1993.

[4] Igor Dolgachev and David Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165):210 pp. (1989), 1989.

[5] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimensions. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.

[6] Mikhail Gromov. On the entropy of holomorphic map. *Manuscrit*, 1980.

[7] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51):137–173, 1980.

[8] Barry Mazur. The topology of rational points. *Experiment. Math.*, 1(1):35–45, 1992.

[9] Viacheslav V. Nikulin. Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 654–671. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[10] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36:225–255, 1976.

[11] Joachim Wehler. $K3$-surfaces with Picard number 2. *Arch. Math. (Basel)*, 50(1):73–82, 1988.

[12] Yosef Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3):285–300, 1987.