Proposition de note aux C.R.A.S.
version acceptée (fin fevrier 2000).

Deux exemples concernant une conjecture de Serge Lang

Serge CANTAT,

École Normale Supérieure de Lyon, UMR 5669, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France.
Ruhr-Univesität Bochum, Gebäude NA 5, 44780 Bochum, Allemagne.
courriel : scantat@umpa.ens-lyon.fr

Résumé. Nous décrivons deux exemples de surfaces complexes compactes non projectives munies de courbes entières. Le but est de comprendre l'importance de l'hypothèse d'algébricité dans une conjecture de S. Lang. Nous montrons par exemple que la conjecture de Lang est fausse si la variété ambiante est seulement supposée kählérienne.

Two examples related on a conjecture of Serge Lang

Abstract. *We describe two examples of compact complex surfaces with entire curves and try to understand the necessity of the algebraic assumption in Lang's Conjecture. For example, we show that this conjecture is not satisfied by compact Kähler manifold.*

Abridged English Version

A complex manifold M is called Brody-hyperbolic if any entire curve $f : \mathbb{C} \to M$ is a constant map. If M is Brody-hyperbolic and A is a compact torus, there is of course no non constant holomorphic mapping $F : A \to M$. In [9] S. Lang conjectures that this necessary condition is also sufficient as soon as M is a projective variety. For projective manifolds, any holomorphic map $F : A \to M$ factors through an abelian variety A' ; a positive answer to Lang's conjecture would therefore imply that the Brody-hyperbolicity is an algebraic property for projective manifolds.

Since Lang made his conjecture, several authors tried to prove it in particular examples (see [12] for example) and some of them were led to generalise this conjecture to any compact or compact kähler manifold (see [3], [12]). The goal of this note is to disprove these generalised conjectures. To do it, we provide two examples of compact surfaces showing that Lang's conjecture is not satisfied for non projective compact manifolds.

The first example is given by K3 surfaces, i.e. by simply connected compact surfaces with a nowhere vanishing holomorphic 2-forms. Theses surfaces are Kähler, but may contain no projective curve.

Theorem 1. .– *If X is a K3 surface, there exists at least one non-constant entire curve on X. But, if X contains no algebraic curve and if A is a compact torus, then each holomorphic map $F : A \to X$ is constant.*

Sketch of proof.– The first statement is a consequence of the closeness of the set of non hyperbolic compact manifold and the density of Kummer surfaces in the moduli space of K3 surfaces.

The second one follows from the following remark : If A is a compact torus and X is a K3 there is no surjective holomorphic map $F : A \to X$. To prove this, suppose that $F : A \to X$ is such a map, and consider the pull-back $F^*\Omega$ of a non vanishing holomorphic 2-form of X. Since F is onto, this 2-form is a non zero section of the trivial bundle $\Lambda^2 T^* A$; the rank of this 2-form is therefore constant $(= 2)$, which means that $dF : TA \to TX$ is everywhere onto. As a consequence, F factors through a 2-dimensional compact torus and induces a covering from this torus onto X. This contradicts the simply-connectivity of X. □

The second example are nice but non Kähler compact surfaces constructed by Inoue. Each of these examples supports a holomorphic foliation $\mathcal{F}$ satisfying :

- the leaves of $\mathcal{F}$ are biholomorphic to $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{C}^*$),
- any holomorphic curve on the surface is tangent to the foliation $\mathcal{F}$.

This shows that Inoue surfaces are counter-examples to the generalised Lang's conjecture.

Inoue surfaces are quotient of $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ by discrete subgroups of $\mathrm{Aut}(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$, and we could try to construct higher dimensional projective examples with the same properties. The last statement of this note shows that such a construction is impossible.

Theorem **2.** .– *Let D be a bounded symetric domain from $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, and M be a projective manifold whose universal covering is $D \times \mathbb{C}$. Then, the projections on M of the vertical lines $\{*\} \times \mathbb{C}$ are elliptic curves.*

The proof applies a theorem of [8] and implies the existence of a finite cover of M which is an elliptic fibration over a general type manifold.

As a conclusion, we state the following question which seems to be open and interesting : is it true that mesure-hyperbolic surfaces have general type ? In the case of projective surfaces, this follows from Bogomolov-Mumford's theorem (see [5]). The interesting cases are therefore K3 and VII_0 surfaces.

1. Introduction

Une variété complexe M est dite Brody-hyperbolique si toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to M$ est constante. En général, il est difficile de déterminer si une variété complexe donnée est Brody-hyperbolique, mais il existe toutefois quelques conditions nécessaires évidentes. Par exemple, si M est Brody-hyperbolique et A est un tore compact, toute application holomorphe $F : A \to M$ est constante. Dans [9], S. Lang conjecture que cette condition nécessaire est également suffisante lorsque M est projective. Dans ce cas, toute application $F : A \to M$ transite d'ailleurs par une variété abélienne A' ; si la réponse à la conjecture était positive on disposerait donc d'un critère d'hyperbolicité intrinsèque à la géométrie algébrique.

Par la suite, plusieurs auteurs ont généralisé cette conjecture à toute variété complexe compacte, éventuellement kählérienne (cf. [3], [12]), mais nous allons voir que cet élargissement des hypothèses est trop ambitieux. Le but de ce texte est en effet de présenter deux exemples de surfaces compactes qui montrent que la conjecture de Lang est fausse si l'on ne suppose pas la variété ambiante projective.

Le premier exemple concerne les surfaces K3 ; il s'agit donc d'un exemple de surface kählérienne pour lequel nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME **1.** .– *Toute surface K3 supporte une courbe entière non constante mais, si X est une surface K3 sans courbe algébrique, toute application holomorphe définie sur un tore et à valeurs dans X est constante.*

Viennent ensuite les surfaces de Inoue qui, par construction, s'avèrent être des contre-exemples à la conjecture de Lang généralisée. Contrairement aux surfaces K3 ces surfaces ne sont pas kählériennes, ce qui les éloigne un peu plus encore de l'hypothèse initiale de S. Lang. Par contre, nous verrons que la structure des courbes entières tracées sur ces surfaces peut être facilement analysée, ce qui permet de comprendre clairement pourquoi la conjecture est mise en défaut.

Les surfaces de Inoue sont des quotients compacts de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ et il est tentant de chercher un contre-exemple projectif à la cojecture de S. Lang en adoptant la construction de M. Inoue à $D \times \mathbb{C}$, où D est un domaine symétrique borné de $\mathbb{C}^n$. Nous montrons pour conclure (cf. théorème 2) qu'une telle stratégie est sans espoir, ce qui souligne à nouveau l'importance de l'hypothèse faite par S. Lang.

2. Courbes entières et surfaces K3

Par définition, une surface K3 est une surface complexe compacte dont le premier nombre de Betti est nul et dont le fibré canonique est trivial. Les surfaces K3 sont toutes kählériennes, simplement connexes et admettent un espace de déformation connexe de dimension 20 (cf. [11]).

Le théorème de F.A. Bogomolov et D. Mumford (cf. [10], [1]) montre que les surfaces K3 projectives supportent toutes un pinceau de courbes singulières de genre 1. En particulier, aucune d'entre elles n'est Brody-hyperbolique et elles vérifient toutes la conjecture de S. Lang. Si X est une surface K3 non projective qui contient toutefois une courbe projective, cette courbe est nécessairement rationnelle ou de genre 1 : il existe donc encore une application holomorphe non constante définie sur un tore et à valeurs dans X. Par contre, si l'on s'éloigne au maximum du monde projectif, i.e. si l'on considère une surface K3 sans courbe projective, le théorème 1 montre que cette dernière propriété disparaît alors que l'existence de courbes entières subsiste.

Nous allons maintenant établir les deux propriétés énoncées dans le théorème 1, en commençant par l'existence de courbes entières ; la démonstration s'appuiera sur l'exemple suivant.

Exemple.– Soit $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$ un tore de dimension 2, et σ l'involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Les points fixes de σ sont exactement les 16 points d'ordre 2 du groupe A. Soit A' l'éclaté de A en ces 16 points. L'involution σ s'y étend en une involution σ' qui est l'identité en restriction à chacun des diviseurs exceptionnels, n'a pas d'autre point fixe, et agit comme $z \mapsto -z$ transversalement à ces diviseurs. Le quotient $X_A = A'/\sigma'$ est donc une variété compacte lisse qui, par définition, est la surface de Kummer associée à A. C'est une surface K3 et elle contient de nombreuses courbes entières, par exemple celles déterminées par les sous-groupes à un paramètre de A et les diviseurs exceptionnels de A'.

Démonstration pour l'existence de courbes entières.– Les surfaces de Kummer sont denses dans l'espace des surfaces K3 (cf. [11]). Si X est une surface K3, il existe donc un espace analytique lisse $\mathbb{X}$ et une fibration $\pi : \mathbb{X} \to B$ sur la boule unité de $\mathbb{C}^{20}$ telle que :

• Chacune des fibres de π est une surface K3 et $\pi^{-1}\{0\} = X$.

• Il existe une suite (z_i) de points de B tendant vers 0 telle que les fibres $X_i := \pi^{-1}\{z_i\}$ sont des surfaces de Kummer.

Soit h une métrique hermitienne sur $\mathbb{X}$. Puisque chaque surface de Kummer X_i contient une courbe entière, le lemme de Brody assure l'existence d'une suite d'applications holomorphes $f_i : \mathbb{C} \to X_i$

vérifiant

$$\begin{aligned} \|f_i'(0)\|_h &= 1 && (1) \\ \|f_i'(z)\|_h &\leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} && (2) \end{aligned}$$

où la norme de f_i' est calculée par rapport à h et à la métrique euclidienne standard de $\mathbb{C}$. La compacité de $\mathbb{X}$ et le théorème de Montel permettent alors d'extraire une sous-suite convergente de la suite (f_i). La limite $f : \mathbb{C} \to \mathbb{X}$ vérifie $\|f'(0)\|_h = 1$ et n'est donc pas constante. Puisque chaque f_i est verticale, f l'est aussi, et puisque z_i tend vers 0, f est contenue dans X. Ceci achève la preuve de la première assertion du théorème 1. □

Remarque 1.– 1. Cette première partie du théorème et sa preuve sont classiques et ne surprendront personne. On trouve d'ailleurs déjà et l'énoncé et la preuve dans [2]. Nous avons donné les détails pour la commodité du lecteur.

2. Cette démonstration ne montre pas que chaque vecteur tangent à X est tangent à une courbe entière. Bien que vérifiée sur les surfaces de Kummer, cette propriété ne passe pas directement à la limite : on perd de l'information en utilisant le lemme de Brody. Par exemple, si $f : \mathbb{C} \to A$ est un groupe à un paramêtre du tore A, et $\overline{f}$ est l'appliction induite sur X_A, les reparamétrisations de Brody associées à $\overline{f}$ sont contenues dans les diviseurs provenant de l'éclatement de A.

Démonstration de l'absence de tores.– Soit X une surface K3 ne contenant aucune courbe algébrique, A un tore de dimension $n \geq 1$ et $F : A \to X$ une application holomorphe supposée non constante. Puisque X ne contient pas de courbe, n est supérieur ou égal à 2 et F est surjective. Il existe donc au moins un point m de A en lequel la différentielle de F est de rang 2.

Puisque le fibré canonique d'une surface K3 est trivial, on peut fixer une 2-forme holomorphe Ω sur X qui ne s'annule pas. L'image réciproque de Ω par F est alors une section non nulle du fibré trivial $\Lambda^2(T^*A)$. Le rang de $F^*\Omega$ est alors constant, égal à 2 comme au point m : le théorème du rang constant permet ainsi d'affirmer que F est une fibration.

Soit $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{C}^*)^n$ le relevé de $F^*\Omega$ à $\mathbb{C}^n$ et V le noyau de ω. C'est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de codimension 2, et les sous-espaces affines qui lui sont parallèles se projettent sur A en revêtant les fibres de F. Les fibres de F sont donc des tores et F passe au quotient sur un tore A' de dimension 2 dont le revêtement universel s'identifie à $\mathbb{C}^n/V$.

Nous pouvons donc en fait supposer que A est de dimension 2. Dans ce cas, F est un revêtement de X, ce qui est impossible car les surfaces K3 sont simplement connexes. Le théorème 1 est démontré □

Cette preuve montre aussi que toute application holomorphe surjective $f : X \to X$, où X est une surface K3, est en fait un automorphisme de la surface. On peut également considérer le cas où X est une variété simplement connexe de dimension quelconque dont le fibré canonique est trivial : le même résultat reste valable.

3. Exemples de type Inoue

Ce deuxième paragraphe est consacré aux variétés de type "surfaces de Inoue". Une surface de Inoue S est une surface complexe compacte dont le premier nombre de Betti est égal à 1 et dont le revêtement universel est biholomorphe au produit du disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ par la droite complexe $\mathbb{C}$. De manière équivalente, une surface de Inoue est un quotient compact lisse de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ dans lequel les verticales $\{*\} \times \mathbb{C}$ ont une image non compacte. La construction explicite de toutes les surfaces de Inoue se trouve dans [6].

Le feuilletage vertical de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ étant invariant par tout automorphisme de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$, les surfaces de Inoue sont munies d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont biholomorphes à $\mathbb{C}$ ou

$\mathbb{C}^*$. Chaque surface de Inoue fibre en tores réels de dimension 3 sur le cercle. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont chacunes contenues dans l'un de ces tores et y déterminent des feuilletages linéaires.

Toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to S$ à valeurs dans une surface de Inoue se relève à $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$: le théorème de Liouville montre donc que toute courbe entière tracée sur S est tangente au feuilletage $\mathcal{F}$. Si cette courbe entière n'est pas constante, son adhérence dans S est donc un tore réel de dimension 3. En particulier, si A est un tore complexe, toute application holomorphe $F : A \to S$ est constante. Les surfaces de Inoue sont donc des contre-exemples à la conjecture de S. Lang généralisée.

Les courbes entières tracées sur ces surfaces sont toutefois contenues dans des tores, mais des tores réels de dimension 3 ...

Remarque 2.– La distance de Kobayashi entre deux points d'une surface de Inoue est proportionnelle à la distance de leurs projections sur le cercle. En particulier, les surfaces de Inoue ont un diamêtre de Kobayashi strictement positif. Nous ne connaissons pas d'autre surface compacte dont le diamêtre de Kobayashi est strictement positif et dont la dimension de Kodaira est $-\infty$.

Une stratégie pour trouver un contre-exemple à la conjecture initiale de S. Lang pourrait être de construire un quotient projectif du produit $B_n \times \mathbb{C}$, B_n étant la boule unité de $\mathbb{C}^n$, dans lequel les verticales $\{*\} \times \mathbb{C}$ se projettent injectivement. Le théorème suivant montre que ceci est impossible.

Théorème **2.** .– *Soit D un domaine symétrique borné de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, et M une variété projective dont le revêtement universel coïncide avec $D \times \mathbb{C}$. La projection sur M de toute verticale $\{*\} \times \mathbb{C}$ est alors une courbe elliptique.*

Remarque 3.– Ce résultat permet de démontrer après coup que M admet un revêtement fini M' dont le premier nombre de Betti est srictement positif. Si l'on pouvait montrer directement ce corollaire, on disposerait de l'application d'Albanese et la preuve pourrait être simplifiée. Il serait intéressant d'établir une telle existence de premier nombre de Betti virtuel pour tout quotient compact de $D \times \mathbb{C}$.

Démonstration. – Il existe un sous-groupe discret cocompact Γ de $\mathrm{Aut}(D \times \mathbb{C})$ tel que M soit isomorphe à $(D \times \mathbb{C})/\Gamma$. Puisque tout automorphisme de $D \times \mathbb{C}$ permute les verticales on obtient une représentation $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D)$ du groupe fondamental de M dans le groupe linéaire $\mathrm{Aut}(D)$.

Le noyau Γ_0 de cette représentation agit discrètement sur chaque verticale $\{*\} \times \mathbb{C}$. Ce noyau contient donc un sous-groupe d'indice fini qui est soit trivial, soit isomorphe à $\mathbb{Z}$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Dans le troisième cas, chaque verticale passe au quotient en une courbe elliptique et il n'y a plus rien à démontrer. Lorsque ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$, on peut commencer par quotienter $D \times \mathbb{C}$ par Γ_0 : M est donc revétue par $D \times \mathbb{C}^*$. Le groupe d'automorphismes de $D \times \mathbb{C}^*$ préserve le champ de vecteurs vertical $z\partial_z$ ce qui permet de munir M d'un champ de vecteurs holomorphe dont les orbites sont les projections des verticales $\{*\} \times \mathbb{C}$. Tout autre champ de vecteurs est proportionnel à ce dernier, et M est kählérienne ; les orbites de ce champ sont donc compactes (cf. [4]) et la conclusion du théorème est alors établie.

On peut donc dorénavant supposer que Γ_0 est fini et, en fait, que Γ_0 est trivial, car son action sur les verticales est sans point fixe. La représentation $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D)$ est alors une représentation injective du groupe fondamental de M dans un groupe linéaire. Puisque le revêtement universel de M est un espace de Stein, son groupe fondamental est "large" au sens de J. Kollar (cf. [8]). On peut donc appliquer le théorème 3.5 de [8] (voir aussi [7]) affirmant qu'une variété projective dont le groupe fondamental est large et se plonge dans un groupe linéaire admet un revêtement fini qui fibre en tores sur une variété de type général.

La variété M admet ainsi un revêtement fini qui fibre en tores sur une variété de type général. Puisqu'une variété de type général est mesure hyperbolique, toute application de $D \times \mathbb{C}$ dans une telle variété est constante le long des verticales. Les fibres de la fibration sont donc des courbes elliptiques qui coïncident avec les projections des verticales $\{*\} \times \mathbb{C}$. Le théorème 2 est maintenant démontré. $\square$

Pour conclure, nous aimerions signaler un problème ouvert qui nous semble à la fois abordable et intéressant. Dans [5], les auteurs montrent que le théorème de Bogomolov-Mumford entraîne que toute surface projective et mesure hyperbolique est de type général. Il serait intéressant d'établir le même énoncé pour toute surface compacte. Les cas intéressants sont les surfaces de type K3 et VII_0. De même, il serait agréable d'avoir une liste complète des surfaces VII_0 qui ont un diamètre de Kobayashi strictement positif (cf. Remarque 2).

Remerciements.– Nous remercions Alan T. Huckleberry et Jean-Pierre Demailly pour s'être intéressés à ce travail, ainsi que l'Université de Bochum pour son accueil durant l'élaboration et la rédaction de cette note.

Références

[1] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on elliptic K3 surfaces. *preprint*, 1999.

[2] Frédéric Campana. An application of twistor theory to the non-hyperbolicity of certain compact symplectic kaehler manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, pages 1–7, 1992.

[3] Jean-Pierre Demailly. Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials. In *Kollar, Janos (ed.) et al., Algebraic geometry. Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, Providence*, volume 425, pages 285–360. 1995.

[4] Akira Fujiki. On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 44(3):225–258, 1978.

[5] Mark Green and Phillip Griffiths. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In *Differential geometry, Proc. int. Chern Symp., Berkeley 1979*, pages 41–74.

[6] Masahisa Inoue. On surfaces of class VII_0. *Invent. Math.*, 24:269–310, 1974.

[7] L. Katzarkov and M. Ramachandran. On the universal coverings of algebraic surfaces. *Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 31, No.4*, pages 525–535, 1998.

[8] Ludmil Katzarkov. On the shafarevich maps. In *Kollar, Janos (ed.) et al., Algebraic geometry. Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, Providence*, pages 173–216. 1995.

[9] Serge Lang. *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[10] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. In *Algebraic geometry, Proc. Jap.-Fr. Conf., Tokyo and Kyoto 1982, Lect. Notes Math. 1016*, pages 334–353. 1983.

[11] Séminaire Palaiseau. *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes.* Astérisque, 126, 1985.

[12] Joerg Winkelman. *Compact Complex Parallelisable Manifolds.* S.M.F., 1999.