Rubrique

Dynamique Diophantienne

Comme souvent, un problème de nature arithmétique mène à des questions qui relèvent des systèmes dynamiques. Il s'agit de décrire les trajectoires de transformations polynomiales sur l'espace des solutions de certaines équations algébriques.

Géométrie diophantienne et dynamique

La géométrie diophantienne s'attache à décrire les solutions en nombres entiers d'équations polynomiales. L'exemple le plus connu est l'équation de Pierre de Fermat

$$x^n + y^n = z^n,$$

n étant un entier positif fixé, x, y et z étant les inconnues. Lorsque n vaut 2, l'équation correspond à la relation de Pythagore pour les côtés d'un triangle rectangle ; il existe alors une infinité de solutions, notamment

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2,$$

où p et q parcourent l'ensemble des nombres entiers. Par contre, lorsque n est supérieur ou égal à 3, Andrew Wiles a récemment démontré qu'il n'existe aucune solution en nombres entiers strictement positifs. Un deuxième exemple, moins médiatique mais tout aussi important, est fourni par l'équation d'Andreï A. Markov

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Là encore, il existe une infinité de solutions en nombres entiers. Le triplet $(1,1,1)$ est une solution évidente et A. A. Markov a montré que toutes les autres s'obtiennent à partir de cette solution particulière en appliquant les trois transformations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha(x,y,z) & = & (3yz - x, y, z) \\ \beta(x,y,z) & = & (x, 3zx - y, z) \\ \gamma(x,y,z) & = & (x, y, 3xy - z) \end{array} \right. .$$

En guise d'illustration, appliquons successivement les transformations α, β et γ et itérons ce procédé deux fois. La solution obtenue est

$$(433, 37666, 48928105).$$

Une partie importante des équations polynomiales qui possèdent une infinité de solutions entières relèvent de la même philosophie que l'équation de Markov : des transformations polynomiales (analogues à α, β et γ) produisent une infinité de solutions à partir d'une seule. Le lecteur curieux (ou savant) pourra d'ailleurs s'assurer que les triplets pythagoriciens entrent dans ce cadre. Pour ce type d'équations, l'arithmétique rejoint la dynamique : comprendre la structure des solutions entières de l'équation revient, en partie, à décrire l'action des transformations polynomiales. C'est cette relation entre dynamique et arithmétique que nous voulons illustrer ici. Des constructions de nature arithmétique permettent en effet d'obtenir des résultats sur la dynamique.

Dans la suite, nous emploierons le vocabulaire géométrique présenté dans l'encart ci-contre intitulé *variétés projectives*. La variété étudiée sera projective et l'étude de ses points entiers sera donc équivalente à celle de ses points rationnels. La surface définie par l'équation de Markov n'entre pas dans ce cadre et nous donnerons des énoncés spécifiques à son cas.

Variétés projectives

Par définition, l'ensemble des solutions $(x_0, ..., x_k)$ d'un système d'équations polynomiales est une variété algébrique *(*affine*) et chaque solution est un* point *de la variété. En fait, une équation donne simultanément naissance à plusieurs variétés suivant que l'on considère les solutions en nombres entiers, rationnels, réels, complexes, ... Nous préciserons en indice l'espace dans lequel varient les solutions qui nous intéressent, par exemple $V_{\mathbf{C}}$ pour les points complexes de la variété V. Lorsque les équations qui déterminent la variété V sont homogènes, tout point $(x, y, ...)$ de V est associé à une infinité de solutions $(ax, ay, ...)$ où a varie dans $\mathbf{Z}$ (ou dans $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, ...). Autrement dit, si m est un point de V, la droite joignant l'origine à m est contenue dans V. L'objet naturel est donc l'ensemble des droites passant par l'origine et contenues dans V. Il s'agit d'une partie de l'*espace projectif *(l'espace de toutes les droites vectorielles) ; on parle donc de* variété projective. *Les coordonnées $[x : y : ...]$ d'un point de l'espace projectif $\mathbf{P}^k$ sont déterminées à un facteur multiplicatif "a" près. Un point à coordonnées rationnelles est donc équivalent à un point à coordonnées entières : il suffit de multiplier chaque coordonnée par le produit de leurs dénominateurs.*

Compter les points, et les itérer

Les variétés projectives qui possèdent une infinité de points rationnels en possèdent une quantité dénombrable. En ce sens, elles ont toutes exactement le même nombre de points. Certaines en ont cependant plus que d'autres et, pour s'en convaincre, nous allons les compter.

Chaque point rationnel m de l'espace projectif peut être représenté par des coordonnées entières sans facteur premier commun. Il y a exactement deux écritures de ce type, $[x : y : ...]$ et $[-x : -y : ...]$, ce qui permet de définir la *hauteur* (*multiplicative*) de m par la formule

$$H(m) = \max(|x|, |y|, ...)$$

et sa *hauteur logarithmique* (ou *additive*) $h(m) = \log(H(m))$. Si V est une variété projective, le nombre de points de $V_{\mathbf{Z}}$ dont la hauteur multiplicative est plus petite que B est noté $N_V(B)$. Ceci définit la *fonction de comptage* de $V_{\mathbf{Z}}$. Lorsque $V_{\mathbf{Z}}$ possède une infinité de points, cette fonction croît avec B jusqu'à l'infini. Plus cette croissance est rapide, plus il y a de points rationnels.

L'exemple le plus simple est celui de l'espace projectif $V = \mathbf{P}^k$. En notant $\zeta(q)$ la somme des inverses des puissances q^{emes} des nombres entiers positifs, Stephen H. Schanuel a montré que

$$N_{\mathbf{P}^k}(B) \simeq \frac{2^k}{\zeta(k+1)} B^{k+1}$$

avec une erreur majorée par B^k (ou $B\log(B)$ si $k = 1$). Pour la surface de Markov M, le dénombrement des points entiers de hauteur plus petite que B a été effectué par Don Zagier,

$$N_M(B) \simeq \gamma \log^2(3B), \text{ où } \gamma \simeq 0.18$$

avec une erreur majorée par $\log(B)\log(\log(B))$. Des conjectures précises relatives au comportement asymptotique de la fonction de comptage $N_V(B)$ ont été formulées par Victor V. Batyrev, Yuri I. Manin et Emmanuel Peyre lorsque la géométrie de V ressemble à celle de l'espace projectif, c'est-à-dire, en termes techniques, lorsque le fibré canonique de V est suffisament négatif.

Revenons maintenant aux variétés projectives dont les points rationnels sont permutés par une transformation $f : V \to V$ qui est polynomiale. Le décompte des points rationnels de V peut alors être scindé en deux calculs distincts : compter le nombre de trajectoires de f et évaluer la hauteur des points le long de chaque trajectoire m, $f(m)$, $f(f(m))$ ... Concentrons nous sur cette deuxième étape, car c'est elle qui nous conduira à des questions intéressantes de systèmes dynamiques. Nous avons déjà vu un exemple au premier paragraphe avec la transformation $f = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ sur la surface de Markov : le point $(1, 1, 1)$, de hauteur égale à 1, s'élève à la hauteur

$$H(f^3(1, 1, 1)) = 48928105$$

après 2 itérations et à la hauteur approximative $35\,.10^{47200}$ après seulement 8 itérations.

Afin d'énoncer des résultats précis, nous allons maintenant décrire ce qui se produit pour les exemples de l'encadré 1 et de l'encadré 2. Il y a une différence essentielle entre ces deux exemples : la transformation f de l'encadré 1 est inversible, c'est-à-dire que tout point m est l'image par f d'un unique point $f^{-1}(m)$, la transformation g ne l'est pas. Les constructions valables pour f et g le seront donc pour f^{-1}. La dynamique de ces transformations est très riche. La première façon de mesurer cette complexité est de regarder la suite des degrés des polynômes obtenus en itérant ces transformations. Pour cela, nous noterons λ_F le nombre positif réel

$$\lambda_F = \limsup_{n\to\infty} \{\mathsf{deg}(F^n)^{1/n}\},$$

F étant f, f^{-1} ou g et $\mathsf{deg}(\mathsf{F}^n)$ désignant le degré des polynômes qui définissent la transformation F^n. Il se trouve que, sur ces exemples, λ_F est strictement plus grand que 1 (voir les deux encadrés).

Une astuce classique introduite par André Néron et John Tate dans ce cadre permet d'évaluer la hauteur le long des trajectoires : on change la fonction de hauteur pour l'adapter à la dynamique. En pratique, il s'agit de poser

$$h^+(m) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\lambda_F)^n} h(F^n(m)) \right)$$

où F doit être remplacée par f ou g. Puisque f est inversible, F peut également être remplacée par f^{-1} ce qui définit une seconde hauteur h^-. Ces nouvelles fonctions de hauteur vérifient l'équation fonctionnelle $h^+ \circ F = \lambda_F h^+$; en particulier, le long d'une trajectoire on obtient

$$h^+(F^n(m)) = (\lambda_F)^n h^+(m).$$

Gregory S. Call et Joseph H. Silverman ont montré que ces hauteurs adaptées à la dynamique sont bien définies et permettent de retrouver l'essentiel de la hauteur usuelle h. Ainsi, dans le cas de f, la différence entre h et la somme $h^+ + h^-$ est bornée. Le long des trajectoires infinies de f, $h(f^n(m))$ croît donc comme $(\lambda_f)^n$.

Le second point important est que h^+ est nulle précisément sur les points rationnels qui ont une orbite finie. Une relation intéressante apparaît donc entre arithmétique et dynamique. Nous allons maintenant décrire une application bien plus délicate de ces hauteurs mais, auparavant, expliquons la signification dynamique du nombre λ_F.

Encadré 1

Surfaces triplement de degré 2

Reprenons les notations de l'introduction concernant la surface de Markov, munie des trois involutions α, β *et* γ. *L'équation de cette surface est*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Nous noterons M *la partie de cette surface constituée des points dont toutes les coordonnées sont positives. On peut paramétrer* M *par l'intérieur d'un triangle : si* (u, v, w) *sont les coordonnées barycentriques d'un point du triangle, l'élément de la surface de Markov est* $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ *où* $\Delta = (u^2 + v^2 + w^2)/(3uvw)$. *Ce changement de variables permet donc de visualiser la dynamique des transformations* α, β *et* γ *en faisant des dessins dans un triangle.*

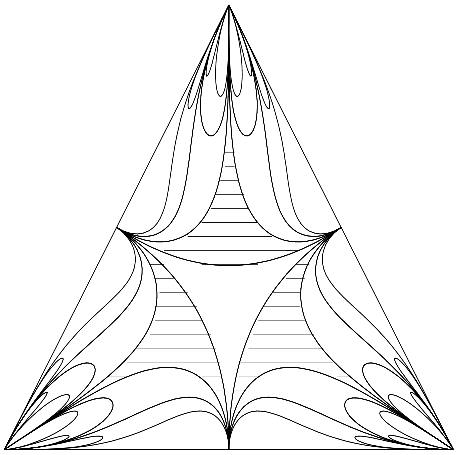

***Figure** 1* – (réalisée par Benoit Kloeckner) Les trois involutions envoient le « pavé » central délimité par trois arcs de cercles sur les trois zones hachurées adjacentes ; en composant successivement ces involutions entre elles, ce « pavé » engendre ainsi un pavage biscornu du triangle.

Voici maintenant une façon de déformer l'exemple de Markov pour obtenir une dynamique compliquée sur des surfaces algébriques réelles. Soit $P(x, y, z)$ *un polynôme en trois variables dont le degré par rapport à chacune des variables est égal à* 2. *Autrement dit, lorsque l'on fixe deux des variables, on obtient un polynôme de degré* 2 *par rapport à la variable restante. Notons* $S_0(P)$ *la variété associée à l'équation* P, *et considérons son adhérence (compacte)* $S(P)$ *dans* $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. *Ceci détermine une surface projective, car* $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ *est une variété projective. Nous supposerons que cette surface est lisse. Ce n'est pas une hypothèse anodine ; elle est vérifiée pour la plupart des polynômes* P *mais ne l'est pas pour la surface de Markov.*

Puisque le degré de P *par rapport à* x *est égal à* 2, *chaque point* (x, y, z) *est associé à un second,* $\alpha(x, y, z) = (x', y, z)$, *où* x' *est la seconde solution de* P *lorsque* y *et* z *sont fixés. Ceci détermine une transformation polynomiale de* S *qui est involutive :* $\alpha \circ \alpha = id_S$. *De même, en privilégiant respectivement* y *et* z, *on définit deux autres involutions* β *et* γ. *Par composition,* α, β *et* γ *engendrent un groupe de transformations polynomiales de* S. *Lorsque les coefficients de* P *sont rationnels, ces transformations polynomiales sont définies par des polynômes à coefficients rationnels : elles permutent donc les points de* $S(P)_{\mathbf{Q}}$.

Nous noterons f *la transformation obtenue en composant successivement les trois involutions :*

$$f = \alpha \circ \beta \circ \gamma.$$

La dynamique de cette transformation est extrèmement complexe, comme on peut le voir sur la figure suivante :

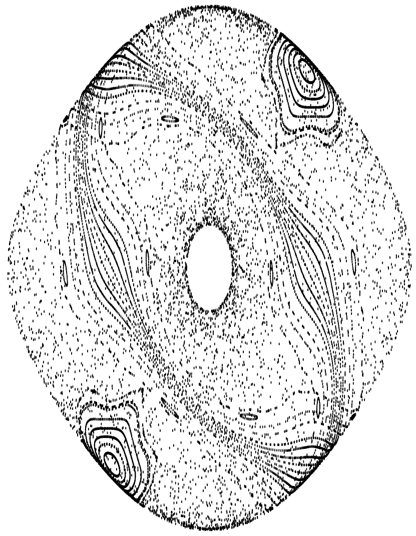

***Figure** 2* – Plusieurs orbites (réelles) pour la transformation f. Sur cet exemple, le polynôme P est à coefficients rationnels et nous avons tracé des orbites de points réels. La surface $S_{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à un tore. Les orbites ont été tracées en entier (certaines passent donc du côté "caché" de la surface).

Une façon de mettre en évidence la complexité de cette dynamique est de regarder les polynômes qui définissent les transformations f^n, $n = 1, 2, \ldots$ *Il se trouve que leur degré croît comme* $(9 + 4\sqrt{5})^n$. *Ce nombre* $\lambda_f = 9 + 4\sqrt{5}$ *joue un rôle crucial dans l'étude des propriétés dynamiques de* f *(voir le corps du texte).*

Le facteur λ_F donne l'entropie

Lorsqu'on dispose d'un système dynamique un tant soit peu compliqué, il est illusoire de vouloir décrire l'évolution de toutes les trajectoires. La première stratégie est alors de décrire les orbites les plus simples, à savoir les orbites périodiques. La seconde consiste à adopter un point de vue probabiliste ; il s'agit de décrire le comportement asymptotique de presque toute trajectoire. En ce qui nous concerne, les deux points de vue vont se rejoindre.

Avant toute chose, il convient d'interpréter en termes dynamiques le coefficient λ_F qui décrivait l'évolution de la hauteur le long d'une trajectoire. Définissons pour cela l'*entropie topologique* de la transformation F. Soit ϵ un nombre réel, strictement positif mais très petit ; ce nombre représente la précision à laquelle nous observons le système, plus ϵ est petit plus la précision est grande. Pour tout entier positif n, notons $T(n,\epsilon)$ le nombre maximum de trajectoires de longueur n qui peuvent être distinguées à la précision ϵ : les trajectoires des points m_1 et m_2 sont discernables s'il existe un instant k compris entre 0 et n pour lequel $F^k(m_1)$ et $F^k(m_2)$ sont à une distance supérieure à ϵ. En général, la suite $T(n,\epsilon)$ croît exponentiellement vite avec n. On pose donc

$$\mathrm{h}_\epsilon(F) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(T(n,\epsilon))\right)$$

et l'on définit l'*entropie topologique* $\mathrm{h}_{top}(F)$ en prenant la limite de $\mathrm{h}_\epsilon(F)$ lorsque la précision devient infiniment grande (*i.e.* ϵ tend vers 0). L'entropie topologique mesure donc le « nombre asymptotique de trajectoires distinctes ».

Lorsque F coïncide avec l'une des transformations f ou g des encadrés 1 et 2, les travaux de Yosi Yomdin et Mickael Gromov montrent que l'entropie est égale au logarithme du nombre λ_F :

$$\mathrm{h}_{top}(F) = \log(\lambda_F)$$

(F étant une transformation de $V_{\mathbf{C}}$). En d'autres termes, prenez un point entier, itérez le et regardez à quelle vitesse ses coordonnées tendent vers l'infini, vous obtenez alors le « nombre asymptotique de trajectoires » de F.

Dans les cas qui nous préoccupent, l'entropie topologique est strictement positive, car λ_F est strictement supérieur à 1. La dynamique est donc très riche, en particulier F possède une infinité de points périodiques hyperboliques (si $F=f$) ou répulsifs (si $F=g$). C'est pour comprendre la répartition de ces points périodiques que les hauteurs adaptées vont être utiles. Pour cela, il est nécessaire de séparer la hauteur h^+ construite au deuxième paragraphe en une somme de *hauteurs locales* h^+_p ...

Points périodiques.

Un point m est dit périodique s'il existe un entier k strictement positif tel que $F^k(m)=m$. Le plus petit entier k qui convient s'appelle la période de m.

Le point est de type hyperbolique si le module des valeurs propres de la différentielle de F^k au point m sont, pour une part, strictement plus grands que 1 et, pour une autre part, strictement plus petits que 1. Le point est répulsif si tous les modules des valeurs propres sont plus grands que 1.

La formule du produit

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et p un élément de $\mathcal{P}$. Si q est un nombre entier, sa valuation p-adique $v_p(q)$ est définie comme le plus grand nombre entier positif k tel que p^k divise q. Ainsi,

$$q = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(q)}. \qquad (1)$$

Nous utiliserons également la norme p-adique $\| q \|_p = (1/p)^{v_p(q)}$. Cette norme est égale à 1 si p ne divise pas q et est d'autant plus petite que p divise q. Les entiers p-adiques sont définis en complétant $\mathbf{Z}$ relativement à cette norme. Autrement dit, on adjoint aux entiers les limites de suites qui convergent dans la norme p-adique, par exemple le nombre 3-adique

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+3^2+3^4+\ldots+3^{2^n}\right).$$

Les nombres réels peuvent être introduits de manière analogue en complétant les nombres rationnels pour la valeur absolue usuelle, à savoir $\|q\|_\infty = |q|$. Lorsqu'une variété V est définie par des équations à coefficients entiers, on peut donc la considérer alternativement comme une variété sur les réels $V_{\mathbf{R}}$ ou sur les p-adiques $V_{\mathbf{Q}_p}$.

Dans le contexte simple où nous nous plaçons, la *formule du produit* consiste à évaluer la valeur absolue d'un entier q à l'aide de la formule de décomposition en facteurs premiers (1) :

$$\| q \|_\infty = \prod_{p\in\mathcal{P}} (\| q \|_p)^{-1}.$$

On en déduit sans peine que la hauteur $h(m)$ d'un point $m = [x : y : \ldots]$ de l'espace projectif est une somme $h(m) = \sum_{p\in\mathcal{P}\cup\infty} h_p(m)$ de *hauteurs locales* $h_p(m)$ valant chacune

$$\max(\log(\| x \|_p), \log(\| y \|_p), \ldots).$$

De même, les hauteurs adaptées à une transformation polynomiale ont leurs analogues locaux : h^+_p, h^-_p. Chacune de ces fonctions de hauteur devrait être utile pour décrire la dynamique induite par la transformation polynomiale F sur les points p-adiques de la variété. Pour l'instant, seul le cas non arithmétique $p=\infty$ a été suffisament étudié. C'est ce que nous allons maintenant expliquer.

Hauteurs et mesure d'entropie maximale

Sur la variété complexe où a lieu la dynamique ($\mathbf{P}^k_{\mathbf{C}}$ ou $S(P)_{\mathbf{C}}$), considérons les Laplaciens de Monge-Ampère des fonctions de hauteurs adaptées

Encadré 2

endomorphismes de l'espace projectif

*L'un des premiers exemples de transformation polynomiale dont la dynamique a été étudiée en détails est celui des transformations $z \mapsto z^2 + c$ où c est un paramètre complexe. En coordonnées homogènes, on obtient une transformation polynomiale $[x : y] \mapsto [x^2 + cy^2 : y^2]$ de la droite projective $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$. Plus généralement, si les P_i, $i = 0, 1, ..., n$, sont des polynômes homogènes de même degré d qui ne s'annulent pas simultanément en dehors de l'origine, la transformation $g : [x_0 : x_1 : ... : x_n] \mapsto [P_0 : P_1 : ... : P_n]$ détermine une transformation polynomiale de $\mathbf{P}^n$. On parle d'*endomorphisme de degré *d.*
Nous supposerons toujours que le degré d est supérieur ou égal à 2. C'est bien sûr le cas de $z \mapsto z^2 + c$. Lorsqu'on itère la transformation g, on obtient une suite de transformations polynomiales de l'espace projectif, g, $g^2 = g \circ g$, ... ; le degré des polynômes homogènes qui définissent g^k est alors égal à d^k. Il y a donc une croissance exponentielle des degrés par itération.

à la dynamique :

$$\partial\overline{\partial} h^+_\infty, \quad \partial\overline{\partial} h^-_\infty.$$

Bien souvent, h^+_∞ et h^-_∞ ne sont pas différentiables et les Laplaciens $\partial\overline{\partial} h^+_\infty$ et $\partial\overline{\partial} h^-_\infty$ doivent être pris au sens des distributions, ou plus précisément au sens des courants. Cependant, les hauteurs adaptées h^+_∞ et h^-_∞ sont continues et « plurisous-harmoniques », ce qui permet de multiplier ces distributions entre elles. Lorsque $F = f$, on construit ainsi une mesure de probabilité

$$\mu_f = (\partial\overline{\partial} h^+_\infty) \wedge (\partial\overline{\partial} h^-_\infty)$$

sur la surface $S(P)_{\mathbf{C}}$ (voir l'encadré 1). Lorsque $F = g$, il faut prendre la puissance k^{eme} de $\partial\overline{\partial} h^+_\infty$ pour définir une mesure μ_g sur $\mathbf{P}^k_{\mathbf{C}}$.

Ces mesures de probabilité jouissent de propriétés dynamiques optimales. Tout d'abord, μ_F est invariante par F : si A est un ensemble mesurable et si $F^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des points de $V_{\mathbf{C}}$ dont l'image appartient à A, alors

$$\mu_F(F^{-1}(A)) = \mu_F(A).$$

En outre, μ_F est l'unique mesure d'entropie maximale et les points périodiques de F s'équirépartissent vis-à-vis de μ_F. La première de ces deux propriétés est fondamentale mais un peu technique et nous n'en parlerons pas. Que signifie la seconde ?

Pour tout entier N, notons $\mathrm{Per}_F(N)$ l'ensemble des points périodiques de F dont la période n'excède pas N et ν_N la mesure de comptage associée à cet ensemble : par définition, si A est une partie de $V_{\mathbf{C}}$, $\nu_N(A)$ est égale à la proportion de points de $\mathrm{Per}_F(N)$ situés dans A. L'équirépartition des points périodiques de F vis-à-vis de μ_F signifie que ν_N converge vers μ_F lorsque la taille des périodes N tend vers l'infini. Autrement dit, μ_F décrit la répartition asymptotique des points périodiques de F.

L'histoire ne s'arrête pas là. Au lieu de regarder le système dynamique $F : V_{\mathbf{C}} \to V_{\mathbf{C}}$ dans son ensemble, concentrons nous sur la partie qui recèle l'essentiel de la dynamique, à savoir l'adhérence des point périodiques de F. Notons X_F ce sous-ensemble de $V_{\mathbf{C}}$; il s'agit d'un espace compact invariant par F qui est muni d'une mesure de probabilité μ_F elle aussi F-invariante. Le théorème le plus frappant obtenu actuellement affirme que le système est semblable à un jeu de pîle ou face. En termes techniques, il existe un changement de variable *mesurable* $m' = \Psi(m)$, qui conjugue le triplet (X_F, μ_F, F) à un décalage de Bernoulli : quitte à négliger les ensembles de mesure nulle pour μ_F, la dynamique est donc aussi aléatoire qu'un jeu de pîle ou face.

Tous ces résultats de nature dynamique sont le fruit d'une lente progression dont les acteurs principaux sont Eric Bedford, Jean-Yves Briend, Julien Duval, Michael Lyubich, Ricardo Mañe, Nessim Sibony, John Smillie, ... et bien d'autres encore !

Conclusion

Historiquement, les fonctions de hauteurs adaptées h^+_∞ ne sont pas apparues au sein des systèmes dynamiques via leur construction arithmétique. Elles ont d'abord été introduites par des méthodes de théorie du potentiel. Les relations entre arihmétique et dynamique que nous avons décrites dans ce texte enjolivent donc un peu l'histoire et en cachent une partie importante. Si nous avons choisi cette présentation des faits, c'est pour illustrer les liens qui existent entre deux domaines a priori éloignés. De nombreuses questions à la frontière de ces domaines restent actuellement sans réponse. Nous espérons que ces liens se renforceront dans les années à venir.

POUR EN SAVOIR PLUS

Hindry (M.), Silverman (J. H.), « Diophantine Geometry, an Introduction », *Springer Verlag, GTM*, 2000.

Cerveau (D.), Ghys (É.), Sibony (N.), Yoccoz (J.-C.), « Dynamique et Géométrie complexe », *Société mathématique de France, Panoramas et Synthèse*, 1999.