

# **Systemes dynamiques polynomiaux**

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

SERGE CANTAT

---



## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Dynamique polynomiale.

Donnons nous une variété projective complexe  $M$  et une transformation  $f$  de  $M$  qui est holomorphe ou rationnelle. En itérant cette transformation, nous obtenons un système dynamique « polynomial » à temps discret : seconde après seconde, un point  $z$  de l'ensemble  $M$  se déplace en  $z_1 = f(z)$ , puis en  $z_2 = f(z_1)$ , en  $z_3 = f(z_2)$  ... Un mouvement dynamique régi suivant la règle d'évolution édictée par  $f$  se développe ainsi sur la variété  $M$ .

Voici un exemple d'une telle transformation dû à MAZUR et MCMULLEN. Considérons l'ensemble  $X(\mathbf{R})$  constitué des solutions en nombres réels de l'équation

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + 6xyz = 2.$$

L'équation est de degré 2 par rapport à la variable  $x$ . À tout point  $(x, y, z)$  de  $X(\mathbf{R})$  correspond donc un second point  $(x', y, z)$  : ceci détermine une involution de  $X(\mathbf{R})$  qui s'exprime par des fractions rationnelles en  $(x, y, z)$ ,

$$(x', y, z) = \left( -x - \frac{6yz}{(1 + y^2)(1 + z^2)}, y, z \right).$$

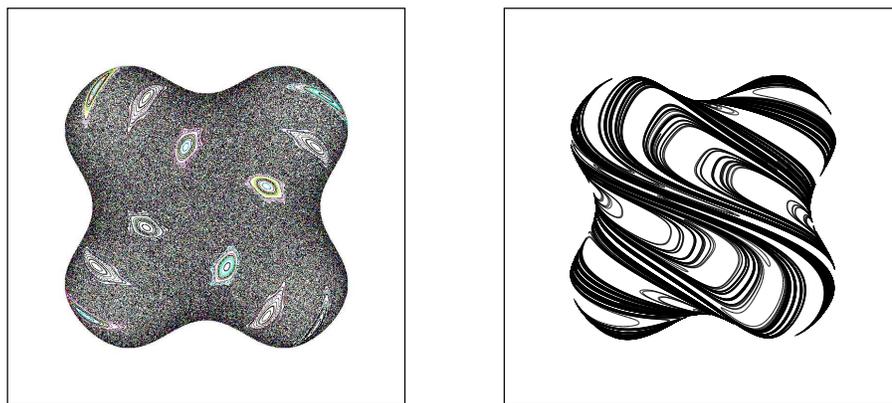


FIG. 1. Dynamique sur une surface. La figure de gauche représente les orbites de quelques points pour un difféomorphisme polynomial d'une surface algébrique réelle. Celle de droite représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de ce difféomorphisme.

Cette remarque vaut aussi pour la variable  $y$  ou la variable  $z$  et la transformation rationnelle obtenue par composition des trois involutions ainsi construites détermine un difféomorphisme  $f$  de la surface  $X(\mathbf{R})$ . Sur la figure 1, nous avons représenté les orbites  $\{z, f(z), \dots\}$  de deux mille points de  $X(\mathbf{R})$  en itérant  $f$  mille fois pour chaque point. On distingue plusieurs types d'orbites : certaines semblent remplir un ouvert de  $X(\mathbf{R})$  tandis que d'autres restent confinées sur des courbes fermées.

Les travaux que je mène concernent l'étude de ce type de systèmes dynamiques, notamment lorsque la transformation  $f$  est inversible. Ils portent sur les trois problèmes suivants : l'existence de telles dynamiques polynomiales, l'étude de leurs propriétés stochastiques et la classification des systèmes dynamiques polynomiaux les plus réguliers. Le but de ce mémoire est de présenter les résultats auxquels je suis parvenu dans ces trois thèmes de recherche.

## 1.2. Transformations rationnelles et géométrie complexe.

Le premier chapitre de ce texte relève essentiellement du domaine de la géométrie algébrique complexe. Nous chercherons des conditions portant sur une variété projective  $M$  permettant d'assurer ou d'exclure l'existence de transformations rationnelles  $f : M \dashrightarrow M$  qui donnent naissance à une dynamique chaotique sur  $M$ . La présence de telles transformations impose des contraintes fortes à la géométrie (algébrique et analytique) de  $M$ .

Les objets géométriques classiques vivant sur toute variété projective, comme la fibration pluricanonique de KODAIRA-ITAKA ou la fibration d'ALBANESE, sont bien sûr invariants par toute transformation rationnelle dominante de  $M$ . Si  $M$  possède une transformation rationnelle dont la dynamique est suffisamment riche, ces objets sont triviaux. C'est ce que nous expliquerons dans la partie 2. Ceci permet de classer les variétés de petite dimension ou les hypersurfaces de l'espace projectif  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  avec un endomorphisme holomorphe dont le degré topologique est strictement supérieur à 1. Nous verrons par exemple le théorème suivant, dû à BEAUVILLE : *si  $M$  est une hypersurface lisse de dimension supérieure ou égale à trois dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  qui n'est pas un hyperplan, alors  $M$  ne possède aucun endomorphisme holomorphe de degré strictement supérieur à 1.* Un second exemple instructif est celui des variétés homogènes compactes. Dans ce cas, le groupe des difféomorphismes holomorphes agit

transitivement sur la variété et celle-ci possède donc de nombreuses transformations holomorphes. Nous verrons par contre, dans ce contexte, que les endomorphismes de degré strictement supérieur à 1 proviennent uniquement des endomorphismes des espaces projectifs et des nilvariétés (voir le paragraphe 2.4.3).

Nous pouvons donc retenir comme principe général que les variétés projectives complexes ayant une dynamique polynomiale riche sont rares. De surcroît, lorsqu'une variété projective est susceptible d'admettre un tel système dynamique, il est difficile de déterminer précisément l'ensemble de ses transformations holomorphes ou rationnelles. Nous verrons par exemple que, à l'heure actuelle, on ne sait pas déterminer les surfaces dont le groupe des difféomorphismes holomorphes contient un groupe libre non abélien, ni celles qui possèdent une transformation rationnelle dominante non inversible.

Le merveilleux dans cette affaire réside dans la richesse des exemples dont on dispose. Leurs propriétés dynamiques sont remarquables et peuvent parfois être utilisées pour confirmer, dans des cas simples, certaines conjectures portant sur la géométrie de la variété  $M$ . Nous avons donc saisi l'occasion d'écrire ce texte pour y regrouper quelques exemples actuellement éparpillés dans la littérature (voir la partie 3). Ceci permettra d'exhiber des transformations rationnelles sur des variétés pour lesquelles il est difficile d'en construire, mais aussi de présenter des transformations rationnelles avec des propriétés dynamiques particulières.

Nous terminons le premier chapitre par le résultat principal que nous avons obtenu sur ce thème. Il s'agit de comprendre les groupes d'automorphismes, *i.e.* de difféomorphismes holomorphes, des variétés projectives complexes en les comparant aux groupes les mieux connus, les groupes linéaires. Nous avons résolu la conjecture de ZIMMER dans ce contexte, ce qui donne l'énoncé suivant : *soit  $M$  une variété kählérienne compacte ; soient  $G$  un groupe de LIE réel connexe et simple et  $\Gamma$  un réseau de  $G$  ; si le rang réel de  $G$  est strictement supérieur à la dimension complexe de  $M$ , tout morphisme de  $\Gamma$  dans le groupe des automorphismes de  $M$  a une image finie.* Par exemple, le groupe  $SL(n, \mathbf{Z})$  n'agit pas holomorphiquement sur une variété kählérienne compacte de dimension strictement inférieure à  $n - 1$ .

### 1.3. Dynamique et rigidité.

Dans la partie 5, nous décrivons succinctement quelques résultats concernant la dynamique des transformations rationnelles des variétés projectives en mettant l'accent sur les propriétés stochastiques les plus abouties : la théorie ergodique, notamment la théorie de PESIN, s'y mélange à la théorie du potentiel et permet, dans les cas les plus favorables, de construire l'unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale ou de décrire la répartition des points périodiques de la transformation étudiée.

Nous avons choisi de nous limiter aux deux situations les mieux comprises. Nous présentons donc tout d'abord les résultats obtenus par BRIEND et DUVAL puis GUEDJ, DINH et SIBONY portant sur les transformations rationnelles des variétés kählériennes compactes qui sont « cohomologiquement dilatantes » : ce sont, grosso modo, les transformations  $f$  pour lesquelles le degré topologique majore strictement les autres valeurs propres de l'action de  $f$  sur la cohomologie de  $M$ . Ensuite, nous décrivons le cas des automorphismes des surfaces complexes et certains des résultats de BEDFORD, LYUBICH et SMILLIE. Le théorème suivant montre bien le type d'énoncés aujourd'hui accessibles : *soit  $X$  une surface projective complexe (resp. le plan affine  $\mathbb{C}^2$ ) et  $f$  un automorphisme de  $X$  (resp. un automorphisme polynomial du plan) dont l'entropie topologique est strictement positive ; il existe une unique mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu_f$  dont l'entropie est maximale ; cette mesure décrit la répartition des points périodiques de  $f$  et le système dynamique  $(X, f, \mu_f)$  est mesurablement conjugué à un décalage de BERNOULLI (voir [A]).*

Nous terminons la partie 5 par des exemples montrant les liens qui relient dynamique holomorphe, géométrie analytique complexe et géométrie diophantienne. Nous y verrons ainsi que l'existence de transformations rationnelles ayant une dynamique riche impose à la métrique de KOBAYASHI de dégénérer ; ceci peut être précisé de manière quantitative. Nous observerons également que la dynamique peut être utile pour décrire la répartition des points rationnels de variétés projectives définies par des équations à coefficients dans un corps de nombres. Les exemples fournis sont bien sûr un peu pauvres, mais illustrent joliment les connexions entre ces différentes branches des mathématiques.

La dernière partie mélange dynamique et géométrie : il s'agit de classer les transformations méromorphes ou holomorphes des variétés kählériennes dont la dynamique est riche et possède une certaine régularité uniforme. La grande rigidité des transformations holomorphes ou rationnelles s'y voit confirmée, puisque nous verrons qu'en imposant quelques contraintes naturelles à la dynamique il est possible de classer les transformations à conjugaison holomorphe ou rationnelle près. Ceci souligne en outre le caractère « sauvage » de la dynamique des transformations qui ne relèvent pas de ces classifications.

L'exemple le plus net est celui des difféomorphismes de type ANOSOV. Par définition, ce sont ceux qui préservent deux feuilletages partout transverses en dilatant l'un et contractant l'autre de manière uniforme. Ces difféomorphismes jouent un rôle central, de référence, au sein des systèmes dynamiques. Le résultat obtenu s'énonce ainsi : *soient  $M$  une variété projective complexe et  $f$  un automorphisme de  $M$  de type ANOSOV ; si les feuilletages stable et instable de  $f$  sont holomorphes,  $M$  est revêtue par un tore et  $f$  provient d'un automorphisme linéaire de ce tore.*

Pour les surfaces projectives complexes, il est même possible de décrire tous les feuilletages dont le groupe de symétries birationnelles est infini. Ces résultats seront complétés par l'étude des transformations rationnelles dont les points périodiques s'équirépartissent vers une mesure qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE.

#### 1.4. Remarques.

Nous avons décidé de concentrer notre attention sur les liens entre géométrie algébrique complexe et dynamique holomorphe, en essayant d'être clair pour les deux communautés mathématiques concernées et en privilégiant les exemples. Des énoncés très techniques suivent donc parfois de près des définitions qui paraîtront bien élémentaires à certains.

Les exemples de référence que nous avons choisis sont les systèmes dynamiques des variétés réelles compactes les mieux compris : difféomorphismes de type ANOSOV et endomorphismes dilatants. Nous comparerons donc les systèmes dynamiques holomorphes ou rationnels étudiés à ces deux exemples. Un autre choix consiste à confronter les résultats de dynamique à plusieurs variables à ceux valables pour les endomorphismes

de la sphère de RIEMANN (pour cette approche, voir [91], [88], [104], [106] et les références qui s'y trouvent).

L'objet de ce texte étant de présenter nos travaux, nous avons dû faire l'impasse sur de nombreux points importants, notamment sur les rapports entre théorie ergodique et théorie du potentiel ou sur la dynamique des correspondances.

Ce texte ne contient pas de résultats vraiment nouveaux, mais certains des énoncés sont difficiles à localiser dans la littérature, notamment ceux qui concernent les groupes d'automorphismes des variétés kählériennes ou projectives, paragraphe 4.2, ou les applications géométriques du paragraphe 5.4.

## Premier chapitre

### Transformations holomorphes et rationnelles des variétés projectives.

Dans cette première partie nous décrivons les acteurs principaux de ce texte : les variétés projectives complexes et les transformations holomorphes ou rationnelles de ces variétés dont la dynamique est riche. À côté d'exemples intéressants encore bien mal compris, nous verrons qu'il est difficile de construire une telle transformation et a fortiori un groupe de telles transformations sur une variété projective donnée.

#### *Transformations holomorphes et rationnelles.*

Dans la suite, les variétés considérées seront supposées lisses et connexes, sauf mention explicite du contraire. Si  $M$  est une variété complexe compacte, nous noterons  $\text{Aut}(M)$  le groupe de ses automorphismes, *i.e.* de ses difféomorphismes holomorphes, et  $\text{End}(M)$  l'ensemble de ses endomorphismes holomorphes. La composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}(M)$  sera notée  $\text{Aut}(M)^0$ . La notation  $\text{Rat}(M)$  sera utilisée pour désigner l'ensemble des transformations méromorphes (ou rationnelles) de  $M$ . Celles qui sont dominantes (*i.e.* dont l'image contient un ouvert de ZARISKI de  $M$ ) forment le sous-ensemble  $\text{Dom}(M)$ .

#### *Surfaces K3.*

Les surfaces K3 sont les surfaces complexes compactes simplement connexes qui possèdent une 2-forme holomorphe partout non nulle. Ces surfaces occupent une place privilégiée dans la classification d'ENRIQUES-KODAIRA et apparaîtront régulièrement au cours de ce mémoire. Les exemples les plus simples de telles surfaces sont les quartiques lisses de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  et les revêtements doubles de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  le long d'une courbe sextique lisse.



## 2. EXISTENCE DE TRANSFORMATIONS HOLOMORPHES

### 2.1. Endomorphismes et entropie.

#### 2.1.1. Entropie topologique.

Soit  $f$  une transformation continue d'un espace métrique compact  $X$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif, qu'il faut penser comme étant l'échelle de précision à laquelle on observe la dynamique de  $f$ . Pour tout entier positif  $n$ , notons  $N(n, \varepsilon)$  le nombre d'orbites distinctes de  $f$  que l'on peut observer pendant une durée  $n$  à l'échelle  $\varepsilon$ ; par définition,  $N(n, \varepsilon)$  est le cardinal minimum d'une partie  $X_n$  de  $X$  telle que, pour tout point  $y$  de  $X$ , il existe un point  $x$  de  $X_n$  satisfaisant

$$\text{dist}(f^l(x), f^l(y)) \leq \varepsilon, \quad \forall 0 \leq l \leq n.$$

L'entropie topologique de  $f$  à l'échelle  $\varepsilon$ , notée  $h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$ , est le taux de croissance exponentielle de  $N(n, \varepsilon)$  lorsque la durée d'observation  $n$  tend vers l'infini :

$$h_{\text{top}}(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \log(N(n, \varepsilon)) \right\}.$$

La limite des entropies  $h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 est l'entropie topologique de  $f$ . Nous la noterons  $h_{\text{top}}(f)$ . Elle ne dépend pas du choix de la distance utilisée pour décrire la topologie de  $X$ .

#### 2.1.2. Calcul de l'entropie.

Lorsque  $f$  est une transformation de classe  $C^\infty$  d'une variété compacte  $M$ , l'entropie topologique de  $f$  est minorée par le logarithme du rayon spectral de la transformation linéaire

$$f^* : H^*(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{R})$$

(où  $H^*(M, \mathbf{R})$  est la somme directe des groupes de cohomologie de  $M$ ) :

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log(\rho(f^*)).$$

Ce résultat dû à YOMDIN se transforme en une égalité pour les transformations holomorphes des variétés kählériennes :

**Théorème 2.1** (GROMOV, YOMDIN, [65], [66], [112]). *Soit  $f$  une transformation holomorphe d'une variété complexe compacte kählérienne  $M$ . Pour tout entier  $p$  compris entre 0 et  $\dim_{\mathbf{C}}(M)$ , notons  $\lambda_p(f)$  le rayon*

spectral de la transformation linéaire  $f^*$  agissant sur le groupe de cohomologie de DOLBEAULT  $H^{p,p}(M, \mathbf{R})$ . Alors

$$h_{\text{top}}(f) = \max_{0 \leq p \leq \dim_{\mathbf{C}}(M)} \{\log(\lambda_p(f))\}.$$

Le rayon spectral  $\rho(f^*)$  est strictement plus grand que 1 si et seulement si l'un des  $\lambda_p(f)$  l'est et, en fait, si et seulement si  $\lambda_1(f) > 1$ . Pour tester si l'entropie de  $f$  est strictement positive, il suffit en effet de calculer la vitesse de croissance exponentielle de la suite  $(f^n)^*[\kappa]$  où  $\kappa$  est n'importe quelle forme de KÄHLER (voir [44], ou [68] et §2.1.4). Une transformation holomorphe homotope à l'identité a donc une entropie nulle ; c'est le cas du flot au temps 1 d'un champ de vecteurs holomorphe sur une variété kählérienne compacte.

**Exemple 2.2.**

- 1) L'entropie topologique d'un endomorphisme holomorphe  $f$  de l'espace projectif est égale au logarithme du degré topologique de  $f$ .
- 2) Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de dimension 3 hyperbolique. Le groupe  $\Gamma$  est donc isomorphe à un réseau cocompact du groupe de LIE complexe  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ . La variété compacte  $\text{PSL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$  n'est pas kählérienne et, d'ailleurs, le flot géodésique complexe

$$\Phi_t(A) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} A, \quad A \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})/\Gamma,$$

a une entropie topologique strictement positive dès que  $t \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}i$ .

2.1.3. *Entropie nulle.*

Précisons un peu l'affirmation générale suivant laquelle les transformations dont l'entropie est nulle ont une dynamique moins riche que les autres. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'un endomorphisme  $f$  sur une variété kählérienne compacte  $M$  a une entropie strictement positive dès que le rayon spectral de  $f^*$  est strictement plus grand que 1. Plaçons nous a contrario dans le cas où  $f^*$  est l'identité. Dans ce cas, la suite des graphes des itérés  $f^n$  de  $f$  forme une suite de sous-variétés de  $M \times M$  de volume constant. Par le théorème de BISHOPP, cette suite possède une sous-suite convergente. Il existe donc une sous-suite  $n_k$  et une sous-variété  $\Gamma_\infty$  de  $M \times M$  qui est le graphe d'une transformation rationnelle  $f^\infty$  de  $M$  telles que  $f^{n_k}(m)$  converge vers  $f^\infty(m)$  pour tout point  $m$  d'un ouvert

de ZARISKI non-vide. Ceci peut être précisé de la manière suivante : d'une part il existe un itéré  $f^k$  de  $f$  (avec  $k > 0$ ) qui est un automorphisme isotope à l'identité (voir [83] et le §4.2) ; d'autre part, l'action du groupe  $\text{Aut}(M)^0$  dans son ensemble est « compactifiable » (voir [83] et [55] pour les détails).

#### 2.1.4. Le cas méromorphe.

Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Le graphe de  $f$  est une sous-variété complexe a priori singulière de  $M \times M$ . Notons  $\Gamma_f$  une désingularisation de ce graphe et  $\varepsilon$  et  $\pi$  les projections de  $\Gamma_f$  sur  $M$ , de sorte que  $f$  coïncide avec  $\pi \circ \varepsilon^{-1}$ .

Si  $\alpha$  est une forme différentielle de type  $(p, q)$  sur  $M$ , alors  $\pi^* \alpha$  est une forme de même type sur  $\Gamma_f$  ; celle-ci peut alors être poussée comme courant par  $\varepsilon$ . Ceci détermine un opérateur

$$f^* \alpha = \varepsilon_*(\pi^* \alpha)$$

qui induit une transformation linéaire de  $H^{p,q}(M, \mathbf{C})$  pour chaque type  $(p, q)$ . L'endomorphisme de  $H^*(M, \mathbf{C})$  ainsi défini respecte à la fois la structure entière et la décomposition de HODGE de la cohomologie de  $M$ . Lorsque  $f$  est holomorphe, on retrouve ainsi l'opérateur usuel  $f^*$ .

Une difficulté apparaît lorsque  $f$  est méromorphe : en général, l'application qui à  $f$  associe  $f^*$  n'est pas un morphisme de  $\text{Rat}(M)$  vers le groupe  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{C}))$ . Il se peut par exemple que  $(f^*)^k$  diffère de  $(f^k)^*$  pour certaines valeurs de l'entier  $k$ . L'exemple le plus simple est celui de la transformation birationnelle du plan appelée involution de CREMONA et définie par

$$\sigma([x : y : z]) = [yz : zx : xy].$$

Cette transformation est une involution qui envoie une droite générique du plan sur une conique. L'action sur le second groupe de cohomologie de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  est donc la multiplication par 2 tandis que l'action de  $\sigma^2 = \text{Id}$  est l'identité. Ainsi,  $(\sigma^*)^2$  diffère de  $(\sigma^2)^*$ .

**Définition 2.3.** Soit  $f$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Soit  $p$  un entier compris entre 0 et la dimension de  $M$ . Le  $p$ -ième degré dynamique  $\lambda_p(f)$  est le rayon spectral de la suite d'opérateurs  $(f^n)^* : H^{p,p}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^{p,p}(M, \mathbf{R})$ .

Ceci signifie que

$$\lambda_p(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|(f^n)^*\|^{1/n} \right\}$$

pour toute norme d'opérateur  $\|\cdot\|$  sur les endomorphismes de l'espace vectoriel  $H^{p,p}(M, \mathbf{R})$ . Ces nombres réels peuvent également être définis par

$$\lambda_p(f) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_M (f^k)^* \kappa^p \wedge \kappa^{d-p}$$

si  $\kappa$  est une forme de KÄHLER sur  $M$  (le lecteur pourra consulter [69] et [47] ou [46] pour ce type de propriétés). Avec cette définition, les degrés dynamiques de l'involution de CREMONA  $\sigma$  valent tous 1. Lorsque  $p$  est égal à la dimension de  $M$ ,  $\lambda_p(f)$  est égal au degré topologique de  $f$ , que nous noterons  $\text{deg}_{\text{top}}(f)$ , mais les autres quantités  $\lambda_p(f)$  sont plus délicates à appréhender.

Comme l'ont montré DINH et SIBONY, la majoration de GROMOV concernant l'entropie topologique subsiste dans le cadre méromorphe,

$$h_{\text{top}}(f) \leq \max_{0 \leq p \leq \dim_{\mathbf{C}}(M)} \log(\lambda_p(f)),$$

mais il faut préciser légèrement la définition de l'entropie (voir [45] et [68]).

L'extension de la minoration de YOMDIN au cas méromorphe est un problème essentiellement ouvert. On dispose toutefois de résultats complets dans un cas particulier.

**Définition 2.4.** Une transformation méromorphe  $f$  d'une variété complexe compacte kählérienne  $M$  de dimension  $d$  est dite cohomologiquement dilatante si son degré topologique  $\lambda_d(f)$  majore strictement ses autres degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$ ,  $0 \leq p \leq d - 1$ .

**Théorème 2.5** (GUEDJ, [69], DINH et SIBONY [47], voir §5.1). *Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation rationnelle d'une variété projective complexe  $M$ . Si  $f$  est cohomologiquement dilatante alors*

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\text{deg}_{\text{top}}(f))$$

#### 2.1.5. Recherche d'exemples.

Il est difficile d'exhiber des variétés kählériennes compactes (ou projectives) qui admettent des endomorphismes ou des transformations méromorphes avec une entropie strictement positive. D'après l'inégalité de

GROMOV, on recherchera des exemples pour lesquels l'un des degrés dynamiques  $\lambda_p$  est strictement plus grand que 1.

Le paragraphe 2.2 décrit les constructions géométriques classiques qui donnent naissance à des fibrations méromorphes sur  $M$  invariantes par toute transformation méromorphe de  $M$ . Les exemples les plus intéressants, ceux qui ne se réduisent pas à des exemples de dimension plus petite, apparaissent donc lorsque toutes ces fibrations deviennent triviales. Le paragraphe suivant décrit succinctement le cas des variétés projectives complexes de dimension 1 et 2, et le quatrième traite trois cas particuliers instructifs.

## 2.2. Fibrations invariantes.

### 2.2.1. Dimension de KODAIRA et applications pluricanoniques.

La dimension de KODAIRA  $\text{kod}(M)$  d'une variété complexe compacte  $M$  peut prendre les valeurs  $-\infty, 0, 1, 2, \dots, \dim_{\mathbf{C}}(M)$ . Elle est définie de la manière suivante.

Si  $L$  est un fibré en droites holomorphe sur  $M$ ,  $H^0(M, L)$  désignera le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de  $L$ . La dimension de ce  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel est finie. Soit  $x$  un point de  $M$  et  $L_x$  la fibre de  $L$  en ce point. L'évaluation des sections de  $L$  au point  $x$  détermine une application linéaire

$$\theta_{L_x} : H^0(M, L) \rightarrow L_x.$$

Cette application est identiquement nulle lorsque toutes les sections globales de  $L$  s'annulent en  $x$ ; on dit alors que  $x$  est un point base de  $L$ . Une fois fixé un isomorphisme de  $L_x$  avec la droite vectorielle complexe,  $\theta_{L_x}$  s'interprète comme une forme linéaire. Celle-ci ne dépend du choix de l'isomorphisme  $L_x \simeq \mathbf{C}$  que par un facteur multiplicatif. En tout point  $x$  de  $M$  qui n'est pas un point base de  $L$ , on obtient ainsi un élément  $[\theta_{L_x}]$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}(H^0(M, L)^*)$ . Pour les fibrés en droites qui possèdent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\Theta_L : M \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, L)^*) \quad (2.1)$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans les points bases de  $L$ .

Pour chaque entier strictement positif  $k$ , cette construction peut être répétée en remplaçant  $L$  par la puissance tensorielle  $L^{\otimes k}$ . La dimension de

KODAIRA-IITAKA de  $L$  est alors définie comme le maximum des dimensions des images  $\Theta_{L^{\otimes k}}(M)$  :

$$\text{kod}(M, L) = \max_{k>0} \{ \dim_{\mathbf{C}} (\Theta_{L^{\otimes k}}(M)) \}, \quad (2.2)$$

en convenant de poser  $\text{kod}(M, L) = -\infty$  si aucune puissance strictement positive de  $L$  ne possède de section non nulle.

La dimension de KODAIRA de  $M$ ,  $\text{kod}(M)$ , est la dimension de KODAIRA-IITAKA du fibré canonique de  $M$ , noté  $K_M$  et défini comme le déterminant du fibré cotangent :

$$K_M = \det(T^*M).$$

Les sections holomorphes de  $K_M$  sont donc les formes holomorphes de degré maximal. Les applications méromorphes  $\Theta_k = \Theta_{K_M^{\otimes k}}$  sont appelées « applications pluricanoniques ». La fibration méromorphe induite par  $\Theta_k$  ne dépend plus de  $k$  lorsque  $k$  est suffisamment divisible ; cette fibration est la « fibration canonique » de  $M$ .

Soit  $f : M \dashrightarrow M$  une application méromorphe. La transformation  $f^*$  consistant à prendre l'image réciproque d'une forme holomorphe par  $f$  définit un endomorphisme linéaire de  $H^0(M, K_M^{\otimes k})$  pour tout  $k$  positif : l'image réciproque d'une forme est bien définie en dehors de l'ensemble d'indétermination  $\text{Ind}(f)$  et se prolonge à  $M$  par le procédé d'HARTOGS. Nous dirons que  $f$  est dominante si l'image de  $M \setminus \text{Ind}(f)$  est un ouvert de ZARISKI non vide de  $M$  ; ceci revient à dire que le degré topologique de  $f$  est strictement positif. Lorsque le fibré  $K_M^{\otimes k}$  a des sections non nulles, l'application  $f$  est dominante si et seulement si  $f^*$  appartient au groupe linéaire  $\mathbf{GL}(H^0(M, K_M^{\otimes k}))$ . En notant  $F_k$  (ou  $F$  pour simplifier) la transformation projective associée à  $f^*$ , on a la relation

$$F_k \circ \Theta_k = \Theta_k \circ f. \quad (2.3)$$

Autrement dit, la fibration pluricanonique est une fibration méromorphe invariante par toute transformation méromorphe dominante  $f$  et l'action sur la base de la fibration est linéaire : c'est la restriction de  $F$  à l'image de  $\Theta_k$ . On montre par la même méthode que la dimension de KODAIRA d'une variété  $M$  est un invariant birationnel.

Soient  $k$  un entier positif et  $\Omega$  une section holomorphe du fibré  $K_M^{\otimes k}$ . On pose alors

$$\|\Omega\|_k = \int_M ((i)^{d^2} \Omega \wedge \overline{\Omega})^{1/k},$$

où  $d$  est la dimension complexe de  $M$ . L'application  $\|\cdot\|_k$  satisfait les propriétés suivantes.

- (i) **Homogénéité** :  $\|\lambda\Omega\|_k = |\lambda|^{2/k} \|\Omega\|_k$ .
- (ii) **Positivité** :  $\|\Omega\|_k \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\Omega$  est nulle.
- (iii) **Compacité** : le groupe des endomorphismes linéaires de  $H^0(M, K_M^{\otimes k})$  qui préservent  $\|\cdot\|_k$  est un groupe compact.

Pour toute transformation méromorphe  $f$  de  $M$ , on a bien sûr

$$\|f^*\Omega\|_k = \deg_{top}(f) \|\Omega\|_k,$$

ce qui montre la proposition suivante.

**Proposition 2.6.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $f$  une transformation méromorphe dominante de  $M$ . Pour tout entier positif  $k$ , la transformation projective*

$$F_k : \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$$

*associée à  $f$  appartient au groupe compact des transformations qui préservent  $\|\cdot\|_k$ .*

Pour chercher des transformations méromorphes avec une dynamique intéressante, il suffit donc de restreindre notre attention aux variétés complexes compactes dont la dimension de KODAIRA est négative ou nulle.

Le théorème suivant, pour lequel nous renvoyons à [107], §VI, et à [79], §7.6, se déduit facilement de ce qui vient d'être dit.

**Théorème 2.7** ([107]). *Soient  $M$  une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle et  $\Theta_k : M \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$ ,  $k > 0$ , les applications pluricanoniques. Si  $f$  est une transformation biméromorphe de  $M$ , il existe une transformation projective périodique  $F_k$  de  $\mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$  telle que  $\Theta_k \circ f = F_k \circ \Theta_k$ .*

Il me semble que ce résultat reste valable si  $f$  est méromorphe et dominante, mais je n'ai pas obtenu d'argument définitif pour l'instant, excepté en dimension  $\leq 2$ .

**Remarque 2.8.** Lorsque la dimension de KODAIRA de  $M$  est maximale, i.e.  $\text{kod}(M) = \dim_{\mathbf{C}}(M)$ , les fibres génériques de l'application  $\Theta_k$  sont finies ; par conséquent, toute transformation méromorphe dominante de  $M$  est inversible et d'ordre fini. En particulier, le groupe des automorphismes de  $M$  est fini (théorème d'ANDREOTTI, voir [5] et [79], §7).

Si  $f : M \dashrightarrow M$  est une transformation méromorphe surjective d'une variété complexe compacte, l'ensemble de ramification  $R_f$  de  $f$  est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels  $f$  n'est pas un difféomorphisme local sur son image. C'est le lieu d'annulation du jacobien de  $f$ , donc  $R_f$  est l'ensemble vide ou un diviseur. Le théorème suivant montre que  $R_f$  est vide dès que la dimension de KODAIRA de  $M$  est positive ou nulle.

**Théorème 2.9** (PETERS, [97]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle. Le diviseur de ramification de toute application méromorphe dominante de  $M$  dans  $M$  est vide.*

Ceci montre que les endomorphismes surjectifs de telles variétés sont des revêtements étales. En particulier, un tel endomorphisme est un automorphisme si  $M$  est simplement connexe : c'est le cas pour toutes les variétés de CALABI-YAU irréductibles qui ne sont pas des tores, par exemple pour les surfaces K3.

### 2.2.2. Fibration d'ALBANESE.

Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'ALBANESE. Notons  $H^0(M, \Omega_M^1)$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de  $M$ . Puisque  $M$  est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque  $\gamma$  est un lacet de  $M$ , l'intégration d'une 1-forme holomorphe

$$\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

ne dépend que de la classe d'homologie  $[\gamma] \in H^1(M, \mathbf{Z})$ . La théorie de HODGE montre que la partie sans torsion de  $H^1(M, \mathbf{Z})$  se plonge de cette manière en un réseau cocompact de  $H^0(M, \Omega_M^1)^*$ . Le tore complexe obtenu en quotientant  $H^0(M, \Omega_M^1)^*$  par ce réseau sera noté  $\text{Alb}(M)$  : c'est la variété d'ALBANESE de  $M$ .

Choisissons un point base  $x$  dans  $M$ . Si  $y$  est un point de  $M$  et  $\omega$  est une 1-forme fermée, l'intégrale de  $\omega$  entre  $x$  et  $y$  dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de  $\omega$  sur les lacets basés en  $x$ . On dispose ainsi d'une application holomorphe  $a_M : M \rightarrow \text{Alb}(M)$ , définie par

$$a_M(y)(\omega) = \int_x^y \omega, \quad \forall \omega \in H^0(M, T^*M) \quad (2.4)$$

qui dépend du choix du point base  $x$  dans  $M$ . C'est la fibration d'ALBANESE de  $M$ . Elle est équivariante sous l'action de toute transformation méromorphe  $f$ . L'action induite par  $f$  sur  $\text{Alb}(M)$  est associée à celle de  $f^*$  sur les 1-formes holomorphes.

Pour trouver des transformations non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'ALBANESE de  $M$  est triviale, c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration force  $M$  à être un tore (voir [107]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de  $M$  est fini.

### 2.2.3. Réduction algébrique.

Le troisième exemple de fibration invariante est fourni par le processus de réduction algébrique (voir [107]). Il donne naissance à une fibration méromorphe dont les fibres sont les sous-variétés sur lesquelles toute fonction méromorphe est constante. Toute transformation méromorphe  $f$  préserve cette fibration ; l'action induite sur la base correspond à celle de  $f$  par composition sur le corps des fonctions méromorphes.

### 2.2.4. Quotient rationnel.

Une variété complexe  $M$  est rationnellement connexe si deux points quelconques de  $M$  peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles. Pour qu'une variété projective soit rationnellement connexe il faut et il suffit qu'il existe une courbe rationnelle  $c : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow M$  telle que le fibré  $c^*(TM)$  soit une somme de fibrés en droites  $O(m)$  strictement positifs (i.e.  $m > 0$ ).

Si  $M$  est une variété complexe, on définit sur  $M$  une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ , dénommée équivalence rationnelle, en disant que deux points sont en relation s'il existe une chaîne de courbes rationnelles dans  $M$  qui

joint  $x$  à  $y$ . En général, l'espace quotient  $M/\mathcal{R}$  n'est pas une variété ; par exemple, toute surface K3 projective possède une infinité dénombrable de courbes rationnelles. On dispose toutefois du résultat suivant (cf. [39], chap. 5, [35], thm. 3.23) :

**Théorème 2.10.** *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne. Il existe une variété complexe normale (singulière)  $\text{Rat}(M)$  et une fibration méromorphe  $\rho : M \dashrightarrow \text{Rat}(M)$  qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (a)  $\rho$  est une fibration régulière propre en dehors d'un fermé de ZARISKI de  $M$  ;
- (b) les fibres de  $\rho$  sont rationnellement connexes ;
- (c) les fibres générales de  $\rho$  sont des classes de  $\mathcal{R}$ -équivalence ;
- (d) si  $\psi : M \dashrightarrow B$  est une autre fibration méromorphe satisfaisant (a) et (b), il existe une application rationnelle  $\pi : B \dashrightarrow \text{Rat}(M)$  telle que  $\rho = \pi \circ \psi$ .

Le troisième point utilise la définition suivante : une propriété est « générale » si elle est valable sur le complémentaire d'une famille dénombrable de fermés de ZARISKI d'intérieur vide. La fibration  $\rho$  est appelée quotient rationnel de  $M$ . D'après la propriété (d), cette fibration est invariante par toute transformation méromorphe de  $M$ . Cette fibration est utile pour classer les difféomorphismes holomorphes dont la dynamique est de type ANOSOV (théorème 6.5).

### 2.2.5. *Le coeur.*

Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne. Dans [35], CAMPANA introduit une fibration méromorphe  $c_M : M \dashrightarrow C$ , appelée « coeur » de  $M$ , que nous ne définirons pas ici. Cette fibration est équivariante sous l'action de toute transformation méromorphe dominante de  $M$ . Plus précisément, AMERIK et CAMPANA montrent le résultat suivant (voir [3]) :

**Théorème 2.11.** *Soient  $M$  une variété complexe compacte kählérienne et  $c_M : M \dashrightarrow C$  le coeur de  $M$ . Si  $f$  est une transformation méromorphe dominante de  $M$ , il existe une transformation biméromorphe  $f_C$  de  $C$  d'ordre fini telle que  $f_C \circ c_M = c_M \circ f$ .*

En particulier, si  $f$  possède une orbite ZARISKI-dense, la variété  $M$  est « spéciale » au sens de CAMPANA (voir [35], [3], [H]).

### 2.2.6. Bilan.

Les fibrations décrites dans les paragraphes précédents sont équivariantes sous l'action des transformations méromorphes dominantes de  $M$  ; si  $\pi : M \dashrightarrow B$  est l'une de ces fibrations et  $f : M \dashrightarrow M$  est méromorphe, il existe une transformation  $\bar{f}$  de  $B$  telle que  $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$ . Lorsqu'on cherche à déterminer les variétés  $M$  munies d'une dynamique riche, il convient donc en premier lieu de déterminer celles pour lesquelles

- (i) la dimension de KODAIRA vaut 0 ou  $-\infty$  et  $M$  est une variété spéciale au sens de CAMPANA,
- (ii) la réduction algébrique  $\text{Alg}(M)$  est de dimension 0 ou  $\dim_{\mathbb{C}}(M)$ ,
- (iii) le quotient rationnel  $\text{Rat}(M)$  est de dimension 0 ou  $\dim_{\mathbb{C}}(M)$ ,
- (iv) le premier nombre de BETTI de  $M$  est nul.

## 2.3. Transformations holomorphes des courbes et des surfaces.

Le théorème d'HURWITZ montre que les courbes compactes qui possèdent des endomorphismes de degré plus grand que 1 ou un groupe d'automorphismes infini sont la droite projective et les courbes elliptiques. Ceci résulte aussi de la remarque 2.8.

Supposons désormais que  $X$  est une surface complexe compacte kählérienne. Rappelons que  $X$  est dite minimale lorsqu'elle ne possède aucune courbe rationnelle lisse d'auto-intersection  $-1$ . Si une telle courbe existe, elle peut être contractée et l'on obtient une nouvelle surface lisse birationnelle à  $X$  dont le deuxième nombre de BETTI a chuté d'une unité. En appliquant ce procédé un nombre fini de fois, on construit un morphisme birationnel  $\pi : X \rightarrow X'$  tel que  $X'$  soit minimal. Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou nulle, ce modèle minimal de  $X$  est unique et l'on observe que toute transformation holomorphe  $f$  de  $X$  est conjuguée par  $\pi$  à une transformation holomorphe de  $X'$ .

### 2.3.1. Automorphismes.

Le résultat bien connu suivant fait partie du folklore géométrique italien. Il est démontré dans [Abis].

**Théorème 2.12** (CANTAT, [ABIS]). *Soit  $X$  une surface complexe compacte qui possède un automorphisme  $f$  dont le premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  est strictement plus grand que 1.*

- Ou bien la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle et dans ce cas  $f$  est conjugué à un automorphisme de l'unique modèle minimal de  $X$ , qui doit être un tore, une surface K3 ou une surface d'Enriques.
- Ou bien la surface  $X$  est rationnelle ; dans ce cas  $f$  est birationnellement conjuguée à une transformation birationnelle d'un modèle minimal de  $X$  mais n'est pas conjuguée à une transformation holomorphe d'un tel modèle minimal.

*En particulier,  $X$  est une surface kählérienne.*

Lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle, l'existence de tels automorphismes est décrite par le théorème de TORELLI : un automorphisme est déterminé par son action sur la cohomologie de la surface et, réciproquement, toute bijection linéaire de  $H^*(X, \mathbf{Z})$  qui préserve la structure de HODGE et le cône de KÄHLER de  $X$  est induite par un automorphisme de  $X$ .

Pour les surfaces rationnelles, la situation est loin d'être comprise : la description de celles qui ont un groupe d'automorphismes infini est un problème ouvert à la fois difficile et important. Toutefois, pour celles qui possèdent une 2-forme méromorphe ne s'annulant pas - ce sont donc des surfaces très proches des surfaces K3 - on dispose d'une version faible du théorème de TORELLI (voir [70], [71] et [89]). Ceci fournit de très jolis exemples qui seront décrits au paragraphe 3.3.2.

Seules les surfaces rationnelles (donc le plan projectif !) possèdent des transformations biméromorphes qui (1) ne sont pas (biméromorphiquement) conjuguées à un automorphisme et (2) ont un degré dynamique strictement plus grand que 1. La transformation de HÉNON

$$f[x : y : z] = [yz : xz + y^2 + cz^2 : z^2]$$

est un exemple d'une telle transformation. La dynamique de ces transformations birationnelles est très intéressante et commence à être bien comprise (voir [11], [12], [50] et le §5.3.2).

### 2.3.2. Endomorphismes et transformations rationnelles.

Comme nous l'avons dit, les surfaces complexes compactes qui possèdent des endomorphismes surjectifs non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de

KODAIRA est 0 ou  $-\infty$ . À côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques ; ainsi, la transformation polynomiale

$$[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$$

détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en  $[0 : 0 : 1]$ . Les exemples construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. D'après [93], les surfaces projectives  $X$  qui possèdent un endomorphisme non inversible appartiennent à la liste suivante :

- les surfaces toriques ;
- les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  au-dessus d'une courbe elliptique,
- les fibrés en  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  au-dessus d'une courbe  $C$  de genre  $\geq 2$ , pour lesquels il existe un revêtement (étale)  $C'$  de  $C$  tel que  $X \times_C C' = \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times C'$  ;
- les surfaces abéliennes ou hyperelliptiques ;
- les surfaces elliptiques avec  $\text{kod}(X) = 1$  dont la caractéristique d'EULER topologique est nulle.

Lorsqu'aucune fibration n'est invariante par l'endomorphisme,  $X$  est donc une surface torique ou un tore. Une classification analogue est disponible pour toutes les surfaces compactes (voir [1], [93], [56]).

Les transformations méromorphes dominantes des surfaces kählériennes compactes sont beaucoup plus nombreuses que les endomorphismes. Par exemple, une surface K3 ne possède pas d'endomorphisme mais peut posséder des transformations rationnelles de degré topologique strictement plus grand que 1. C'est le cas lorsqu'elle possède des fibrations elliptiques (voir §3.2.3).

#### 2.4. Existence d'endomorphismes : trois cas particuliers.

Dans ce paragraphe, nous donnons trois exemples de variétés illustrant les difficultés que l'on rencontre lorsque l'on cherche à construire des transformations holomorphes d'ordre infini sur des variétés complexes et compactes. Le premier exemple concerne les hypersurfaces lisses de l'espace projectif, le deuxième celui des variétés compactes et kählériennes dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle et le troisième concerne les variétés homogènes compactes (a priori non kählériennes). Pour

ces dernières, une nouvelle fibration invariante fait son apparition, la fibration de TITS. Ceci permet d'étudier en détails leurs endomorphismes.

#### 2.4.1. *Hypersurfaces lisses.*

Le cas des hypersurfaces est complètement compris. Les courbes planes lisses de degré supérieur ou égal à 4 ont un genre strictement supérieur à 2 : toute transformation rationnelle dominante d'une telle courbe est donc un automorphisme et le groupe des automorphismes est fini. Les courbes cubiques planes lisses sont des courbes de genre 1. Elles possèdent donc une infinité d'automorphismes et d'endomorphismes de degré  $> 1$ . La même remarque vaut pour les coniques lisses et les droites puisqu'elles sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

**Théorème 2.13** ([4], [95], [9], [85]). *Soit  $M$  une hypersurface lisse de dimension  $n \geq 2$  et de degré  $d \geq 2$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbf{C})$ .*

- *Si  $d \geq 3$  ou si  $d = 2$  et  $n \geq 3$ ,  $M$  n'a pas d'endomorphisme de degré topologique strictement plus grand que 1 ;*
- *le groupe d'automorphismes de  $M$  est fini sauf pour les quadriques ( $d = 2$ ) et certaines surfaces quartiques ( $d = 4$  et  $n = 2$ ) ; les surfaces quartiques génériques n'ont pas d'automorphisme distinct de l'identité.*

#### **Remarque 2.14.**

**1.-** Les surfaces quartiques dans  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  sont des exemples de surfaces K3 (voir le paragraphe 3.2.2). Certaines ont un groupe d'automorphismes qui contient un groupe libre non abélien.

**2.-** Pour compléter l'énoncé précédent, il convient de remarquer que les quadriques lisses sont homogènes et ont donc une infinité d'automorphismes. D'autre part, les surfaces quadriques lisses sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et possèdent donc de nombreux endomorphismes.

#### 2.4.2. *Dimension de KODAIRA positive.*

Les résultats les plus simples que l'on puisse obtenir en dimension quelconque concernent les variétés dont la dimension de KODAIRA est positive. D'après la remarque 2.8, les endomorphismes d'une variété de type général sont en nombre fini, et les endomorphismes des variétés de dimension intermédiaire  $\text{kod}(M) \in \{1, \dots, \dim_{\mathbf{C}}(M) - 1\}$  préservent une fibration non triviale et induisent des automorphismes linéaires unitaires sur la base de

cette fibration. Ces endomorphismes ont donc un facteur inversible, au sens de la proposition suivante.

**Définition 2.15.** Un endomorphisme  $f$  d'une variété complexe compacte (connexe)  $M$  admet un facteur inversible si les trois conditions suivantes sont réunies :

- (i) il existe une fibration méromorphe  $\pi : M \dashrightarrow B$  à valeurs dans une variété lisse de dimension non nulle (sauf si  $M$  elle-même est réduite à un point),
- (ii) les fibres de  $\pi$  sont permutées par  $f$ ,
- (iii) l'endomorphisme  $f_B : B \rightarrow B$  induit par  $f$  est un automorphisme.

Ce vocabulaire étant introduit, la proposition suivante résulte sans difficulté de la partie 2.2, du théorème de BOGOMOLOV sur les variétés à première classe de CHERN nulle et d'un résultat de SERRE (voir respectivement [8] et [101]). Elle est démontrée dans [F].

**Proposition 2.16.** (CANTAT, [F]) *Soit  $M$  une variété kählérienne compacte (connexe) de dimension  $n$  dont la dimension de KODAIRA est positive ou nulle. Soit  $f : M \rightarrow M$  un endomorphisme dont le degré topologique  $\deg(f)$  est strictement plus grand que 1.*

- (i) *Si  $\deg(f)$  n'appartient pas au spectre de*

$$f_* : H_{n-1, n-1}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H_{n-1, n-1}(M, \mathbf{R})$$

*alors, après un revêtement étale fini de  $M$ , ou bien  $M$  est un tore, ou bien  $f$  a un facteur inversible ;*

- (ii) *si  $f$  est un endomorphisme cohomologiquement dilatant,  $M$  est revêtu par un tore et  $f$  par une transformation affine de ce tore ;*
- (iii) *s'il existe une classe de cohomologie kählérienne  $[\alpha]$  telle que  $f^*[\alpha]$  soit proportionnelle à  $[\alpha]$ , il existe alors un revêtement fini de  $M$  qui est un tore auquel  $f$  se relève en un endomorphisme affine.*

**Remarque 2.17.** L'hypothèse reliant le degré de  $f$  au spectre de  $f_*$  dans la première assertion n'est sans doute pas essentielle. Supposons en effet que la dimension de KODAIRA de  $M$  est nulle, car sinon  $f$  a un facteur inversible. Si  $f$  ne préserve aucune fibration, nous pouvons supposer que la fibration d'ALBANESE de  $M$  est triviale. Dans ce cas, CAMPANA conjecture que le groupe fondamental de  $M$  est fini. Le revêtement universel de  $M$  serait alors une variété complexe compacte simplement connexe dont la

dimension de KODAIRA est nulle : tous ses endomorphismes sont donc des revêtements et sont donc des automorphismes (voir 2.9).

### 2.4.3. Variétés homogènes.

Pour trouver des endomorphismes holomorphes de degré strictement plus grand que 1, il est donc nécessaire de s'intéresser aux variétés de dimension de KODAIRA négative. Les variétés homogènes classiques fournissent de bons exemples : espaces projectifs, quadriques, grassmanniennes ... En utilisant les travaux de LAZARSFELD [81], de PARANJAPÉ et SRINIVAS [95] et de WINKELMANN [111] nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 2.18** (CANTAT, [F]). *Soit  $X$  une variété complexe, connexe, homogène et compacte. Si  $f : X \rightarrow X$  est un endomorphisme de  $X$  qui n'a pas de facteur inversible, alors :*

(i)  *$X$  fibre sur un produit d'espaces projectifs  $Q = \mathbb{P}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{m_k}$ , et les fibres sont des nilvariétés.*

(ii) *Les fibres de la fibration sont permutées par  $f$ , ce qui détermine un endomorphisme  $f_Q : Q \rightarrow Q$ .*

(iii) *Il existe des endomorphismes non injectifs  $f_i : \mathbb{P}^{m_i} \rightarrow \mathbb{P}^{m_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et un entier strictement positif  $l$  tels que  $f_Q^l$  soit l'application diagonale  $(f_1, \dots, f_k)$ .*

Par exemple, la variété grassmannienne des 2-plans de  $\mathbf{C}^4$  ne possède aucun endomorphisme holomorphe de degré topologique strictement plus grand que 1 (voir [95] et [F] pour une preuve simple). Pourtant, cette variété possède de nombreux automorphismes (puisque ceux-ci agissent transitivement) et de nombreuses transformations rationnelles (puisque cette variété est rationnelle).

### 3. EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS MÉROMORPHES

#### 3.1. Les tores, leurs quotients, les exemples de LATTÈS et les exemples de KUMMER.

##### 3.1.1. *Tores.*

Si  $A$  est un tore  $\mathbf{C}^n/\Gamma$  et si  $f : A \dashrightarrow A$  est une transformation méromorphe de  $A$ , alors  $f$  est holomorphe et est revêtue par une transformation affine  $F : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ . Le semi-groupe  $\text{Dom}(A)$  s'identifie donc au sous-ensemble du groupe  $\text{Aff}(\mathbf{C}^n)$  constitué des transformations affines  $F$  satisfaisant la propriété suivante

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \exists \beta \in \Gamma, \quad \forall z \in \mathbf{C}^n, \quad F(z + \gamma) = F(z) + \beta.$$

Un tore  $A$  étant donné, la description du semi-groupe  $\text{Dom}(A)$  est un problème de nature arithmétique délicat (voir [92], [62]). Nous nous contenterons ici de quelques exemples.

**Exemple 3.1. 1.-** Soit  $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\alpha$  un réseau de  $\mathbf{C}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , toute transformation affine  $F$  de  $\mathbf{C}^n$  dont la partie linéaire est à coefficients entiers détermine un endomorphisme  $f$  du tore  $A = \mathbf{C}^n/\Lambda^n$ . Soit  $f$  une telle transformation et  $B$  la partie linéaire de  $F$ . Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont les valeurs propres de  $B$ , rangées par ordre décroissant de leur module, alors

$$\lambda_p(f) = \prod_{i=1}^p |\alpha_i|^2.$$

**2.-** Si l'on choisit pour  $\Lambda$  un réseau particulier, par exemple  $\Lambda = \mathbf{Z}[i]$  ou  $\mathbf{Z}[j]$ , on peut enrichir le semi-groupe  $\text{Dom}(A)$ . Ainsi, dans le cas des entiers de GAUSS, le groupe  $\text{SL}(n, \mathbf{Z}[i])$  s'injecte dans le groupe des automorphismes de  $A$ .

##### 3.1.2. *Quotients.*

Une fois qu'on dispose de transformations méromorphes, on peut en construire d'autres en utilisant les trois mots-clé suivants : produit, quotient et déformation. Rappelons qu'une surface de KUMMER (au sens classique du terme) est une surface  $X$  obtenue en quotientant un tore  $\mathbf{C}^2/\Gamma$  par l'involution  $\sigma(x, y) = (-x, -y)$ . Plus généralement, nous appellerons variété de KUMMER toute variété complexe compacte obtenue en quotientant un tore par un groupe fini. La définition suivante étend cette dénomination aux transformations méromorphes construites à partir de tels quotients.

**Définition 3.2.** Soit  $f$  une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte  $M$ . Nous dirons que  $f$  est un exemple de KUMMER s'il existe un tore complexe compact  $A$ , un groupe fini  $G$  d'automorphismes de  $A$  et un endomorphisme affine  $F$  de  $A$  tels que

- (1)  $F$  passe au quotient en un endomorphisme  $\bar{F}$  du quotient  $A/G$ ;
- (2) il existe une transformation birationnelle  $\pi : M \dashrightarrow A/G$  telle que  $\pi \circ f = \bar{F} \circ \pi$ .

Nous dirons que  $f$  est un *exemple de LATTÈS* si les modules des valeurs propres de la partie linéaire de  $F$  sont égaux entre eux et strictement supérieurs à 1.

**Exemple 3.3.** Commençons par rappeler le cas de la dimension 1, bien connu des dynamiciens (voir [90] pour les détails). Si une courbe possède un exemple de LATTÈS, le genre de cette courbe est égal à 0 ou 1. Pour construire un exemple de LATTÈS sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , on se donne une courbe elliptique  $E$ , un groupe fini cyclique non trivial  $G$  d'automorphismes de  $E$  fixant un point base  $e$  et une transformation affine  $F : E \rightarrow E$  qui commute à  $G$ . Le cardinal de  $G$  est alors égal à 2, 3, 4 ou 6, la courbe  $E/G$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  et  $F$  passe au quotient en un exemple de LATTÈS  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

Plus précisément, il existe une unique structure d'orbifold sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  avec des points coniques situés sur l'ensemble post-critique de  $f$  pour laquelle  $f$  devient un endomorphisme d'orbifold. Les listes d'indices sur l'ensemble post-critique valent  $\{2, 2, 2, 2\}$ ,  $\{3, 3, 3\}$ ,  $\{2, 4, 4\}$  ou  $\{2, 3, 6\}$ ; le revêtement de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié aux trois ou quatre points de l'ensemble post-critique de  $f$  avec la liste d'indices de ramification ainsi prescrite coïncide avec  $E$ . L'endomorphisme  $f$  détermine donc l'application  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ , le groupe  $G$  et la transformation affine  $F$ .

On remarquera que, en dimension 1, la distinction entre exemples de KUMMER et exemples de LATTÈS n'a pas lieu d'être car tout exemple de KUMMER dont le degré topologique est strictement supérieur à 1 est un exemple de LATTÈS.

**Exemple 3.4.** Soit  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  un exemple de LATTÈS de dimension 1. L'action diagonale de  $f$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})^d$  détermine un exemple de LATTÈS de dimension  $d$  qui commute à l'action du groupe symétrique  $S_d$  par permutation des coordonnées. Passant au quotient, nous obtenons un exemple de LATTÈS sur  $\mathbb{P}^d(\mathbf{C})$ .

Les deux exemples précédents déterminent des endomorphismes d'une variété lisse, l'espace projectif. Dans les exemples qui suivent, la variété quotient est singulière. Les endomorphismes construits peuvent alors être considérés, au choix, comme des endomorphismes d'orbifolds ou des transformations méromorphes de variétés lisses après désingularisation de la variété quotient.

**Exemple 3.5.**

**1.-** Soient  $A = \mathbf{C}^n/\Gamma$  un tore complexe compact et  $\sigma$  l'involution  $a \mapsto -a$ . Soient  $B$  un endomorphisme linéaire de  $\mathbf{C}^n$  qui préserve le réseau  $\Gamma$  et  $f$  l'endomorphisme de  $A$  déterminé par  $B$ . Puisque  $f$  commute avec  $\sigma$ , il est possible de passer au quotient sur la variété de KUMMER  $A/\sigma$ . Ceci détermine une transformation méromorphe de la variété de KUMMER désingularisée. L'application  $f$  détermine un exemple de LATTÈS lorsque toutes les valeurs propres de  $B$  ont même module.

**2.-** Plaçons nous en dimension 2, et choisissons pour  $\Gamma$  un réseau produit  $\Lambda \times \Lambda$ . Les trois endomorphismes linéaires de  $\mathbf{C}^2$  définis par

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B_b = \begin{pmatrix} b & 3 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B_c = c \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des entiers non nuls déterminent ainsi des endomorphismes de KUMMER de  $A/\sigma$ . Les transformations associées à  $B_a$  et  $B_b$  sont des exemples de LATTÈS lorsque  $a$  et  $b$  sont supérieurs ou égaux à 2, mais celles associées à  $B_c$  n'en sont pas.

**Exemple 3.6** (voir [24], [25], [6]). Soient  $C$  une courbe elliptique,  $A$  le tore  $C \times C$  et  $\Phi$  un endomorphisme de  $A$  induit par une homothétie de  $\mathbf{C}^2$ . Soit  $\eta$  la transformation d'ordre 3 définie par  $\eta(x, y) = (y, -x - y)$ . La surface  $A/\eta$  est une surface K3 avec neuf singularités cuspidales localement isomorphes à la singularité  $uv = w^3$ . L'endomorphisme  $\Phi$  détermine une transformation rationnelle de la désingularisée de  $A/\eta$  pour laquelle  $d_t(\Phi) = \lambda_1(\Phi)^2$ .

Voici une construction alternative de  $A/\eta$  en se donnant  $C$  comme cubique lisse du plan projectif : la courbe duale de  $C$  est une sextique  $C'$  possédant neuf cusps, un par point d'inflexion de  $C$ . Le revêtement double du plan projectif dual ramifié le long de  $C'$  est isomorphe à  $A/\eta$ . Les surfaces K3 possèdent au plus neuf singularités cuspidales ; celles qui en possèdent exactement neuf sont toutes obtenues de la sorte (voir [6]).

### 3.1.3. Déformations.

Nous allons ici décrire le cas particulier des variétés de KUMMER du type  $A/\sigma$  où  $A = \mathbf{C}^n/\Gamma$  est un tore de dimension  $n$  et  $\sigma(a) = -a$ . Nous noterons  $X$  la variété de KUMMER  $A/\sigma$  désingularisée.

En dimension 1,  $X$  est la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Toute déformation de  $X$  est donc triviale. Par contre, les exemples de LATTÈS construits sur  $X$  peuvent être déformés au sein de  $\text{End}(X)$  en des endomorphismes de  $X$  qui ne sont plus des exemples de LATTÈS.

À partir de la dimension 2, la variété  $X$  ne possède aucun champ de vecteurs holomorphe non nul. Il est donc impossible de déformer une transformation méromorphe dominante de  $X$  sans déformer simultanément la structure complexe de  $X$ .

En dimension 2, la surface  $X$  est une surface K3 et peut être déformée en d'autres surfaces K3 qui ne sont plus des surfaces de KUMMER, mais ce phénomène est propre à la dimension 2 et s'arrête dès la dimension 3 ; comme l'écrit SCHLESSINGER dans [100], « one cannot parody the construction of KUMMER varieties, in dimension higher than 2, to obtain examples of smooth projective varieties with interesting deformation theories. For, if  $A$  is an abelian variety of dimension  $\geq 2$ , and  $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  acts on  $A$  by  $a \mapsto -a$ , then the deformations of the singular points of  $A/G$  account entirely for the difference between the deformation theory of  $A$  and that of the KUMMER variety  $K$  obtained by desingularizing  $A/G$ . If  $\dim A = 2$ , then the sixteen singular points of  $A/G$  are conical  $z^2 = xy$ , with one parameter family  $z^2 = xy + t$  of deformations. Thus  $K$  has more moduli than  $A$  does (16 more), but only in dimension 2 ».

À partir de la dimension 3, la situation est donc totalement rigide : on ne peut déformer ni  $X$  ni ses transformations méromorphes dominantes.

Revenons donc au cas des surfaces. Lorsqu'on déforme  $X$  en une famille  $X_\varepsilon$ , il est parfois possible de suivre une transformation méromorphe de  $X$  le long de la déformation, ce qui donne une famille de transformations méromorphes  $f_\varepsilon : X_\varepsilon \dashrightarrow X_\varepsilon$ . Au paragraphe 3.2.2, nous donnerons un exemple explicite de telles déformations.

Remarquons dès à présent que les degrés dynamiques de  $f_\varepsilon$  peuvent varier discontinument avec  $\varepsilon$ . Nous verrons par exemple au paragraphe 6.3.4

que les exemples de LATTÈS des surfaces K3 sont caractérisés par la relation  $\lambda_1(f)^2 = \lambda_2(f) > 1$  : cette relation disparaît donc par petite déformation.

### 3.2. Surfaces K3 et variétés de CALABI-YAU.

#### 3.2.1. Variétés de CALABI-YAU.

Les variétés de CALABI-YAU sont les variétés complexes compactes kählériennes  $M$  dont le fibré canonique est trivial : elles possèdent donc une forme volume holomorphe

$$\Omega = h(x_1, \dots, x_d) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

qui ne s'annule pas ( $d = \dim_{\mathbb{C}}(M)$ ). Si l'on impose à  $\Omega$  la relation

$$(i)^{d^2} \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1,$$

la forme volume  $(i)^{d^2} \Omega \wedge \bar{\Omega}$  est uniquement déterminée par la structure complexe de  $M$ . Elle est alors invariante par toute transformation méromorphe dominante de  $M$  :  $\forall f \in \text{Dom}(M)$ ,

$$f^*(\Omega \wedge \bar{\Omega}) = \deg_{top}(f) \Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

Les variétés de CALABI-YAU constituent l'exemple le plus naturel de variétés à dimension de KODAIRA nulle. Les tores en font partie. Une deuxième sous-famille est constituée des variétés symplectiques : ce sont celles qui possèdent une 2-forme holomorphe  $\omega$  (fermée car la variété est kählérienne) partout non dégénérée, ce qui signifie que

$$\Omega = \omega^{d/2}$$

est une forme volume partout non nulle sur  $M$ .

**Théorème 3.7** (Bogomolov, Yau, voir [8]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne dont la première classe de CHERN est de torsion. Il existe un revêtement fini  $M'$  de  $M$  qui est isomorphe au produit  $A \times V \times X$  où*

- $A$  est un tore  $\mathbb{C}^{n_1}/\Gamma$  ;
- $V$  est un produit  $\prod_{i=1}^{n_2} V_i$  où chaque  $V_i$  est une variété de CALABI-YAU simplement connexe satisfaisant  $H^0(V_i, \Omega_{V_i}^p) = 0$  si  $0 < p < \dim(V_i)$  ;
- $X$  est un produit  $\prod_{j=1}^{n_3} X_j$  de variétés symplectiques simplement connexes.

Chaque transformation méromorphe dominante  $f$  de  $M$  admet un itéré  $f^k$ ,  $k > 0$ , qui se relève en une transformation méromorphe de  $M'$  préservant chacun des facteurs de la décomposition. Il suffit donc d'étudier les variétés de CALABI-YAU irréductibles (celles pour lesquelles la décomposition fournie par le théorème précédent se réduit à un seul facteur). Puisque le cas des tores a déjà été étudié, il convient maintenant de donner des exemples sur les variétés symplectiques et les variétés de CALABI-YAU simplement connexes avec  $H^0(V, \Omega_V^p) = 0$  si  $0 < p < \dim(V)$ .

Il n'y a pas d'exemple en dimension 1 puisque la seule courbe simplement connexe est la sphère de RIEMANN, dont le fibré canonique est négatif. En dimension 2, les seules surfaces simplement connexes à fibré canonique trivial sont les surfaces K3. Elles sont toutes kählériennes et forment une famille à 20 paramètres. Les surfaces K3 projectives correspondent à une union dénombrable dense d'hypersurfaces dans cet espace de module connexe.

### 3.2.2. Automorphismes des surfaces K3.

Nous avons déjà vu des exemples d'automorphismes sur certaines surfaces K3 : si  $A$  est un tore de dimension 2 la surface de KUMMER obtenue en désingularisant le quotient de  $A$  par l'involution  $\sigma : a \mapsto -a$  est une surface K3. Lorsque  $A$  possède des automorphismes qui commutent avec cette involution, ceci détermine des automorphismes de la surface de KUMMER. Dans ce paragraphe, nous allons décrire deux variations liées à cet exemple.

**Exemple 3.8** (KEUM, voir aussi le §6.3.4). D'après les travaux de KEUM et de KONDO, la plupart des surfaces de KUMMER  $X = A/\sigma$  possèdent des automorphismes qui ont une entropie strictement positive et qui ne proviennent pas d'un automorphisme de  $A$  par passage au quotient (voir [77], [80], [78]).

**Exemple 3.9** (MAZUR, [86]). Déformons maintenant explicitement un exemple d'automorphisme « linéaire » sur une surface de KUMMER en un automorphisme sur une autre surface.

Considérons pour cela l'ensemble des surfaces K3 lisses de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . La formule d'adjonction montre que ces surfaces sont toutes les zéros d'un polynôme  $P(x, y, z)$  qui est de degré 2 par rapport à

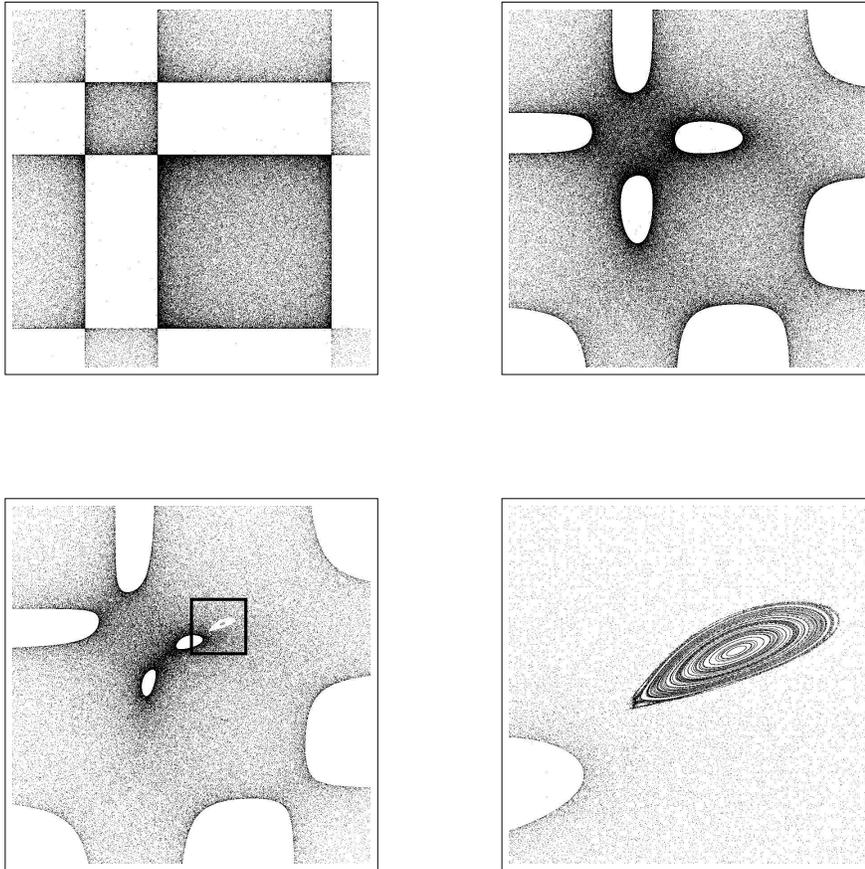


FIG. 2. Surfaces de KUMMER et déformation : La première figure, en haut à gauche, représente l'orbite de quelques points sur une surface de KUMMER non désingularisée. Les deux figures suivantes sont des déformations de cette dynamique, avec un petit zoom de la dernière déformation montrant un point fixe elliptique.

chacune des trois variables. Si l'on projette une telle surface  $X$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  en oubliant l'une des coordonnées,  $X$  est alors réalisée comme revêtement double de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Ceci détermine trois involutions, une par revêtement, que nous noterons  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Il se trouve que pour un choix générique de l'équation  $P$ , le groupe d'automorphismes de  $X$  coïncide avec le produit libre des groupes engendrés par ces involutions :

$$\text{Aut}(X) = \langle \sigma_x \rangle * \langle \sigma_y \rangle * \langle \sigma_z \rangle = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

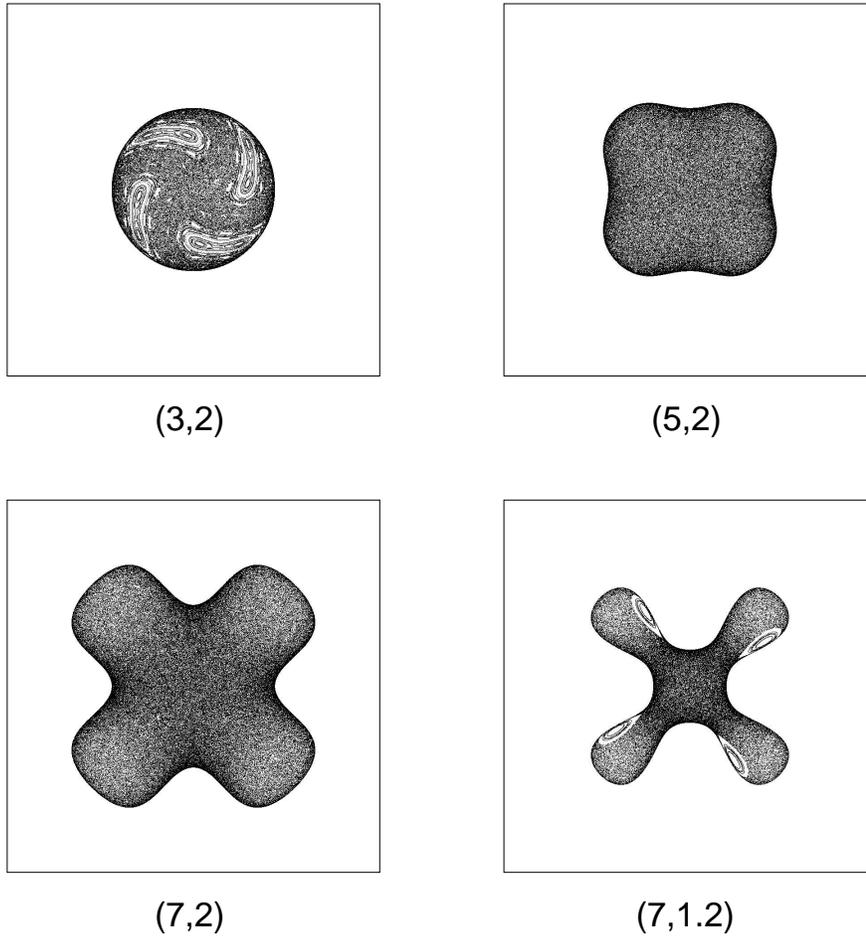


FIG. 3. Orbites sur des surfaces réelles : Quatre exemples de dynamiques sur la surface d'équation  $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)+Axyz=B$  où les paramètres  $(A,B)$  sont précisés

L'action de chaque involution sur la cohomologie de  $X$  est facile à évaluer et l'on obtient ainsi des automorphismes dont on sait explicitement calculer les degrés dynamiques. Par exemple, l'entropie de  $f = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_z$  est égale à  $\log(9 + 4\sqrt{5})$ .

Considérons maintenant une cubique plane lisse  $C$  écrite sous sa forme de WEIERSTRASS

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

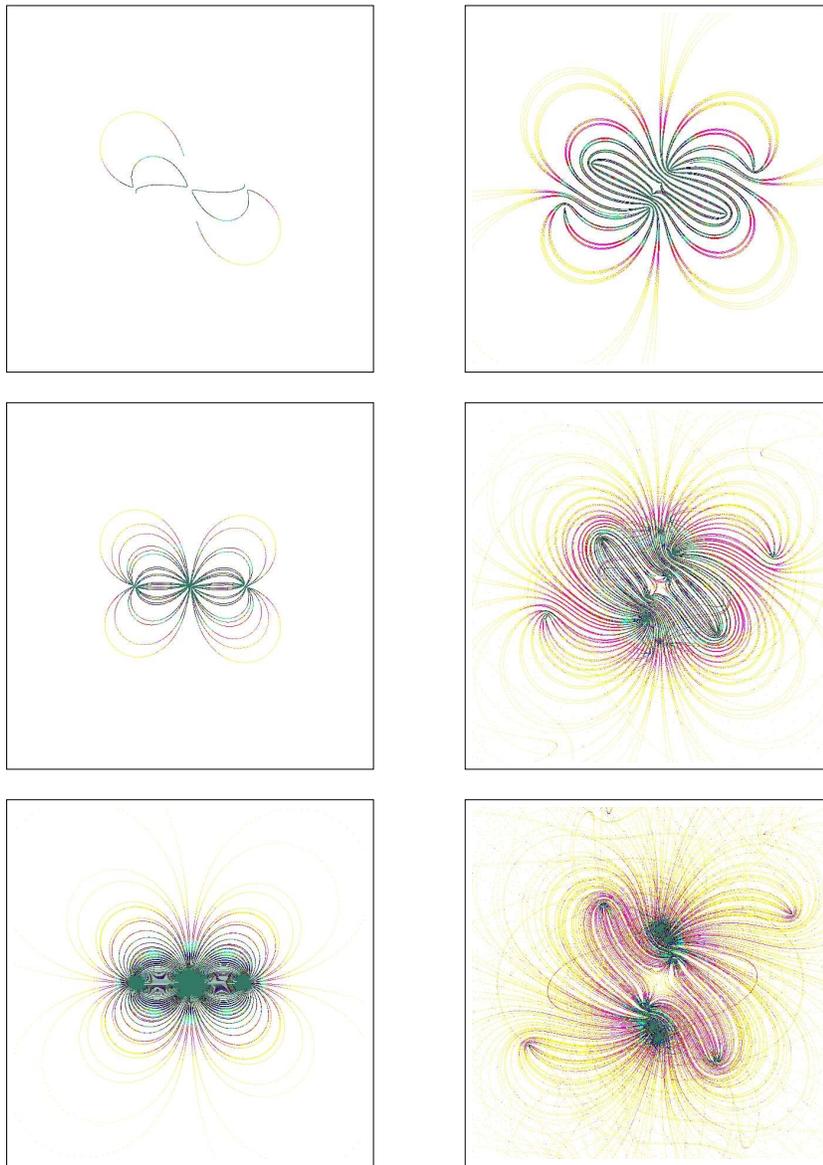


FIG. 4. Projections d'orbites complexes sur l'axe des  $x$  : Colonne de gauche : une seule orbite sur la surface d'équation  $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + Axyz = B$  pour  $A = 0.1$  et  $B = 1$ . Le nombre d'itérations est égal à 10 mille, 100 mille ou 500 mille. Colonne de droites : plusieurs orbites distinctes sur la même surface.

À chaque paire de points  $m_1 = (x_1, y_1), m_2 = (x_2, y_2)$  de  $C$  faisons correspondre la somme

$$m_3 = m_1 + m_2 = (x_3, y_3)$$

pour la loi de groupe sur  $C$  puis le triplet  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . Ceci détermine une application holomorphe de  $C \times C$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . L'image est la surface de KUMMER (singulière)  $(C \times C)/\sigma$  où  $\sigma$  est le passage à l'inverse. L'équation de la surface ainsi obtenue dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$  est

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \frac{g_2}{2}(xy + yz + zx) + g_3(x + y + z) + \frac{g_2^2}{16} = 2xyz(x + y + z).$$

Cette surface est donc de degré 2 par rapport à chaque variable et l'on peut y définir les trois involutions  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Par ailleurs, le groupe  $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$  agit sur  $C \times C$  linéairement (voir l'exemple 3.1) et, comme il n'y a pas de miracle, les transformations involutives  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$  sont induites respectivement par les involutions linéaires

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet de déformer explicitement les exemples linéaires de certaines surfaces de KUMMER en des automorphismes non linéaires. Les figures 2, 3 et 4 fournissent quelques simulations numériques obtenues par cette méthode. Elles ont été obtenues à l'aide d'un programme de MC-MULLEN développé par CRAMPON, PIT et moi-même.

### 3.2.3. Transformations rationnelles des surfaces K3.

Nous allons maintenant construire quelques transformations rationnelles sur des surfaces K3 et calculer leurs degrés dynamiques mais, auparavant, rappelons qu'une surface K3 ne possède pas d'endomorphisme holomorphe de degré strictement supérieur à 1 : un tel endomorphisme serait un revêtement non ramifié d'une variété simplement connexe (voir 2.9).

Remarquons tout d'abord que si  $E$  est une courbe de genre 1 avec  $k$  points marqués ( $k > 1$ ), on peut définir la multiplication par  $k + 1$  (il suffit de placer l'origine de  $E$  au barycentre des  $k$  points : cela laisse  $k^2$  choix pour ce barycentre, mais la multiplication par  $k + 1$  ne dépend pas de ce choix). Donnons nous maintenant une variété complexe compacte  $M$  et une fibration elliptique  $\pi : M \rightarrow B$ . Si  $M$  contient une sous-variété  $H$  de codimension 1 qui coupe les fibres génériques de  $\pi$  en  $k$  points, avec

$k > 0$ , la multiplication par  $k + 1$  le long des fibres de  $\pi$  détermine alors une transformation méromorphe de  $M$ . Lorsque  $M$  possède plusieurs fibrations elliptiques distinctes, on peut ensuite composer ces transformations méromorphes entre elles.

Considérons l'exemple d'une hypersurface lisse  $X$  de degré  $(2, 2, 2)$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^3$ . La projection de  $X$  sur l'un des  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  détermine une fibration elliptique qui possède des sections doubles. On peut donc définir la multiplication par  $3^q$  (pour tout  $q$ ) le long des trois fibrations ainsi déterminées, puis composer ces transformations rationnelles ensemble. Lorsque  $X$  est choisie de manière générique parmi les surfaces K3 de degré  $(2, 2, 2)$ , les transformations rationnelles ainsi construites *ne sont pas* cohomologiquement dilatantes : ces exemples sont des déformations des transformations linéaires sur les surfaces de KUMMER singulières construites au paragraphe 3.1.2. Parmi celles-ci, certaines sont cohomologiquement dilatantes, mais cette propriété est perdue par petite déformation car les degrés dynamiques ne varient que semi-continument.

Considérons un second exemple plus simple. Soit  $X$  un revêtement double de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié le long d'une courbe de bidegré  $(4, 4)$ . Il s'agit d'une surface K3 munie de deux fibrations elliptiques, issues des deux fibrations de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Si la courbe de ramification est générique, toute courbe algébrique tracée sur  $X$  est homologue à une combinaison linéaire de fibres de ces deux fibrations. Autrement dit, le groupe de NÉRON-SEVERI  $\text{NS}(X) = H^2(X, \mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(X, \mathbf{R})$  est isomorphe à  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ . Chaque fibre d'une des deux fibrations coupe les fibres de l'autre fibration en 2 points. On peut donc définir la multiplication par 3 le long de chacune des fibrations. L'action de ces deux transformations rationnelles  $f$  et  $g$  sur  $\text{NS}(X)$  correspondent aux matrices  $2 \times 2$  suivantes

$$f_* = \begin{pmatrix} 9 & 135 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 135 & 9 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors sans peine que le semi-groupe engendré par ces deux transformations rationnelles ne contient pas d'élément cohomologiquement dilatant.

Les deux questions suivantes paraissent ouvertes à l'heure actuelle. Il s'agit, en termes pompeux, de déterminer les « surfaces K3 à multiplication complexe ».

**Question 3.1.** Quelles sont les surfaces K3 qui possèdent une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante ?

**Question 3.2.** Les surfaces K3 projectives génériques possèdent-elles des transformations rationnelles dominantes de degré topologique  $> 1$  ? Par exemple, une surface quartique de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  générique possède-t-elle une telle transformation rationnelle ?

#### 3.2.4. Deux exemples en dimension supérieure.

L'exemple de MAZUR s'étend aux hypersurfaces de multidegré  $(2, \dots, 2)$  dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{n+1}$  : ceci fournit des exemples de variétés de CALABI-YAU irréductibles avec de nombreux automorphismes et de nombreuses transformations rationnelles.

Décrivons maintenant un exemple, dû à Claire VOISIN, d'une transformation rationnelle sur une variété symplectique irréductible de dimension 4.

Soit  $X$  une surface K3 projective. Soit  $M = X^{[2]}$  le produit symétrique constitué des paires de points de  $X$ , que l'on désingularise en éclatant la diagonale dans  $X \times X$  avant de passer au quotient par l'involution  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$ . La variété  $M$  est une variété symplectique de dimension 4. La théorie des déformations nous apprend que  $M$  peut être déformée en une famille à 20 paramètres de variétés projectives symplectiques ; une façon de déformer  $M$  est de déformer  $X$  elle-même en une autre surface K3 projective mais ceci ne couvre qu'une hypersurface dans l'espace des déformations. Par conséquent certaines déformations de  $M$  ne sont pas des produits symétriques.

Partons maintenant d'une hypersurface cubique lisse  $V$  dans  $\mathbb{P}^5(\mathbf{C})$ . Notons  $F(V)$  la variété qui paramètre les droites contenues dans  $V$ . Dans [10], BEAUVILLE et DONAGI montrent que  $F(V)$  est une variété symplectique irréductible de dimension 4 qui est une déformation de  $X^{[2]}$ , où  $X$  est une surface K3 de degré 14 dans  $\mathbb{P}^8(\mathbf{C})$ . Ceci permet d'obtenir de manière « concrète » des variétés symplectiques de dimension 4 qui ne sont pas des produits symétriques. Lorsque la cubique  $V$  est générique, le groupe de PICARD de  $F(V)$  est de dimension 1.

Venons en à la construction de VOISIN d'une transformation rationnelle dominante  $f$  sur la variété  $F(V)$ . Soit  $l$  un point de  $F(V)$ , *i. e.* une droite de

V. Si la situation est générique, il existe un unique plan  $\Pi_l$  (de dimension 2) de  $\mathbb{P}^5(\mathbf{C})$  qui est partout tangent à  $V$  le long de la droite  $l$ . Ce plan  $\Pi_l$  coupe alors  $V$  le long d'une courbe cubique constituée de  $l$ , qui compte doublement, et d'une seconde droite  $l'$ . L'application  $f$  définie par  $f(l) = l'$  détermine une application rationnelle dominante

$$f : F(V) \dashrightarrow F(V)$$

dont le degré topologique est égal à 16 (voir [109]). Cet exemple montre en particulier que la question 3.2 admet une réponse positive pour les variétés symplectiques de dimension 4.

### 3.3. Surfaces et variétés (presque) rationnelles.

Il reste maintenant à donner des exemples significatifs pour des variétés dont la dimension de KODAIRA est strictement négative, en particulier pour des variétés rationnellement connexes. Dans le paragraphe 3.3.1 nous présentons l'exemple célèbre de MANIN et ISKOVSKIKH (voir [73] et [74]). Au paragraphe suivant, nous décrivons un problème essentiellement ouvert qui nous semble intéressant : quelles sont les surfaces rationnelles qui possèdent un groupe infini d'automorphismes ?

#### 3.3.1. Variétés unirationnelles non rationnelles.

Soit  $M$  une hypersurface quartique lisse de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ . Dans [73], ISKOVSKIKH et MANIN montrent que le groupe des transformations birationnelles de  $M$  coïncide avec le groupe de ses automorphismes (qui est fini d'après le théorème 2.13). En particulier,  $M$  n'est pas une variété rationnelle. Cependant, on sait depuis SEGRE que certaines hypersurfaces quartiques lisses de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  sont unirationnelles. C'est le cas, par exemple, de l'hypersurface  $M_0$  d'équation

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_0x_4^3 + x_3^2x_4 = 6x_1^2x_2^2.$$

Il existe donc une application rationnelle dominante  $p : \mathbb{P}^3(\mathbf{C}) \dashrightarrow M_0$ . Soit  $\pi : M_0 \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbf{C})$  la projection de  $M_0$  sur un hyperplan quelconque de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ . Pour toute transformation rationnelle dominante  $f$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ , l'application  $p \circ f \circ \pi$  est une application rationnelle dominante de  $M_0$ . En prenant pour  $f$  un endomorphisme de grand degré on peut construire ainsi des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes sur  $M_0$ .

**Remarque 3.10.** Supposons que  $M$  soit maintenant une hypersurface quartique de  $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$  avec une unique singularité  $x_0$  qui est un point double ordinaire. Soit  $\overline{M}$  l'éclaté de  $M$  en ce point. Supposons que les vingt-quatre droites passant par  $x_0$  et contenues dans  $M$  sont deux-à-deux distinctes. Alors  $\text{Aut}(\overline{M})$  est un groupe infini, isomorphe au produit libre de 25 copies de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , et est d'indice fini dans le groupe des transformations birationnelles de  $\overline{M}$ .

### 3.3.2. Transformations holomorphes des surfaces rationnelles.

La dernière famille d'exemples que nous allons décrire concerne un problème délicat. Il s'agit de comprendre les surfaces rationnelles  $S$  qui possèdent un groupe infini d'automorphismes. Si  $\text{Aut}(S)$  contient une infinité d'éléments isotopes à l'identité, la surface  $S$  possède un champ de vecteurs holomorphes : cette situation est bien comprise (voir [30]). Dans le cas contraire, et si  $\text{Aut}(S)$  est infini, il existe des automorphismes  $f$  dont aucun itéré n'est isotope à l'identité (voir le §4.2) et deux cas se produisent :

- $\lambda_1(f) = 1$  et alors  $f$  préserve une fibration elliptique ; puisque les fibrations elliptiques des surfaces rationnelles s'obtiennent toutes à partir de pincesaux d'HALPHEN, ces automorphismes sont bien compris (voir [49], [63]) ;
- $\lambda_1(f) > 1$  et l'entropie de  $f$  est strictement positive ; à l'heure actuelle, on ne sait pas déterminer les surfaces rationnelles qui possèdent de tels automorphismes.

Dans la suite, nous donnons donc quelques exemples sporadiques et présentons une construction dûe a HARBOURNE et MCMULLEN dans un cas particulier proche des surfaces K3.

Commençons par deux exemples construits par quotient d'un tore ou d'une surface K3.

**Exemple 3.11 (KUMMER).** Soit  $E$  la courbe elliptique obtenue en quotientant la droite complexe  $\mathbf{C}$  par le réseau  $\Lambda$  des entiers de GAUSS  $\mathbf{Z}[i]$  (resp. des entiers d'EISENSTEIN  $\mathbf{Z}[j]$ ). Le groupe  $\text{SL}(2, \Lambda)$  agit linéairement sur  $\mathbf{C}^2$  en préservant le réseau  $\Lambda \times \Lambda$ . Par passage au quotient, tout élément  $B$  de  $\text{SL}(2, \Lambda)$  détermine donc un automorphisme  $f_B$  de la variété abélienne  $E \times E$ , qui commute avec l'homothétie  $\eta : (x, y) \rightarrow (ix, iy)$

(resp.  $(x, y) \rightarrow (jx, jy)$ ). Passant à nouveau au quotient, puis désingularisant  $E \times E/\eta$ , nous obtenons un automorphisme  $\overline{f_B}$  d'une surface rationnelle. L'entropie de cet automorphisme est strictement positive dès que l'une des valeurs propres de  $B$  a un module strictement plus grand que 1.

**Exemple 3.12** (COBLE). Soit  $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{C})$  une courbe sextique avec 10 points doubles. Soit  $X$  la surface obtenue en éclatant ces 10 points. Si  $C$  est choisie génériquement, le groupe  $\text{Aut}(X)$  est un groupe discret qui contient le produit libre de 10 copies du groupe abélien  $\mathbf{Z}^8$ . La surface  $X$ , dénommée surface de COBLE, est le quotient d'une surface K3 par une involution qui a des points fixes. Les automorphismes de  $X$  proviennent de ceux de la surface K3 (voir [38]).

Voici maintenant deux exemples sporadiques apparus récemment dans la littérature.

**Exemple 3.13** (TAKENAWA). La transformation birationnelle du plan projectif définie par

$$f[x : y : z] = [y^3 : -xy^2 + y^3 + z^3 : y^2z]$$

devient un automorphisme d'une surface rationnelle si l'on effectue successivement 15 éclatement judicieux du plan projectif. L'entropie de cet automorphisme est strictement positive.

**Exemple 3.14** (BEDFORD et KIM, MCMULLEN). BEDFORD et KIM se sont intéressés à la famille à deux paramètres

$$f_{a,b}(x, y) = (a + y, b + y/x).$$

La transformation birationnelle  $f_{a,b}$  éclate les sommets et contracte les côtés du triangle  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  avec  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (\infty, 0)$  et  $p_3 = (0, \infty)$  et l'image de ce triangle est le triangle  $\Delta(p_2, p_3, p_4)$  avec  $p_4 = (a, b)$ .

L'ensemble des paramètres  $(a, b)$  pour lesquels l'orbite de  $p_4$  repasse par  $p_1$  à l'instant  $n$  est déterminé par deux équations polynomiales ; l'ensemble des solutions  $(a, b) \in \mathbf{C}^2$  de ce système d'équations sera noté  $P(n)$ . BEDFORD et KIM montrent que  $f_{a,b}$  se relève en un automorphisme d'une surface rationnelle (obtenue en éclatant l'orbite de  $p_4$ ) précisément lorsque  $(a, b)$  est un élément de  $P(n)$  pour un certain  $n$ . De plus,

- lorsque  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  est périodique de période 6, 5, 8, 12, 18 ou 30,

- lorsque  $n = 6$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  préserve une fibration elliptique,
- et lorsque  $n \geq 7$  l'automorphisme  $f_{a,b}$  a une entropie topologique strictement positive ; celle-ci est égale au logarithme de la racine dominante de l'équation

$$t^{n+1}(t^3 - t - 1) + t^3 + t^2 - 1 = 0.$$

Ceci conduit à

- l'existence pour  $n = 7$  d'un automorphisme dont l'entropie est égale au logarithme du nombre de LEHMER  $\lambda_L = 1,1763$  ;
- l'existence d'automorphismes avec un point fixe attractif ; ces automorphismes ne proviennent donc pas d'un automorphisme d'une surface de dimension de KODAIRA positive ou nulle en effectuant un quotient fini équivariant.

Récemment, MCMULLEN a obtenu un procédé général pour construire de tels automorphismes en développant les travaux antérieurs de HARBORNE et NAGATA. Ces automorphismes sont définis sur les surfaces rationnelles « anticanoniques » ; ce sont celles qui possèdent une unique (à un facteur multiplicatif près) 2-forme méromorphe  $\Omega$  ne s'annulant pas. La géométrie de ces surfaces ressemble en bien des points à celle des surfaces K3.

Si  $f$  est un automorphisme d'une telle surface,  $f^*\Omega$  est proportionnelle à  $\Omega$ . En particulier,  $f$  préserve le lieu des pôles de  $\Omega$ . En projetant birationnellement la surface  $S$  sur le plan projectif,  $f$  détermine alors une transformation birationnelle du plan qui préserve une courbe cubique.

Les travaux de MCMULLEN permettent de construire des automorphismes sur certaines surfaces anticanoniques tout en prescrivant l'action de l'automorphisme sur les groupes de cohomologie de la surface. Il s'agit d'un théorème analogue au théorème de TORELLI pour les surfaces K3. Ceci permet de retrouver les exemples de BEDFORD et KIM, mais aussi de montrer les propriétés suivantes (en utilisant [A], [Abis]) :

**Théorème 3.15** (MCMULLEN, [89]).

- (i) *L'automorphisme de LEHMER construit par BEDFORD et KIM est un automorphisme d'entropie minimale parmi tous les automorphismes de surfaces complexes compactes d'entropie strictement positive.*

- (ii) *Il existe un automorphisme d'une surface projective rationnelle dont l'entropie est strictement positive et qui possède un domaine de SIEGEL : l'automorphisme est holomorphiquement conjugué à une rotation irrationnelle sur un ouvert de la surface.*
- (iii) *Il existe un automorphisme d'une surface rationnelle dont l'entropie est positive et dont les points périodiques s'équirépartissent vers une mesure de probabilité étrangère à la mesure de LEBESGUE.*

**Remarque 3.16.**

- 1.- Nous expliquerons au paragraphe §5.3.1 quelle est la mesure de probabilité vers laquelle s'équirépartissent les points périodiques du troisième exemple.
- 2.- L'existence de domaines de SIEGEL était déjà connue depuis [87] pour des surfaces K3 non projectives.

**Remarque 3.17.** Soit  $X$  une surface K3 projective et  $\Omega$  une 2-forme holomorphe non nulle sur  $X$ . Si  $f$  est un automorphisme de  $X$ , alors  $f^*\Omega = \xi\Omega$  où  $\xi$  est un complexe de module 1 (le degré de  $f$ ) qui est un entier algébrique (c'est une valeur propre de  $f^* : H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ ). Pour tout automorphisme de corps  $\sigma \in \text{Aut}(C)$ ,  $\sigma(\xi)$  vérifie les mêmes propriétés car si l'on applique  $\sigma$  aux coefficients des polynômes définissant  $X$  et  $f$ , on obtient un nouvel automorphisme d'une surface K3 vérifiant  $(\sigma f)^*\sigma\Omega = \sigma(\xi)\sigma\Omega$ . Le théorème de KRONECKER montre alors que  $\xi$  est une racine de l'unité. Il y a donc des résonances entre les valeurs propres de la différentielle de  $f$  en chacun de ses points périodiques. La linéarisation de  $f$  autour de ses points périodiques est donc délicate et, pour l'instant, on ne dispose pas d'exemples de domaines de SIEGEL sur les surfaces K3 projectives. Il se pourrait tout-à-fait qu'aucun exemple de tel domaine n'existe.



#### 4. GROUPES D'AUTOMORPHISMES

Depuis quelques dizaines d'années, on cherche à analyser la complexité des groupes de difféomorphismes des variétés compactes en les comparant aux groupes les mieux connus : les groupes linéaires et les groupes de LIE. Donnons deux exemples de propriétés satisfaites par les groupes de LIE et les groupes linéaires.

La théorie de LIE, CARTAN, ..., permet de décrire les représentations linéaires des groupes de LIE. Celle de KAZHDAN, MARGULIS, MOSTOW, ..., décrit les représentations linéaires des réseaux des groupes de LIE semi-simples et connexes. Par exemple, si  $G$  est un groupe de LIE simple connexe de rang réel au moins 2 et si  $\Gamma$  est un réseau de  $G$ , alors toute représentation ZARISKI-dense de  $\Gamma$  dans  $SL(n, \mathbf{R})$  est la restriction d'une représentation linéaire du groupe  $G$  tout entier ; cette dernière, à son tour, est décrite par la théorie de LIE.

Les travaux de MALCEV, SELBERG et TITS fournissent des obstructions pour plonger un groupe  $\Gamma$  de type fini dans un groupe linéaire. Le groupe  $\Gamma$  doit

- être résiduellement fini : l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduite à l'élément neutre (propriété de MALCEV) ;
- virtuellement sans torsion :  $\Gamma$  contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion (propriété de SELBERG) ;
- satisfaire l'alternative de TITS : ou bien  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien, ou bien  $\Gamma$  contient un sous-groupe d'indice fini résoluble.

La question est alors de savoir ce qu'il reste de ce type de résultats pour les groupes de difféomorphismes des variétés compactes. Une conjecture phare dans ce domaine est celle de ZIMMER suivant laquelle les travaux de MARGULIS devraient s'étendre aux actions non linéaires des réseaux. La version la plus simple de cette conjecture est la suivante.

**Conjecture (ZIMMER)** : Soit  $G$  un groupe de LIE réel simple connexe et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . S'il existe un morphisme d'image infinie de  $\Gamma$  dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte  $M$ , le rang réel de  $G$  est inférieur ou égal à la dimension de  $M$ .

Le but de cette partie est de montrer qu'on peut apporter des réponses positives complètes à ce type de questions lorsqu'on étudie les actions par difféomorphismes holomorphes sur des variétés kählériennes compactes.

Nous commencerons par présenter quelques résultats qui illustrent le cas des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  puis nous traiterons le cas holomorphe. Le dernier paragraphe concerne le cas des automorphismes polynomiaux du plan affine complexe  $\mathbf{C}^2$ .

#### 4.1. Groupes de difféomorphismes.

Soit  $M$  une variété compacte connexe (réelle, lisse, de classe  $C^\infty$ ). Le groupe  $\text{Diff}^\infty(M)$  des difféomorphismes de  $M$  est un groupe « de dimension infinie ». Dès la dimension 1, c'est-à-dire lorsque  $M$  est le cercle  $\mathbb{S}^1$ , les propriétés principales des groupes linéaires tombent en défaut pour  $\text{Diff}^\infty(M)$ .

Considérons par exemple le groupe  $G$  de THOMPSON constitué des homéomorphismes de  $\mathbb{S}^1$  affines par morceaux qui sont définis par des données dyadiques ([61]) : un homéomorphisme  $g$  de  $\mathbb{S}^1$  est un élément de  $G$  s'il est revêtu par un homéomorphisme  $\tilde{g}$  de  $\mathbf{R}$  tel que

- (i)  $\tilde{g}$  permute les réels dyadiques  $n2^m$  ( $n$  et  $m$  dans  $\mathbf{Z}$ ) ;
- (ii) il existe une suite croissante de réels dyadiques  $x_i$  telle que sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  l'homéomorphisme  $\tilde{g}$  est affine et à pente dyadique.

Ce groupe  $G$  est un groupe de présentation finie infini qui est simple. En particulier ce groupe viole la propriété de MALCEV. Pourtant, ce groupe est conjugué par un homéomorphisme à un sous-groupe de  $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S}^1)$  (voir [61], [60]). En outre,  $G$  contient un sous-groupe de type fini qui n'est pas virtuellement résoluble mais ne contient aucun groupe libre non abélien (voir [29]). Le groupe  $\text{Diff}^\infty(\mathbb{S}^1)$  ne satisfait donc pas non plus l'alternative de TITS. Un théorème récent de MARGULIS fournit tout de même une version faible de cette alternative : tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Homo}(\mathbb{S}^1)$  contient un groupe libre non abélien ou préserve une mesure de probabilité ; quand les orbites de  $\Gamma$  sont toutes denses, ou bien  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien ou bien  $\Gamma$  est conjugué par un homéomorphisme à un sous-groupe de  $\text{SO}(2, \mathbf{R})$  (voir [60]).

La conjecture de ZIMMER, elle, est valable pour les difféomorphismes du cercle et s'énonce comme suit dans sa forme la plus simple.

**Théorème 4.1** (WITTE, GHYS, BURGER et MONOD). *Soit  $G$  un groupe de LIE réel simple et connexe. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Si le rang réel de  $G$*

est supérieur ou égal à 2, tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$  a une image finie.

À partir de la dimension 2, la situation est plus mystérieuse. Signalons toutefois les deux résultats suivants.

**Théorème 4.2** (KAIMANOVICH, MASUR, FARB, POLTEROVICH). *Soient  $S$  une surface compacte orientable sans bord et  $\mathcal{M}(S)$  son groupe modulaire (ou mapping class group). Soit  $G$  un groupe de LIE réel, simple et connexe dont le rang réel est supérieur ou égal à 2. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ .*

- (i) *Tout morphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{M}(S)$  a une image finie.*
- (ii) *Si  $\omega$  est une forme d'aire sur  $S$ , et si  $\Gamma$  n'est pas cocompact, tout morphisme de  $\Gamma$  dans le groupe des difféomorphismes de  $S$  qui préservent  $\omega$  a une image finie.*

Nous verrons au paragraphe 4.3 un énoncé analogue pour les actions de réseaux par difféomorphismes holomorphes sur les variétés kählériennes compactes.

#### 4.2. Automorphismes des variétés complexes compactes.

Soit  $M$  une variété complexe compacte. Le théorème de BOCHNER et MONTGOMERY affirme que, muni de la topologie de la convergence uniforme, le groupe  $\text{Aut}(M)$  est un groupe de LIE complexe dont l'algèbre de LIE est l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$ . Il s'agit donc d'un groupe de dimension finie, mais qui peut avoir une infinité de composantes connexes, comme le montrent les exemples 3.1 et 3.9.

Lorsque  $M$  est kählérienne, la composante neutre  $\text{Aut}(M)^0$  est décrite par deux théorèmes de LIEBERMAN (voir [83]). Tout d'abord,  $\text{Aut}(M)^0$  est un sous-groupe d'indice fini dans le noyau de la représentation linéaire

$$\begin{aligned} \text{Aut}(M) &\rightarrow \text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z})) \\ f &\mapsto f^*. \end{aligned}$$

En particulier, le groupe  $\text{Aut}(M)^\sharp = \text{Aut}(M)/\text{Aut}(M)^0$  s'injecte presque dans le groupe linéaire  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z}))$ .

Notons  $a_M : M \rightarrow \text{Alb}(M)$  le morphisme d'ALBANESE. Pour tout élément  $g$  de  $\text{Aut}(M)$  il existe une translation  $\tau(g)$  de  $\text{Alb}(M)$  pour laquelle

$$a_M \circ g = \tau(g) \circ a_M.$$

D'après [83], ceci détermine un morphisme

$$\tau : \text{Aut}(M)^0 \rightarrow \text{Alb}(M)$$

dont le noyau est un groupe algébrique complexe linéaire.

Ces deux résultats montrent que  $\text{Aut}(M)$  est très proche des groupes linéaires. On dispose en particulier du théorème suivant (l'alternative de TITS résulte directement de ce qui vient d'être dit ; voir [7] pour les propriétés de MALCEV et SELBERG).

**Théorème 4.3** (BASS et LUBOTZKY, LIEBERMAN). *Soit  $M$  une variété projective complexe. Le groupe  $\text{Aut}(M)$  des difféomorphismes holomorphes de  $M$  vérifie l'alternative de TITS et les propriétés de MALCEV et SELBERG.*

#### 4.3. Conjecture de ZIMMER.

Dans [J], nous avons résolu la conjecture de ZIMMER pour le cas particulier des actions holomorphes sur les variétés kählériennes compactes.

**Théorème 4.4** (CANTAT, [J]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte kählérienne et  $\text{Aut}(M)$  le groupe de ses difféomorphismes holomorphes. Soit  $G$  un groupe de LIE réel, simple et connexe. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . S'il existe un morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(M)$  dont l'image est infinie, le rang réel de  $G$  est inférieur ou égal à la dimension complexe de  $M$ .*

**Remarque 4.5.** L'inégalité sur le rang est plus forte que celle conjecturée par ZIMMER car elle concerne la dimension complexe de  $M$ , mais cette amélioration ne doit pas être considérée comme une surprise puisque l'action est holomorphe.

Outre les travaux de MARGULIS et ZIMMER, les points clés de la démonstration du théorème 4.4 reposent sur

1. les résultats de BOCHNER et MONTGOMERY concernant la structure du groupe des automorphismes des variétés complexes compactes, couplés à ceux de LIEBERMAN concernant les variétés kählériennes ;
2. un résultat récent de DINH et SIBONY concernant les actions holomorphes de groupes commutatifs sur les variétés kählériennes compactes.

C'est le résultat de DINH et SIBONY qui, associé à un théorème de PRASAD et RAGHUNATHAN, permet d'apporter la touche finale à la démonstration.

Le théorème 4.4 peut être complété par les faits suivants, eux-mêmes démontrés dans [J]. Soient  $M$  une variété kählérienne compacte,  $G$  un groupe de LIE simple et connexe et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $\rho$  un morphisme de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(M)$ .

- (i) Si  $\text{rang}_{\mathbf{R}}(G) \geq \dim_{\mathbf{C}}(M)$ , l'action de  $\rho(\Gamma)$  sur la cohomologie de  $M$  détermine un sous-groupe fini de  $\text{GL}(H^*(M, \mathbf{Z}))$ . Ce résultat est un analogue kählérien du théorème 4.2, (i).
- (ii) si  $\text{rang}_{\mathbf{R}}(G) = \dim_{\mathbf{C}}(M)$  et si  $\rho(\Gamma)$  est infini, il existe un morphisme de groupes de LIE injectif de  $G$  dans  $\text{Aut}(M)^0$ . En ce cas,  $M$  est quasi-homogène : le groupe  $\text{Aut}(M)^0$  a une orbite ouverte.

Il serait intéressant de préciser le cas critique où  $\text{rang}_{\mathbf{R}}(G) = \dim_{\mathbf{C}}(M) - 1$ ,  $\text{Aut}(M)$  est discret et  $\Gamma$  s'injecte dans  $\text{Aut}(M)$ . Les variétés de KUMMER fournissent de tels exemples. De manière concrète, on peut formuler la question suivante :

**Question 4.1.** Quelles sont les variétés de CALABI-YAU de dimension 3 qui possèdent une action effective de  $\text{SL}(3, \mathbf{Z})$  ?

#### 4.4. Le plan affine.

Un cas plus simple est celui des automorphismes polynomiaux du plan affine complexe  $\mathbf{C}^2$ . Notons  $\text{Aff}(\mathbf{C}^2)$  le groupe des transformations affines du plan et  $\text{El}(\mathbf{C}^2)$  le groupe des automorphismes polynomiaux qui préservent le feuilletage du plan par droites parallèles horizontales.

Le théorème de JUNG affirme que  $\text{Aut}(\mathbf{C}^2)$  est le produit de  $\text{Aff}(\mathbf{C}^2)$  et  $\text{El}(\mathbf{C}^2)$  amalgamé le long de leur intersection :

$$\text{Aut}(\mathbf{C}^2) = \text{Aff}(\mathbf{C}^2) *_S \text{El}(\mathbf{C}^2),$$

où  $S$  est donc le groupe résoluble constitué des transformations affines de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dy + e \end{pmatrix}.$$

La théorie de BASS-SERRE montre alors que  $\text{Aut}(\mathbf{C}^2)$  agit sur un arbre simplicial. Ceci permet de répondre en détails aux questions du programme de ZIMMER.

**Théorème 4.6** (BASS et LUBOTZKY, LAMY). *Le groupe des automorphismes polynomiaux de  $\mathbf{C}^2$  vérifie les propriétés de MALCEV et de SELBERG ainsi que l'alternative de TITS.*

**Théorème 4.7** (CANTAT et LAMY, [K]). *Soit  $G$  un groupe de Lie réel, connexe et simple. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . S'il existe un morphisme injectif  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{C}^2)$ , le groupe  $G$  est isomorphe à  $\text{PSO}(1, n)$  ou à  $\text{PSU}(1, n)$  pour un certain entier  $n$ ; de plus, si  $G$  est différent de  $\text{PSO}(1, 2)$  l'image de  $\rho$  est contenue dans un conjugué du groupe affine.*

Puisque le groupe  $\text{PSO}(1, 2)$  est isomorphe à  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ , les réseaux intéressants qui sont susceptibles d'être plongés dans le groupe  $\text{Aut}(\mathbf{C}^2)$  (tout en "sortant" du groupe affine) sont les groupes fondamentaux de surfaces. Pour tout entier  $g$  supérieur ou égal à 1, notons  $\Gamma_g$  le groupe fondamental de la surface orientable compacte de genre  $g$ .

**Théorème 4.8** (CANTAT et LAMY, [K]). *Pour tout entier  $g$  supérieur ou égal à 2 il existe des sous-groupes de  $\text{Aut}(\mathbf{R}^2)$  isomorphes à  $\Gamma_g$  qui ne sont pas conjugués à un sous-groupe de  $\text{Aff}(\mathbf{C}^2)$ .*

Complétons ces résultats par une application aux groupes cristallographiques du plan (voir [17]). Disons qu'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Diff}^\infty(\mathbf{R}^n)$  est cristallographique si  $\Gamma$  agit de manière discrète et cocompacte sur  $\mathbf{R}^n$ .

L'étude des sous-groupes cristallographiques du groupe affine comporte encore des questions ouvertes qui semblent redoutables. Par exemple, on ne sait pas si les groupes cristallographiques affines sont virtuellement polycycliques (conjecture de AUSLANDER). On sait par contre qu'il existe des groupes polycycliques qui ne contiennent aucun sous-groupe d'indice fini qui soit isomorphe à un groupe affine cristallographique : ce résultat de BENOIST répond par la négative à une question de MILNOR (voir [16]). Mais plus récemment, DEKIMPE et IGODT ont montré que tout groupe polycyclique est isomorphe à un groupe cristallographique de transformations polynomiales de  $\mathbf{R}^n$  (pour un certain  $n$ ). Suite à ces travaux, nous avons répondu positivement à une question de DEKIMPE demandant de classer les groupes cristallographiques polynomiaux du plan.

**Théorème 4.9** (BENOIST et DEKIMPE, CANTAT et LAMY, [K]).

- (i) *Tout sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbf{R}^2)$  isomorphe à  $\Gamma_g$  (avec  $g \geq 2$ ) contient un élément distinct de l'identité qui possède un point fixe dans  $\mathbf{R}^2$ .*

- (ii) *Il est impossible de trouver un modèle du revêtement universel de la surface orientable compacte de genre  $g \geq 2$  pour lequel le groupe d'automorphismes agirait par transformations polynomiales du plan.*
- (iii) *Tout groupe cristallographique constitué de transformations polynomiales du plan  $\mathbf{R}^2$  contient un sous-groupe d'indice fini qui est conjugué au groupe des translations entières par un automorphisme polynomial de  $\mathbf{R}^2$ .*



## Second chapitre

### Dynamique et rigidité.

Le premier but de cette seconde partie est de décrire la dynamique des transformations rationnelles dans deux situations qui sont assez bien comprises au niveau ergodique : les transformations « cohomologiquement dilatantes » et les automorphismes des surfaces.

Nous ne donnerons pas de détails sur les preuves mais utiliserons les résultats obtenus pour décrire plus précisément certains liens entre géométrie complexe, dynamique holomorphe et géométrie diophantienne.

Nous verrons ensuite comment il est possible de caractériser les transformations dont la dynamique est lisse et uniforme : il s'agit de caractériser les exemples de LATTÈS et les automorphismes dont la dynamique est de type ANOSOV.



## 5. DYNAMIQUE

Dans cette partie, nous présentons quelques-unes des propriétés stochastiques satisfaites par la dynamique des transformations rationnelles des variétés projectives. Les deux classes de transformations pour lesquelles on sait montrer de telles propriétés sont les transformations cohomologiquement dilatantes et les automorphismes des surfaces. Après quelques définitions classiques de théorie ergodique, nous décrirons chacune de ces deux familles. Le dernier paragraphe applique les idées précédentes à des questions de géométrie hyperbolique complexe et de géométrie diophantienne.

### 5.1. Mesure d'entropie maximale.

#### 5.1.1. Entropie métrique.

Soient  $X$  un espace mesurable et  $f : X \rightarrow X$  une transformation mesurable. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité invariante sous l'action de  $f$ , ce qui signifie que

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

pour toute partie mesurable  $A$  de  $X$ . L'entropie métrique de  $f$  relative à  $\mu$  est définie de la manière suivante. Pour toute partition  $\mathcal{P}$  de  $X$  en un nombre fini d'atomes mesurables  $A_1, \dots, A_k$ , posons

$$h_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k -\mu(A_j) \log(\mu(A_j)).$$

Fixons une telle partition  $\mathcal{P}$  et notons  $\mathcal{P}_n$  la partition obtenue en intersectant les atomes de  $\mathcal{P}$ ,  $f^*(\mathcal{P})$ ,  $\dots$ ,  $(f^n)^*(\mathcal{P})$ . Deux points  $x$  et  $y$  sont dans le même atome de la partition  $\mathcal{P}_n$  si à chaque instant  $i$  entre 0 et  $n$  les points  $f^i(x)$  et  $f^i(y)$  sont dans le même atome  $A_{j_i}$  de la partition  $\mathcal{P}$ . L'entropie de  $f$  relativement à  $\mu$  et à  $\mathcal{P}$  est alors définie par

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_\mu(\mathcal{P}_n))$$

et l'entropie métrique  $h_\mu(f)$  est le supremum de ces entropies lorsque  $\mathcal{P}$  décrit l'ensemble des partitions mesurables finies de  $X$  (voir [76] ou [84]).

Il se trouve que

- (i) si  $f$  est une transformation continue d'un espace métrique compact (muni de la tribu des boréliens)

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu} (h_\mu(f))$$

- où  $\mu$  décrit l'ensemble des mesures de probabilité  $f$ -invariantes (principe variationnel de GOODMAN) ;
- (ii) si  $f$  est une transformation de classe  $C^\infty$  sur une variété compacte, ce supremum est atteint (théorème de NEWHOUSE).

### 5.1.2. Dilatation.

Lorsqu'une mesure invariante  $\mu$  a une entropie métrique strictement positive, la transformation  $f$  doit dilater certaines zones de l'ensemble  $X$ . Précisons ceci par deux résultats généraux.

Soient  $f$  une transformation continue d'un espace métrique compact  $X$  et  $\mu$  une mesure de probabilité  $f$ -invariante. Pour tout point  $x$  de  $X$  et pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, notons  $h_\mu(f, x, \varepsilon)$  la quantité

$$h_\mu(f, x, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n(x, \varepsilon))$$

où  $B_n(x, \varepsilon)$  est l'ensemble des points  $y$  de  $X$  dont l'orbite entre 0 et  $n$  reste  $\varepsilon$ -proche de  $x$  à chaque instant. Notons  $h_\mu(f, x)$  la limite de  $h_\mu(f, x, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. BRIN et KATOK ont montré que ceci détermine une fonction intégrable sur  $X$  pour laquelle

$$h_\mu(f) = \int_X h_\mu(f, x) d\mu(x).$$

Supposons que  $\mu$  est ergodique, ce qui signifie que tout ensemble mesurable invariant est de mesure nulle ou totale, ou encore que toute fonction intégrable  $f$ -invariante est constante (presque partout). Dans ce cas, la fonction  $h_\mu(f, x)$  est constante, car invariante. Si l'entropie de  $f$  vis-à-vis de  $\mu$  est strictement positive, ceci montre que les itérés de  $f$  distordent  $X$  exponentiellement vite en tout point générique pour la mesure  $\mu$ .

L'inégalité de RUELLE fournit un autre résultat allant dans le même sens. Elle majore l'entropie métrique d'une transformation  $C^1$  d'une variété compacte par l'intégrale de la somme de ses exposants de LYAPOUNOFF positifs :

$$h_\mu(f) \leq \int_M \chi^+(f, x) d\mu(x).$$

Le lecteur pourra consulter [76] ou [84] pour la définition précise des exposants de LYAPOUNOFF.

### 5.1.3. Exemples.

Donnons maintenant deux exemples qui seront repris et généralisés par la suite.

**Exemple 5.1** (Polynômes d'une variable complexe). Soit  $f(z)$  un polynôme d'une variable complexe de degré  $d$ . La transformation  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  s'étend à la sphère de RIEMANN  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  en posant  $f(\infty) = \infty$  : ceci détermine une application holomorphe de degré topologique  $d$ . L'entropie topologique de  $f$  est alors égale au logarithme de  $d$  (voir le théorème 2.1). Lorsque celle-ci est strictement positive, c'est-à-dire lorsque  $d \geq 2$ ,  $f$  possède une unique mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ , qui peut être décrite de trois façons différentes. Premièrement, si  $P_n(f)$  désigne l'ensemble des points périodiques de  $f$  de période  $n$ , alors

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|P_n(f)|} \sum_{y \in P_n(f)} \delta_y \right).$$

Deuxièmement, il existe un ensemble  $\mathcal{E}(f)$  de cardinal inférieur ou égal à 2 tel que, pour tout  $x$  hors de cet ensemble,

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{d^n} \sum_{z \in f^{-n}(x)} \delta_z \right).$$

Enfin,  $\mu_f$  décrit le comportement asymptotique de la dérivée de  $f^n$  : si  $\omega$  est une forme de FUBINI-STUDY sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  dont l'aire totale vaut 1, la suite de formes différentielles

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega$$

converge vers  $\mu_f$  au sens des mesures. Nous renvoyons à [23] pour ces propriétés.

**Exemple 5.2** (Applications dilatantes). Soit  $M$  une variété compacte. Un endomorphisme  $f$  de  $M$  de classe  $C^1$  est « dilatant » s'il existe une métrique riemannienne sur  $M$  et un nombre réel  $\chi$  strictement plus grand que 1 tels que

$$\|Df(v)\| \geq \chi \|v\|$$

pour tout vecteur  $v$  tangent à  $M$ .

Pour une telle transformation on sait que (voir par exemple [102], [99] et [64])

- l'entropie topologique de  $f$  est strictement positive et se calcule à l'aide de l'action de  $f$  sur le groupe fondamental de  $M$  (formule analogue à celle produite par le théorème 2.1) ;
- $f$  préserve une unique mesure de probabilité  $\nu_f$  absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE de  $M$  ; si  $f$  est de classe  $C^k$ , avec  $2 \leq k \leq \infty$ , alors  $\nu_f$  est déterminée par une densité strictement positive de classe  $C^{k-1}$  ;
- $f$  admet une unique mesure d'entropie maximale, notée  $\mu_f$ , et celle-ci décrit la répartition des points périodiques et des préimages de points génériques.

En général,  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE et diffère donc de  $\nu_f$ . Pour les endomorphismes du cercle définis par

$$\tau_d(z) = z^d, \quad d \neq -1, 0, 1,$$

ces deux mesures coïncident avec la mesure de HAAR du cercle.

## 5.2. Transformations cohomologiquement dilatantes.

Soient  $M$  une variété complexe compacte kählérienne de dimension  $d$  et  $f : M \dashrightarrow M$  une transformation méromorphe de  $M$  qui est cohomologiquement dilatante (voir le §2.1.4, définition 2.4). Rappelons que cela signifie que le degré topologique de  $f$ , noté  $\lambda_d(f)$ , majore strictement ses autres degrés dynamiques  $\lambda_p(f)$ .

### 5.2.1. Mesure d'entropie maximale.

Depuis les travaux de BRIEND, DUVAL et GUEDJ, nous savons que ces transformations jouissent de propriétés dynamiques remarquables qui généralisent le cas de la dimension 1 et les apparentent aux endomorphismes dilatants des variétés compactes (voir [28], [69] et [47]).

**Théorème 5.3** (BRIEND et DUVAL, GUEDJ, DINH et SIBONY). *Si  $M$  est une variété projective complexe et si  $f$  est une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante de  $M$ , alors*

- (i) *la transformation  $f$  possède une unique mesure invariante d'entropie maximale, qui vaut  $\log(d_t(f))$  ; cette mesure est ergodique ;*
- (ii) *les points périodiques (resp. périodiques et répulsifs) de  $f$  s'équirépartissent pour cette mesure ;*

- (iii) pour tout point  $x$  en dehors d'un ensemble exceptionnel pluripolaire  $E(f)$ , les images réciproques  $f^{-n}\{x\}$  s'équirépartissent pour cette mesure  $\mu_f$  ;
- (iv) les exposants de LYAPOUNOFF de cette mesure sont strictement positifs ;
- (v) la mesure  $\mu_f$  est caractérisée par l'équation  $f^*\mu_f = d_t(f)\mu_f$  parmi l'ensemble des mesures de probabilité de  $M$  ne chargeant pas les ensembles analytiques.

Nous retiendrons en particulier de ce résultat qu'une hypothèse cohomologique se traduit directement au niveau dynamique, notamment avec l'existence de points périodiques répulsifs et l'absence d'exposants de LYAPOUNOFF négatifs ou nuls, ce qui précise les résultats généraux du paragraphe 5.1.2. Les propriétés stochastiques de  $f$  vis-à-vis de sa mesure d'entropie maximale sont donc similaires à celles des endomorphismes dilatants des variétés compactes. Le lecteur remarquera cependant qu'aucun endomorphisme holomorphe de l'espace projectif n'est dilatant, puisque son déterminant jacobien s'annule dès que son degré topologique est supérieur ou égal à 2.

**Remarque 5.4.** Lorsque  $f$  est un endomorphisme de l'espace projectif, la mesure  $\mu_f$  peut être obtenue de la manière suivante. Soit  $\omega$  une forme de FUBINI-STUDY sur  $\mathbb{P}^d(\mathbf{C})$ . Si  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{P}^d(\mathbf{C})$  de degré au moins 2 et si  $\omega$  est une forme de KÄHLER sur  $\mathbb{P}^d(\mathbf{C})$ , la suite de courants positifs fermés

$$\frac{1}{\lambda_d(f)^n} (f^n)^* \omega$$

converge vers un courant positif fermé  $T$  à potentiels continus, appelé courant de GREEN de  $f$ . La mesure  $\mu_f$  est alors proportionnelle au produit extérieur  $T^d$ .

Cette remarque ne s'applique pas au cas général. Considérons par exemple la transformation dilatante  $g$  induite par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sur le produit  $A = E \times E$  de deux courbes elliptiques. Toute classe de cohomologie  $[\alpha] \in H^{(1,1)}(A, \mathbf{R})$  qui est une classe propre pour  $g^*$  et pour laquelle  $[\alpha]^2 \geq 0$  est proportionnelle à  $[dy \wedge d\bar{y}]$  et correspond à la fibration elliptique invariante  $y = c^{ste}$ . Son carré est donc nul.

### 5.2.2. Ensemble exceptionnel.

Pour une transformation polynomiale d'une variable complexe, nous avons signalé dans l'exemple 5.1 que l'ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  contient 0, 1 ou 2 points. Nous avons étendu ce résultat à tous les endomorphismes de l'espace projectif  $\mathbb{P}^N(\mathbf{C})$  :

**Théorème 5.5** (BRIEND, CANTAT ET SHISHIKURA, [D]). *L'ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  d'un endomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  de degré  $d \geq 2$  est une union finie de sous-espaces linéaires qui contient au plus  $k + 1$  hyperplans et, s'il en contient  $k + 1$ ,  $f$  est conjugué à*

$$[x_0 : \dots : x_k] \mapsto [x_0^d : \dots : x_k^d]$$

par un automorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ .

Le nombre de composantes irréductibles de codimension au moins 2 est beaucoup plus mystérieux. On dispose de bornes qui ne paraissent pas optimales (voir [2]). Lorsque  $f$  n'est plus holomorphe mais rationnelle, on sait seulement que l'ensemble exceptionnel est contenu dans l'ensemble postcritique de  $f$  : en général, c'est une union infinie dénombrable d'ensembles analytiques.

### 5.2.3. Théorème limite central.

Considérons maintenant les propriétés stochastiques satisfaites par le couple  $(f, \mu_f)$ .

Si  $\varphi$  est une fonction mesurable de  $M$  vers  $\mathbf{R}$ , les fonctions  $X_k = \varphi \circ f^k$  forment une suite de variables aléatoires sur l'espace probabilisé  $(M, \mu_f)$  ; on s'attache alors à décrire le comportement asymptotique des sommes de BIRKHOFF

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} X_j.$$

L'approche principale consiste à comparer ce comportement à celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par exemple, l'ergodicité de  $\mu_f$  et le théorème ergodique de BIRKHOFF assurent que les  $X_k$  satisfont la loi des grands nombres : dès que  $\varphi$  est intégrable, les moyennes  $S_N(x)/N$  tendent  $\mu_f$ -presque sûrement vers la constante  $\int_M \varphi d\mu_f$ .

Poussant l'analyse un cran plus loin, il convient de déterminer si la suite  $X_k$  satisfait un théorème limite central. On suppose donc que  $\varphi$  a une moyenne nulle et que son carré est intégrable, puis on dit que  $\varphi$  *satisfait le théorème limite central* s'il existe un réel *strictement positif*  $\sigma$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu_f \left\{ x; \frac{1}{\sqrt{N}} S_N(x) \in A \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_A \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

pour tout intervalle de nombres réels  $A$ . À ce stade, la situation se complique considérablement et, contrairement à ce qui se produit pour la loi des grands nombres, il devient nécessaire de faire des hypothèses de régularité sur la fonction  $\varphi$ .

Pour s'en convaincre, commençons par quelques remarques. Si l'on additionne à  $\varphi$  un cobord  $\psi \circ f - \psi$ , où  $\psi$  appartient à  $L^2(M, \mu_f)$ , ceci ne change pas le fait que  $\varphi$  satisfasse ou non le théorème limite central, ni la valeur de  $\sigma$ . D'autre part, les cobords  $\psi \circ f - \psi$  forment un sous-espace dense de l'espace de HILBERT  $L_0^2(M, \mu_f)$  des fonctions de carré sommable et de moyenne nulle. Mais d'après un théorème de BURTON et DENKER, si  $\mu$  est une mesure invariante, ergodique et non atomique, il existe toujours au moins un élément  $\varphi$  de  $L_0^2(M, \mu)$  qui satisfait le théorème limite central (voir [32]). Par addition de cobords et de constantes, on en déduit alors que les éléments de  $L_0^2(M, \mu_f)$  qui satisfont le théorème limite central forment un sous-espace dense de  $L_0^2(M, \mu_f)$ . À l'opposé, on dispose du théorème suivant de VOLNÝ montrant qu'il existe toujours un sous-ensemble  $G_\delta$ -dense de fonctions dans  $L_0^2(M, \mu_f)$  pour lesquelles les moyennes de BIRKHOFF suivent des lois arbitraires (voir [110]).

**Théorème 5.6** (VOLNÝ). *Soit  $(M, f, \mu)$  un système dynamique probabilisé, ergodique et sans atome. Il existe un sous-ensemble  $\mathcal{E}$  de  $L_0^2(M, \mu)$  qui est un  $G_\delta$ -dense et qui satisfait la propriété suivante : pour tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{E}$  et pour toute mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\mathbf{R}$  satisfaisant  $\int_{\mathbf{R}} t d\nu(t) = 0$  et  $\int_{\mathbf{R}} t^2 d\nu(t) = 1$ , il existe une suite  $N_i$  tendant vers l'infini telle que la loi de*

$$\frac{S_{N_i}}{\|S_{N_i}\|_2}$$

*converge vers  $\nu$ .*

Le cadre général des fonctions de carré sommable est donc trop vaste ; il permet tout type de comportement pour les moyennes de BIRKHOFF. Un

théorème analogue est d'ailleurs valable dans le cadre des fonctions continues (voir [82]). On s'attend toutefois à ce que le théorème limite central soit valable si la fonction  $\varphi$  est suffisamment régulière et si la dynamique de  $f$  est suffisamment mélangeante. C'est le cas, par exemple, si  $f$  est une transformation dilatante d'une variété compacte, si  $\varphi$  est höldérienne et si  $\mu = \nu_f$  est la mesure de probabilité  $f$ -invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE (voir [108]).

La décroissance des corrélations pour les endomorphismes de l'espace projectif a été démontrée dans [54] pour des observables de classe  $C^2$ . Avec Stéphane LE BORGNE nous avons redémontré ceci par une autre méthode (et directement pour des fonctions höldériennes) et obtenu ainsi un théorème limite central pour la mesure  $\mu_f$  lorsque  $f$  est un endomorphisme de l'espace projectif (voir [L]). Ce résultat a également été obtenu par DINH et SIBONY dans le cadre plus large des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes et par une méthode différente (voir [43]).

**Théorème 5.7** ([L], [43]). *Soient  $M$  une variété projective complexe et  $f : M \rightarrow M$  une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante. Soit  $\xi$  une fonction höldérienne sur  $M$  dont l'intégrale vis-à-vis de  $\mu_f$  est nulle. Ou bien  $\xi$  est un cobord, ou bien la suite de variables aléatoires  $(\xi \circ f^j)$  satisfait un théorème limite central : il existe un réel strictement positif  $\sigma$  tel que*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left\{ x; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi \circ f^j(x) \in A \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_A \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

pour tout intervalle de nombres réels  $A$ .

Ce résultat vaut également pour des observables  $\xi$  qui sont lipschitziennes et d'autres classes de fonctions (voir [43]).

### 5.3. Transformations birationnelles des surfaces.

#### 5.3.1. Transformations de HÉNON et automorphismes des surfaces.

La dynamique des transformations inversibles, et plus généralement des transformations qui ne sont pas cohomologiquement dilatantes est plus délicate à décrire. L'exemple le plus simple d'une telle transformation avec

une entropie topologique strictement positive est la transformation de HÉNON

$$h_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x^2 + b \\ ax \end{pmatrix},$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes et  $a$  n'est pas nul. Plus généralement, nous appellerons automorphisme de type HÉNON tout automorphisme polynomial du plan complexe  $\mathbf{C}^2$  qui n'est pas conjugué à un automorphisme affine ou élémentaire (voir §4.4). Une telle transformation peut être considérée au choix comme un automorphisme du plan ou une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ ; il revient au même de dire qu'un automorphisme est de type HÉNON ou que la transformation birationnelle associée a un premier degré dynamique strictement plus grand que 1.

La mesure d'entropie maximale des transformations de type HÉNON est bien comprise depuis [14], [13] et les travaux suivants de BEDFORD et SMILLIE (la construction de cette mesure et l'usage de la théorie du potentiel nécessaire sont dûs à BEDFORD et SIBONY, voir la page 74 de [15]). Nous avons étendu certains de ces résultats à tout automorphisme d'une surface projective et l'on peut maintenant formuler le théorème suivant.

**Théorème 5.8** ([14], [13], [A]). *Soit  $f$  un automorphisme d'une surface projective complexe (resp. un automorphisme de type HÉNON) dont l'entropie topologique est strictement positive. Il existe alors une unique mesure de probabilité  $\mu_f$  qui est  $f$ -invariante et d'entropie maximale. Il se trouve en outre que les points périodiques de  $f$  sont équirépartis pour cette mesure et que le système ergodique  $(X, \mu_f, f)$  est mesurablement conjugué à un décalage de BERNOULLI.*

En d'autres termes, la dynamique de  $f$  est semblable à un jeu de pile ou face si on l'observe à l'aide de la mesure qui lui est naturellement associée.

**Remarque 5.9.** 1. — L'hypothèse de projectivité faite sur  $X$  est une hypothèse technique qui semble hors sujet.

2. — La démonstration montre que les techniques développées dans [14] et [104] pour étudier les propriétés ergodiques de l'application de HÉNON sont valables sur les surfaces projectives. Mieux, certaines constructions cruciales sont en fait valables pour n'importe quel automorphisme d'une variété projective, et ont d'ailleurs été étendues par la suite (voir [46], [67]).

**Remarque 5.10.** Pour un automorphisme, on ne peut pas espérer que la mesure  $\mu_f$  décrive la répartition de l'orbite d'un point générique pour la mesure de LEBESGUE : il existe en effet des automorphismes  $f$  avec une entropie positive et un domaine de SIEGEL sur lequel  $f$  est conjugué à une rotation ; l'orbite d'un point intérieur à un tel domaine ne se distribue donc pas suivant la mesure  $\mu_f$  (voir §3.3.2, théorème 3.15). La même remarque vaut d'ailleurs pour un endomorphisme cohomologiquement dilatant si l'on considère ses orbites positives  $f^n(x)$ ,  $n > 0$  (voir aussi [98] pour des exemples frappants).

**Remarque 5.11.** Pour construire la mesure  $\mu_f$  on commence par construire des courants positifs fermés  $T^+$  et  $T^-$  qui vérifient l'équation

$$f_*(T^\pm) = \lambda_1(f)^{\pm 1} T^\pm.$$

Ces courants sont analogues au courant de GREEN mentionné au paragraphe 5.2.1. Ils admettent des potentiels locaux höldériens mais, en général, ne sont pas lisses (voir [53]) : s'ils étaient de classes  $C^3$ , ils définiraient des feuilletages  $f$ -invariants car ils satisfont l'équation

$$T^\pm \wedge T^\pm = 0.$$

Ces feuilletages seraient holomorphes et  $f$  serait un exemple de KUMMER (appliquer la proposition 6.2 et le théorème 6.12, voir [A])

### 5.3.2. Transformations birationnelles et dimension supérieure.

Pour la dynamique des transformations birationnelles du plan projectif, on ne dispose pas encore de résultats aussi performants, du moins pas en toute généralité. La première difficulté consiste à définir une mesure  $\mu_f$  susceptible d'être l'unique mesure d'entropie maximale. Lorsque l'orbite positive des points d'indétermination de  $f^{-1}$  ne s'approche pas trop vite des points d'indétermination de  $f$ , les résultats du paragraphe précédent ont été généralisés par BEDFORD, DILLER et DUJARDIN (voir [11], [12] et [50]). Pour les automorphismes des variétés de dimension supérieure, DINH et SIBONY ont développé des outils qui permettent de construire des courants invariants et une mesure naturelle  $\mu_f$  qui est ergodique (et même mélangeante). Nous renvoyons le lecteur à [46], [42] et [48] pour les résultats obtenus par ces deux auteurs concernant la répartition des orbites d'une transformation holomorphe : ceux-ci incluent la dynamique de certaines transformations transcendentes et de correspondances.

#### 5.4. Applications géométriques.

Dans ce dernier paragraphe, nous donnons quelques applications simples ou conjecturales à des problèmes de géométrie complexe (métrique de KOBAYASHI) et de géométrie diophantienne (points de petite hauteur et points rationnels).

##### 5.4.1. Variétés de CALABI-YAU.

Soit  $M$  une variété de CALABI-YAU projective de dimension  $d$ . Soit  $\Omega$  une  $d$ -forme holomorphe sur  $M$  ne s'annulant pas, que l'on normalise en imposant

$$(i)^{d^2} \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1.$$

La mesure de probabilité associée à la forme volume  $(i)^{d^2} \Omega \wedge \bar{\Omega}$  ne dépend pas du choix de  $\Omega$  et sera notée  $\mu_M$  : c'est la « mesure canonique » de  $M$ . Si  $f$  est une application rationnelle de  $M$  dans  $M$  alors

$$f^*(\Omega \wedge \bar{\Omega}) = \lambda_d(f) \Omega \wedge \bar{\Omega}$$

où  $\lambda_d(f)$  est le degré topologique de  $f$ . Lorsque  $f$  est cohomologiquement dilatante, ceci montre que la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  coïncide avec la mesure  $\mu_M$  (appliquer le théorème 5.3, (v)). En particulier, (i) l'orbite d'un point générique pour la mesure de LEBESGUE de  $M$  s'équidistribue vers la mesure canonique  $\mu_M$  et (ii) les points périodiques répulsifs de  $f$  sont denses dans  $M$ .

**Hyperbolicité.** Rappelons qu'une variété complexe compacte  $M$  est hyperbolique au sens de KOBAYASHI si toute courbe entière  $\xi : \mathbf{C} \rightarrow M$  est constante (critère d'hyperbolicité de BRODY). Si  $M$  est hyperbolique, la métrique de KOBAYASHI est une métrique finslérienne pour laquelle toute transformation holomorphe est 1-lipschitzienne (voir [79]). Lorsque  $M$  possède une transformation avec une dynamique riche,  $M$  est donc loin d'être hyperbolique. Précisons ceci dans le cas le plus simple.

Soit  $p$  un point fixe répulsif d'une application rationnelle  $f : M \rightarrow M$ . Soit  $d$  la dimension de  $M$ . La « variété instable » de  $f$  au point  $p$  détermine alors une application méromorphe

$$\xi_p : \mathbf{C}^d \dashrightarrow M$$

dont l'image contient un voisinage du point  $p$ . Ceci montre que les variétés  $M$  qui possèdent une transformation cohomologiquement dilatante possèdent aussi une application méromorphe dominante  $\xi : \mathbf{C}^d \dashrightarrow M$ . Elles se situent donc à l'opposé des variétés hyperboliques au sens de KOBAYASHI (ce que suggèrerait déjà le §2.2).

Appliquons ces remarques au cas des variétés de CALABI-YAU.

**Proposition 5.12.** *Soit  $M$  une variété de CALABI-YAU projective de dimension  $d$ . Si  $M$  possède une application rationnelle cohomologiquement dilatante, il existe une application méromorphe surjective de  $\mathbf{C}^d$  vers  $M$ .*

*Démonstration.* Soit  $p$  un point périodique répulsif et  $\xi : \mathbf{C}^d \dashrightarrow M$  la variété instable de  $f$  au point  $p$ . Puisque le déterminant jacobien de  $f$  ne s'annule pas (voir §2.2.1), il est facile de voir que l'ensemble exceptionnel  $\mathcal{E}(f)$  de  $f$  est vide : la mesure  $\mu_f$  décrit la répartition des préimages de tout point  $x$  de  $M$ . Puisque  $\mu_f$  est égale à  $\mu_M$ , celle-ci charge un voisinage de  $p$ . Puisque  $\xi(\mathbf{C}^d)$  contient un voisinage de  $p$ , nous en déduisons que tout point  $x$  de  $M$  possède une préimage dans l'image de  $\xi$ , puis que  $x$  lui-même appartient à l'image de  $\xi$ .  $\square$

On ne sait pas déterminer les variétés de CALABI-YAU qui possèdent une application méromorphe dominante  $\xi : \mathbf{C}^d \dashrightarrow M$ . Il serait intéressant de déterminer d'abord les variétés de CALABI-YAU qui possèdent une dynamique rationnelle cohomologiquement dilatante.

**Remarque 5.13.** Si l'on cherche juste à montrer qu'une variété possède une courbe entière ZARISKI-dense, il n'est pas utile de construire des applications cohomologiquement dilatantes : a priori, il suffit de construire des automorphismes avec  $\lambda_1(f) > 1$  qui ne préservent pas de fibration. Les automorphismes des surfaces K3 permettent par exemples de construire des courbes entières ZARISKI-denses et injectives dans certaines surfaces K3 pour lesquelles on sait estimer l'ordre de croissance (voir [C], [75]) : il suffit pour cela de considérer la variété instable de l'automorphisme en l'un de ses points périodiques.

**Géométrie diophantienne.** Dans le même ordre d'idée, on peut appliquer les techniques précédentes pour montrer des résultats grossiers de géométrie diophantienne.

**Proposition 5.14.** *Soit  $M$  une variété de CALABI-YAU définie sur un corps de nombres  $k$ . Soit  $\mu_M$  la mesure canonique de  $M$ . Supposons que  $M$  possède une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante  $f$ . Il existe alors une suite  $S_n$  d'ensembles finis  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -invariants dans  $M(\bar{k})$  tels que*

$$\mu_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|S_n|} \sum_{x \in S_n} \delta_x.$$

*Démonstration.* Quitte à changer  $k$  en l'une de ses extensions finies  $k'$ , nous pouvons supposer que  $f$  est elle-même définie sur  $k$  (ceci résulte de la dénombrabilité de l'ensemble des transformations rationnelles de  $M$ ) et qu'il existe un point  $x_0$  de  $M$  à coordonnées dans  $k'$ . Il suffit alors de poser

$$S'_n = f^{-n}(x_0)$$

et de prendre pour  $S_n$  l'orbite de  $S'_n$  sous l'action de  $\text{Gal}(k'/k)$ .  $\square$

Dans [I], le lecteur trouvera d'autres liens entre dynamique et géométrie diophantienne : nous y décrivons de manière simple l'analogie entre hauteurs canoniques et courants de GREEN et quelques questions de dynamique  $p$ -adique liées à cette analogie (voir [105], [113], [52] pour des exposés plus pertinents).

#### 5.4.2. Actions de groupes.

Au lieu d'étudier la dynamique d'une seule transformation, il est parfois naturel d'étudier l'action d'un groupe de transformations. Dans cet esprit, nous avons montré le résultat suivant.

**Théorème 5.15** (CANTAT, [B]). *Si  $X$  est une surface K3 qui admet deux fibrations elliptiques invariantes par des automorphismes d'ordre infini, alors l'adhérence de toute  $\text{Aut}(X)$ -orbite est soit finie, soit une surface totalement réelle  $\text{Aut}(X)$ -invariante, soit la surface  $X$  tout entière, soit contenue dans un diviseur  $\text{Aut}(X)$ -invariant et contractible.*

En guise d'application, ce théorème montre la densité potentielle des points rationnels de  $X$  : *sous les mêmes hypothèses, mais en supposant en outre que  $X$  est définie sur un corps de nombres  $k$ , il existe une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que  $X(k')$  soit dense dans  $X(\mathbf{C})$  (pour la topologie usuelle bien sûr, voir [B]).* Ceci fournit une preuve dynamique d'une large part du théorème de BOGOMOLOV et TSCHINKEL suivant lequel une surface K3

projective et munie d'une fibration elliptique qui est définie sur un corps de nombres  $k$  a un ensemble de points rationnels ZARISKI-dense si l'on autorise une extension finie du corps  $k$  (voir [26], [27]).

La même stratégie permet aussi de classer les mesures de probabilité  $\text{Aut}(X)$ -invariantes sous les mêmes hypothèses ou dans d'autres contextes proches. Ainsi, lorsque  $M$  est une hypersurface de CALABI-YAU dans  $(\mathbb{P}^1(\mathbf{C}))^{n+1}$  (donc de degré 2 par rapport à chaque variable), son groupe d'automorphismes agit de manière ergodique par rapport à la mesure canonique de  $M$ . L'orbite d'un point générique sous l'action de ce groupe est donc équilibrée vis-à-vis de la mesure  $\mu_M$  (voir [94], [31]).

Dans la direction opposée, on sait grace aux travaux de MCMULLEN qu'il existe des automorphismes de surfaces K3 (non projectives) dont l'entropie est strictement positive pour lesquels la mesure canonique n'est pas ergodique : plus précisément, il existe de tels automorphismes qui ont un domaine de SIEGEL (voir la fin du §3.3.2 et [87]). Par contre, on ne sait pas à l'heure actuelle si de tels exemples existent sur des surfaces K3 projectives (voir la remarque 3.17). On ne dispose donc pas d'exemple d'automorphisme sur une surface K3 projective pour lequel on sache prouver que la mesure canonique n'est pas ergodique. Qu'en est-il pour les exemples de la figure 3.9 ?

#### 5.4.3. Surfaces K3.

Pour conclure cette partie, résumons quelques uns des problèmes précédents dans le cas des surfaces K3.

- On sait qu'aucune surface K3 n'est hyperbolique au sens de KOBAYASHI. Si une surface K3 possède une fibration elliptique ou est une surface de KUMMER, il existe une application dominante holomorphe de  $\mathbf{C}^2$  dans cette surface (voir [33]). Par contre, on ne sait pas si une surface K3 projective générique, par exemple une quartique générique de  $\mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ , possède une application dominante  $\xi : \mathbf{C}^2 \rightarrow X$ .
- Dès qu'une surface K3 admet une fibration elliptique, elle possède une transformation méromorphe de degré strictement supérieur à 1. Par contre, on ne sait pas classer les surfaces K3 qui sont munies d'une transformation cohomologiquement dilatante et on ne sait pas si une surface K3 projective générique possède une transformation rationnelle de degré  $> 1$ .

- Si  $X$  est une surface K3 projective définie sur un corps de nombres  $k$ , existe-t-il une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que  $X(k')$  soit dense dans  $X(\mathbf{C})$  ? Ce résultat est démontré lorsque  $X$  possède une fibration elliptique ([27]).

Comme nous l'avons vu, tous ces problèmes sont liés entre eux, la dynamique permettant d'apporter des éléments de réponses dans des cas simples.

## 6. RIGIDITÉ

Nous avons vu dans les parties précédentes qu'il existe des transformations rationnelles ou holomorphes sur certaines variétés projectives complexes avec une dynamique riche, mais que ces exemples sont difficiles à construire.

Cette partie montre que l'on peut classer les transformations de ce type si l'on impose une contrainte classique, naturelle, à la dynamique : il s'agit de caractériser les exemples pour lesquels les objets associés à la dynamique (feuilletage stable ou instable, mesure d'entropie maximale) sont lisses (holomorphes par exemple).

### 6.1. Automorphismes de type ANOSOV.

Les endomorphismes dilatants des variétés compactes forment une famille de référence pour la dynamique des endomorphismes lisses et non inversibles des variétés compactes. Nous les avons d'ailleurs choisis comme exemple au paragraphe 5.1.3. Les difféomorphismes de type ANOSOV jouent un rôle similaire pour la dynamique des difféomorphismes. Dans ce paragraphe, nous résumons les résultats principaux de [H] et [59] visant à classer les automorphismes de type ANOSOV des variétés complexes compactes. Les endomorphismes holomorphes dilatants seront classés au paragraphe 6.3.1, théorème 6.16.

#### 6.1.1. Dynamique Anosov.

Soit  $M$  une variété compacte munie d'une métrique riemannienne. Un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M$  est de type ANOSOV s'il existe deux sous-fibrés  $E^+$  et  $E^-$  du fibré tangent  $TM$  et deux constantes strictement positives  $c$  et  $\chi$  tels que

- (i)  $TM$  est la somme directe de  $E^+$  et  $E^-$  ;
- (ii)  $E^+$  et  $E^-$  sont invariants sous l'action de  $f$  ;
- (iii) pour tout entier relatif  $n$ , pour tout vecteur  $v^+$  de  $E^+$  et tout vecteur  $v^-$  de  $E^-$ ,

$$\begin{aligned} \|df^n(v^+)\| &\leq c \|v^+\| \exp(n\chi) \\ \|df^n(v^-)\| &\leq c \|v^-\| \exp(-n\chi). \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, les deux champs de plans déterminés par  $E^+$  et  $E^-$  sont continus et intégrables : ils déterminent deux feuilletages continus de

$M$ , le feuilletage instable  $\mathcal{F}^+$  et le feuilletage stable  $\mathcal{F}^-$ . En général,  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  ne sont pas différentiables, même lorsque le difféomorphisme  $f$  est de classe  $C^\infty$ , mais leurs feuilles le sont.

**Remarque 6.1.** Si  $f$  préserve une structure complexe  $j$ ,  $E^+$  et  $E^-$  sont  $j$ -invariants et les feuilles de  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  sont donc holomorphes. A priori, la structure transverse de  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  est seulement continue, toutefois nous ne connaissons aucun exemple d'automorphisme sur une variété complexe compacte qui soit de type ANOSOV et dont les feuilletages stable et instable ne soient pas holomorphes.

Nous utiliserons le vocabulaire suivant : si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage continu d'une variété complexe  $M$  dont les feuilles sont holomorphes, la *dimension de  $\mathcal{F}$*  est la dimension complexe de ses feuilles. Un automorphisme ANOSOV est de *codimension 1* si  $\mathcal{F}^+$  ou  $\mathcal{F}^-$  est de dimension 1.

Lorsque  $f$  est un difféomorphisme ANOSOV d'une variété compacte  $M$ , et lorsque  $\mathcal{F}^+$  est un feuilletage en courbes, le feuilletage  $\mathcal{F}^-$  est continûment différentiable (cf. [72]). Cette propriété s'étend aux automorphismes ANOSOV des variétés complexes compactes et l'on peut même remplacer *continûment différentiable* par *holomorphe* :

**Proposition 6.2** (GHYS, [59]). *Soit  $f$  un automorphisme ANOSOV d'une variété complexe compacte  $M$ . Si  $\mathcal{F}^+$  est de dimension 1, alors  $\mathcal{F}^-$  est un feuilletage holomorphe. En particulier, si  $M$  est une surface, alors  $\mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{F}^-$  sont holomorphes.*

### 6.1.2. Conjecture de SMALE.

Une conjecture célèbre de S. SMALE affirme que toute variété compacte possédant un difféomorphisme de type ANOSOV est une infra-nilvariété, c'est-à-dire qu'après un revêtement fini la variété est le quotient d'un groupe de LIE nilpotent par un réseau cocompact. De nombreux résultats sont disponibles si l'on fait des hypothèses de régularité sur les feuilletages stable et instable du difféomorphisme ANOSOV ([57], [58], [18], [19]). Par exemple, BENOIST et LABOURIE ont montré le résultat suivant (voir [19]).

**Théorème 6.3** (BENOIST, LABOURIE). *Soit  $V$  une variété compacte symplectique et  $f$  un difféomorphisme symplectique de  $V$  de classe  $C^\infty$ . Si  $f$  est un difféomorphisme ANOSOV dont les feuilletages stable et instable*

sont  $C^\infty$ , alors  $f$  est conjugué à un automorphisme hyperbolique d'une infra-nilvariété par un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ .

En ce qui concerne les automorphismes, on dispose du très joli résultat suivant.

**Théorème 6.4** (GHYS, [59]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $f$  un automorphisme de  $M$ .*

- (i) *Si  $f$  est un automorphisme ANOSOV de codimension 1 qui a une orbite dense, alors  $M$  est homéomorphe à un tore et  $f$  est topologiquement conjugué à un difféomorphisme linéaire de ce tore.*
- (ii) *Si  $M$  est une surface, et si  $f$  est ANOSOV, alors  $M$  est un tore complexe et  $f$  en est un automorphisme linéaire.*

Le résultat que nous avons obtenu concerne la situation où les feuilletages stable et instable sont holomorphes et la variété  $M$  est projective, mais sans faire d'hypothèse sur la codimension des feuilletages ou l'existence d'une orbite dense.

**Théorème 6.5** (CANTAT, [H]). *Soient  $M$  une variété projective complexe et  $f$  un automorphisme de  $M$  de type ANOSOV.*

- (i) *Si les feuilletages stable et instable de  $f$  sont holomorphes, alors  $M$  est revêtue par un tore et  $f$  provient d'un automorphisme linéaire de ce tore.*
- (ii) *Si  $f$  est un automorphisme ANOSOV de codimension 1, alors  $M$  est un tore et  $f$  est linéaire.*

**Exemple 6.6.** Soient  $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\alpha$  un réseau cocompact de la droite complexe,  $A$  le tore  $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$  et  $\tau$  le point de  $A$  associé au point  $(1/2, 1/2)$  de  $\mathbf{C}^2$ . La transformation linéaire  $(x, y) \mapsto (3x + 2y, 2x + y)$  préserve le réseau  $\Lambda^2$  et induit donc un automorphisme ANOSOV de  $A$ . Nous noterons  $f$  l'automorphisme ANOSOV obtenu en faisant agir cette transformation diagonalement sur  $A \times A$ . Soit  $\eta$  la transformation d'ordre 2 de  $A \times A$  définie par

$$\eta(a, b) = (a + \tau, -b).$$

Puisque  $f$  et  $\eta$  commutent,  $f$  induit un automorphisme de type ANOSOV sur la variété projective  $(A \times A)/\eta$ . Celle-ci n'est pas un tore.

**Remarque 6.7.** (i) La conclusion du théorème 6.5 est plus forte que la conjecture de SMALE puisque la variété  $M$  est revêtue par un tore. Ceci

résulte de la remarque suivante : soient  $N$  un groupe de Lie complexe connexe et  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $N$ , alors  $N/\Gamma$  est kählérienne si et seulement si  $N$  est abélien ; dans ce cas  $N/\Gamma$  est un tore (voir [20]).

(ii) Dans le même ordre d'idée, si  $M$  est une variété complexe compacte kählérienne dont le groupe fondamental est nilpotent sans être virtuellement abélien il est facile de déduire de [34] qu'aucun automorphisme de  $M$  n'est ANOSOV.

(iii) Puisque toute variété compacte kählérienne homéomorphe à un tore est un tore complexe, la seconde affirmation du théorème 6.5 est une faible généralisation du théorème de GHYS.

**Remarque 6.8.** Dans [59], GHYS étudie aussi les actions holomorphes de  $\mathbf{C}^*$  qui sont de type ANOSOV (les fibrés stable et instable forts sont en somme directe avec le champ de droites complexes tangent au flot) : ces actions y sont complètement classées pour les variétés de dimension 3.

Sur une variété kählérienne, l'inégalité de GROMOV montre que tout automorphisme isotope à l'identité a une entropie nulle. En particulier, il n'y a pas de flot d'ANOSOV (voir les §2.1.2 et 2.1.3).

## 6.2. Feuilletages et dynamiques pseudo-ANOSOV des surfaces.

Soit  $f$  un automorphisme d'une surface projective  $X$ . Supposons que le premier degré dynamique de  $f$ ,  $\lambda_1(f)$ , soit strictement supérieur à 1, ce qui signifie que son entropie topologique est strictement positive (voir §2.1.2) :

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\lambda_1(f)) > 0.$$

Nous avons signalé au paragraphe 5.3.1, remarque 5.11, que l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$  peut-être construite de la manière suivante : il existe deux courants positifs fermés  $T^+$  et  $T^-$  tels que, pour toute forme de KÄHLER  $\kappa$  sur  $X$ , la suite de courants

$$\frac{1}{\lambda_1(f)^n} (f^n)^* \kappa$$

converge vers un multiple non nul de  $T^+$  (resp.  $T^-$ ) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ; le produit de ces deux courants (existe et) est proportionnel à la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ . Pour les exemples de KUMMER (voir §3.1.2), ces deux courants sont des courants d'intégration le long des feuilles de deux feuilletages holomorphes (singuliers). Dans [A], nous avons démontré que ceci caractérise les automorphismes de KUMMER des

surfaces. Plus généralement, il est possible de classer les surfaces projectives  $X$  munies d'un feuilletage holomorphe (singulier)  $\mathcal{F}$  pour lequel le groupe des symétries birationnelles  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est infini. C'est ce que nous avons fait avec Charles FAVRE dans [G]. Décrivons ces résultats.

### 6.2.1. Les feuilletages et leurs symétries.

Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage holomorphe (singulier) d'une variété complexe  $X$  nous noterons  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  (resp.  $\text{Bir}(\mathcal{F})$ ) le groupe des automorphismes (resp. des transformations birationnelles) de  $X$  qui préservent  $\mathcal{F}$ .

Soient  $X$  une surface complexe compacte et  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe sur  $X$ , donné par une famille  $v_i$  de champs de vecteurs holomorphes à zéros isolés. Les champs  $v_i$  sont définis sur les ouverts  $\mathcal{U}_i$  d'un recouvrement de  $X$  et sont soumis à des relations de compatibilités

$$v_i = g_{ij}v_j, \quad g_{ij} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j),$$

assurant que les courbes intégrales de  $v_i$  et  $v_j$  se recollent sur  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$  pour former les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Le fibré en droites associé au cocycle  $\{g_{ij}\}$  ne dépend que de  $\mathcal{F}$  : c'est le fibré cotangent de  $\mathcal{F}$ . Il est noté  $T_{\mathcal{F}}^*$  et sera parfois dénommé *fibré canonique*. À ce fibré est associée une dimension de KODAIRA  $\text{kod}(\mathcal{F}) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$  qui mesure son degré de positivité (voir [30]).

Lorsque  $\text{kod}(\mathcal{F})$  est égale à 2, le feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit *de type général*. C'est le cas pour un feuilletage de  $\mathbb{P}^2$  générique dont le degré est supérieur ou égal à 2. Dans [96], PEREIRA et SANCHEZ ont étendu le théorème d'ANDREOTTI (cf. remarque 2.8) au cas feuilleté en démontrant que  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est un groupe fini pour tout feuilletage de type général. BRUNELLA a montré que les feuilletages pour lesquels  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  contient strictement  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  (ceci pour toute surface feuilletée birationnelle à  $(X, \mathcal{F})$ ) sont tous, à une exception près, des fibrations rationnelles ou des feuilletages de RICCATI et en a déduit que les transformations de HÉNON ne préservent pas de feuilletage holomorphe.

Nous allons maintenant préciser ces énoncés en classant complètement les surfaces feuilletées  $(X, \mathcal{F})$  pour lesquelles  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  ou  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  est infini.

### 6.2.2. Exemples.

Avant d'énoncer précisément nos résultats, il convient de présenter les exemples principaux. Le premier d'entre eux est fourni par les feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme holomorphe de type ANOSOV.

**Exemple 6.9** (KUMMER). Nous disposons déjà des exemples de KUMMER décrits au paragraphe 3.1.2 : si  $f$  est un automorphisme d'Anosov d'un tore  $A$  de dimension 2 complexe, ses deux feuilletages stable et instable sont holomorphes ; si  $f$  permute les orbites d'un groupe fini  $G$  d'automorphismes de  $A$ , on peut passer au quotient, ce qui détermine une transformation birationnelle de  $A/G$  préservant deux feuilletages singuliers.

**Exemple 6.10** (fibrations). Certaines applications biméromorphes d'ordre infini préservent des fibrations elliptiques ou rationnelles. C'est le cas des flots des champs de vecteurs parallèles à de telles fibrations ou de l'automorphisme linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur le produit  $E \times E$  de deux courbes elliptiques. Si  $X$  est le produit de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  par une surface de Riemann compacte  $B$  et si  $\alpha : B \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  est une application méromorphe non constante, la transformation  $f(z, w) = (\alpha(w) \cdot z, w)$  est une transformation birationnelle de  $X$  d'ordre infini qui préserve la fibration rationnelle  $X \rightarrow B$ .

**Exemple 6.11** (transformations monomiales). Cet exemple est analogue à l'exemple 6.9 si l'on remplace le groupe additif  $\mathbf{C}$  par son analogue multiplicatif  $\mathbf{C}^*$ . Il conduit à des transformations birationnelles.

**a.-** Toute application rationnelle du type  $f(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sera appelée *transformation monomiale* ; lorsque  $|ad - bc| = 1$ , c'est une application birationnelle. Supposons que le rayon spectral de la matrice associée,

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

soit de module strictement plus grand que 1. L'application  $f$  préserve alors les deux feuilletages holomorphes définis par les 1-formes  $\alpha w dz + \beta z dw$  où  $(\alpha, \beta)$  est un vecteur propre de  ${}^t B$ . Le tore réel  $\{|z| = |w| = 1\}$  est invariant par cette transformation ; elle y induit un difféomorphisme ANOSOV.

**b.-** Le quotient de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  par l'involution  $\tau(z, w) = (1/z, 1/w)$  est une surface rationnelle possédant quatre points singuliers. Notons  $Y$  la surface

obtenue après leur résolution. Les applications monomiales de l'exemple précédent commutent à  $\tau$  et induisent donc des applications birationnelles de  $Y$  préservant les images des deux feuilletages  $f$ -invariants.

### 6.2.3. Classification.

**Théorème 6.12** (CANTAT et FAVRE, [G]). *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une surface projective  $X$  possédant un groupe de symétries holomorphes  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  infini. Il existe alors au moins un élément  $f$  d'ordre infini dans  $\text{Aut}(\mathcal{F})$  et la situation est l'une des trois suivantes :*

- (i)  $\mathcal{F}$  est invariant par un champ de vecteurs holomorphe ;
- (ii)  $\mathcal{F}$  est une fibration elliptique ;
- (iii) la surface  $X$  est une surface de KUMMER,  $f$  se relève en un automorphisme ANOSOV  $\psi$  du tore et  $\mathcal{F}$  est la projection sur  $X$  du feuilletage stable ou instable de  $\psi$  (exemples 6.9).

Notons que les deux derniers cas sont mutuellement exclusifs. Lorsque  $X$  n'est pas un tore, les feuilletages apparaissant au cas (iii) ne sont jamais préservés par un champ de vecteurs.

**Théorème 6.13** (CANTAT et FAVRE, [G]). *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage tel que l'inclusion stricte  $\text{Aut}(\mathcal{F}) \subsetneq \text{Bir}(\mathcal{F})$  soit vérifiée pour tout modèle birationnel de  $\mathcal{F}$ . Alors  $\text{Bir}(\mathcal{F})$  possède un élément birationnel d'ordre infini  $f$  et soit  $\mathcal{F}$  est une fibration rationnelle, soit la situation est birationnellement conjuguée à celle de l'exemple 6.11.*

Réciproquement, toute fibration rationnelle possède une symétrie birationnelle d'ordre infini qui n'est pas birationnellement conjuguée à un automorphisme.

**Corollaire 6.14** (CANTAT et FAVRE, [G]). *Soit  $f : X \rightarrow X$  une application birationnelle d'une surface projective préservant un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$ . Si le premier degré dynamique de  $f$  est strictement plus grand que 1, il existe un changement de variables birationnel, puis un revêtement fini par un tore (resp. par  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ), tel que  $f$  se relève en un automorphisme ANOSOV du tore (resp. une application monomiale de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ) et le feuilletage  $\mathcal{F}$  en un feuilletage linéaire. En particulier,  $f$  préserve automatiquement deux feuilletages.*

Dans cette situation, la dynamique de  $f$  est « pseudo-ANOSOV » : deux feuilletages singuliers transverses sont invariants sous l'action de  $f$ , l'un est dilaté uniformément et l'autre est contracté uniformément.

### 6.3. Mesure d'entropie maximale lisse.

Nous avons vu au paragraphe 5.2.1 que les applications rationnelles cohomologiquement dilatantes possèdent une unique mesure d'entropie maximale. Nous allons voir maintenant que cette mesure, en général, n'est pas lisse. Plus précisément : il est possible de caractériser les exemples de LATTÈS par l'absolue continuité de la mesure  $\mu_f$  par rapport à la mesure de LEBESGUE (modulo des hypothèses de nature cohomologique naturelle). C'est un résultat surprenant et, afin d'en montrer toute la force, nous commencerons par décrire une situation similaire, celle des endomorphismes dilatants.

#### 6.3.1. Endomorphismes dilatants.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, reprenons l'exemple 5.2 des endomorphismes dilatants des variétés compactes. Rappelons que si  $M$  est une variété compacte, un endomorphisme  $f$  de  $M$  de classe  $C^1$  est dilatant s'il existe une métrique riemannienne sur  $M$  et un nombre réel  $\chi$  strictement plus grand que 1 tels que

$$\|Df(v)\| \geq \chi \|v\|$$

pour tout vecteur  $v$  tangent à  $M$ .

Deux mesures de probabilité  $f$ -invariantes sont naturellement associées à un tel endomorphisme. La première, notée  $\nu_f$ , est l'unique mesure de probabilité invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE de  $M$ . La seconde mesure, notée  $\mu_f$ , est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$ . En général,  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE et diffère donc de  $\nu_f$ . Pour les endomorphismes du cercle définis par

$$\tau_d(z) = z^d, \quad d \neq -1, 0, 1,$$

ces deux mesures coïncident avec la mesure de HAAR du cercle.

D'après les travaux de SHUB et GROMOV, seules les infra-nilvariétés possèdent des endomorphismes dilatants et deux endomorphismes dilatants qui sont homotopes sont conjugués par un homéomorphisme (voir

[102] et [64]). En particulier, l'entropie topologique d'un endomorphisme dilatant  $f$  est déterminée par son action  $f_*$  sur le groupe fondamental de  $M$ .

Appliquons ceci lorsque  $M$  est le cercle et  $f$  est un endomorphisme dilatant de degré  $d$  et de classe  $C^k$ . Il existe alors un homéomorphisme  $h$  du cercle conjuguant  $f$  à  $\tau_d$ . L'entropie topologique de  $f$  est égale à  $\log(|d|)$  et la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  est égale à l'image réciproque  $h^*\lambda$ , où  $\lambda$  est la mesure de HAAR du cercle. Pour que  $\mu_f$  coïncide avec  $\nu_f$ , il faut donc que  $h$  soit absolument continu par rapport à la mesure de LEBESGUE. Il s'agit d'un phénomène rare. On dispose en effet du résultat suivant : deux endomorphismes du cercle  $f$  et  $g$  dilatants et de classe  $C^k$  qui sont conjugués par un homéomorphisme absolument continu le sont automatiquement par un difféomorphisme de classe  $C^k$  (pour  $2 \leq k \leq \omega$ , [103]).

Dans certaines situations proches des situations holomorphes qui seront traitées dans le paragraphe suivant, la rigidité entraînée par l'égalité de  $\nu_f$  et  $\mu_f$  est encore plus forte. Par exemple, deux produits de BLASCHKE dilatants qui sont conjugués par un homéomorphisme absolument continu sont en fait conjugués par une homographie (voir [103], page 289). Ainsi lorsque  $f$  est un produit de BLASCHKE dilatant de degré  $d$  qui n'est pas conjugué à  $\tau_d$  par une homographie, la mesure  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE.

De tels résultats ne sont plus valables en dimension plus grande que 1 pour les raisons suivantes. Si  $f$  et  $g$  sont conjugués par un difféomorphisme  $h$ , les valeurs propres de  $Df$  en un point fixe  $p$  sont égales à celles de  $Dg$  en  $h(p)$ . L'absolue continuité de  $\mu_f$  montre que le jacobien de  $f$  en ses points périodiques est égal à  $d$ , où  $d$  est le degré topologique. En dimension 1, ceci fixe les valeurs propres de  $Df$ , mais en dimension plus grande, seul le produit des valeurs propres est ainsi fixé ; on peut donc changer les valeurs propres et annihiler l'existence d'une conjugaison lisse tout en préservant la mesure d'entropie maximale.

**Exemple 6.15.** Soient  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif et  $f_\varepsilon$  l'endomorphisme du tore  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  défini par

$$f_\varepsilon(x, y) = (2x + 2\varepsilon \sin(2\pi y), x + 2y + \varepsilon \sin(2\pi y)).$$

L'endomorphisme  $f_\varepsilon$  est isotope à l'endomorphisme linéaire  $f_0$  et la mesure de HAAR du tore est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f_\varepsilon$ . Puisque les valeurs propres de  $Df_\varepsilon$  aux points fixes de  $f_\varepsilon$  varient avec  $\varepsilon$ , l'endomorphisme  $f_0$  n'est en général pas conjugué à  $f_\varepsilon$  par un difféomorphisme.

Dans cette partie, nous allons décrire des résultats analogues à ceux rappelés ci-dessus, mais pour des endomorphismes holomorphes et des transformations méromorphes de variétés complexes compactes kählériennes. Nous ferons deux hypothèses. La première est de nature dynamique et consiste à supposer que la mesure d'entropie maximale de l'endomorphisme est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE. La seconde est de nature cohomologique. L'hypothèse analogue pour les endomorphismes dilatants serait que  $f$  est isotope à une transformation linéaire dont tous les exposants de LYAPOUNOFF sont égaux (c'est le cas dans l'exemple 6.15).

Avant cela, signalons que les endomorphismes dilatants des variétés complexes compactes kählériennes sont faciles à classer en utilisant le théorème de GROMOV qui affirme que seules les infra-nilvariétés possèdent de tels endomorphismes.

**Théorème 6.16** (GROMOV, BENSON et GORDON). *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe d'une variété complexe compacte kählérienne. Si  $f$  est dilatant, alors  $M$  est revêtu par un tore et  $f$  est revêtu par une transformation affine de ce tore.*

*Démonstration.* D'après les travaux de GROMOV,  $M$  est une infra-nilvariété. Puisque  $M$  est une variété complexe kählérienne, le théorème principal de [20] montre que  $M$  est revêtu par un tore. Le reste en découle sans difficulté.  $\square$

### 6.3.2. Exemples de LATTÈS et de KUMMER.

Les résultats de SHUB et GROMOV montrent que tout endomorphisme dilatant  $f$  est conjugué topologiquement au modèle algébrique auquel  $f$  est isotope. Dans le monde des transformations méromorphes, l'analogue de ces modèles algébriques est fourni par les exemples de KUMMER.

Rappelons qu'un exemple de KUMMER est une transformation méromorphe d'une variété compacte kählérienne qui est obtenue en quotientant

un endomorphisme affine d'un tore  $\mathbf{C}^n/\Gamma$  par l'action d'un groupe fini. Les exemples de LATTÈS sont les exemples de KUMMER pour lesquels la transformation affine associée a une partie linéaire dont toutes les valeurs propres sont situées sur un même cercle, de rayon strictement plus grand que 1.

### 6.3.3. Caractérisation des endomorphismes de LATTÈS.

Les travaux de ZDUNICK en dimension 1, puis de BERTELOOT, DUPONT et LOEB en dimension supérieure conduisent à la caractérisation suivante de certains endomorphismes de LATTÈS.

**Théorème 6.17** (BERTELOOT, DUPONT, LOEB, ZDUNICK, voir [M]). *Soit  $g$  un endomorphisme holomorphe d'une variété projective complexe  $M$ . Supposons qu'il existe une classe de KÄHLER  $[\kappa]$  et un réel  $\delta > 1$  tels que  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$ . Si la mesure d'entropie maximale de  $g$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE,  $g$  est un exemple de LATTÈS.*

**Remarque 6.18.** L'existence d'une unique mesure d'entropie maximale pour  $g$  résulte des travaux de BRIEND et DUVAL (voir §5.2.1).

Cet énoncé doit être pondéré par la remarque suivante : très peu de variétés possèdent des endomorphismes holomorphes et l'existence d'un endomorphisme  $g$  pour lequel il existe un tel couple  $(\delta, [\kappa])$  avec  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$  est très restrictive (voir le paragraphe 2.4.2) ; les exemples principaux sont les endomorphismes des espaces projectifs.

Nous retiendrons qu'il n'y a donc pas d'exemple similaire à l'exemple 6.15 pour les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs.

Les deux propriétés suivantes donnent une petite idée des méthodes qui peuvent conduire à la démonstration du résultat.

- la mesure  $\mu_g$  est le produit d'un  $(1, 1)$ -courant positif fermé  $T^+$  qui est invariant par  $g$  et dont la classe de cohomologie est proportionnelle à  $[\kappa]$  :

$$\mu_g = T^+ \wedge T^+ \wedge \dots \wedge T^+.$$

Lorsque  $\mu_f$  est lisse, ce courant est lisse (voir [21] et [M]) ;

- soit  $\xi : \mathbf{C}^d \rightarrow M$  une linéarisante de  $g$  en un point périodique répulsif où  $g$  est conjugué à  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\delta x_1, \dots, \delta x_n)$  (pour peu qu'un tel point existe !) ; la lissité de  $T^+$  et son invariance permettent de montrer

que  $\xi^*T^+$  est donné par un champ de formes hermitiennes définies positives constant puis que  $\xi$  est (presque) un revêtement de  $\mathbf{C}^d$  sur  $M$  : son groupe de monodromie agit de manière isométrique, discrète et cocompacte sur  $\mathbf{C}^d$  (voir [22] et [M]).

C'est donc l'existence du courant qui rigidifie la situation. Sans l'hypothèse cohomologique  $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$ , l'existence d'un tel courant n'est pas assurée. Dans le paragraphe suivant, nous étendons le théorème précédent au cas des transformations rationnelles tout en nous affranchissant de cette contrainte cohomologique, mais en restreignant l'étude à la dimension 2.

#### 6.3.4. Transformations méromorphes des surfaces.

Lorsque  $f : X \dashrightarrow X$  est une transformation rationnelle d'une surface, on dispose de trois nombres, le degré topologique  $d_t(f) = \lambda_2(f)$ , le premier degré dynamique  $\lambda_1(f)$  (que nous noterons simplement  $\lambda(f)$ ) et le rayon spectral  $\rho(f^*)$  de l'application linéaire  $f^* : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ , défini par

$$\rho(f^*) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left( \| (f^*)^k \|^{1/k} \right).$$

Les inégalités

$$d_t(f) \leq \lambda(f)^2 \leq \rho(f^*)^2$$

sont toujours valables et sont des égalités pour les exemples de LATTÈS. Le lecteur trouvera dans [51] des exemples simples et instructifs pour lesquels  $\lambda(f) < \rho(f^*)$ . Le résultat principal que nous avons obtenu concerne le cas « résonnant », ou « extrémal »,  $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ .

**Théorème 6.19** (CANTAT, [M]). *Soit  $f : X \dashrightarrow X$  une transformation rationnelle non inversible d'une surface complexe compacte kählérienne pour laquelle  $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ .*

- (i) *Si la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou nulle,  $X$  est un exemple de LATTÈS (en particulier  $\text{kod}(X) = 0$ ).*
- (ii) *Si la mesure d'entropie maximale de  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de LEBESGUE,  $f$  est un exemple de LATTÈS.*

**Remarque 6.20.** Les deux assertions sont reliées par la remarque suivante : lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est positive ou nulle, la mesure d'entropie maximale de  $f$  est lisse (voir le paragraphe 5.4.1). La preuve initiale que j'avais obtenue pour la première assertion reposait sur

cette remarque et des arguments dynamiques, mais on peut démontrer ce résultat par des arguments assez classiques de géométrie algébrique complexe (voir [M]).

Le théorème suivant montre que la condition de « résonance cohomologique »  $d_t(f) = \rho(f^*)^2$  s'avère nécessaire :

**Théorème 6.21** (CANTAT, [M]). *Il existe une transformation rationnelle  $f : X \dashrightarrow X$  d'une surface projective telle que*

- (i)  *$f$  est cohomologiquement dilatante :  $d_t(f) > \lambda(f) = \rho(f^*)$ ;*
- (ii) *la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle ;*
- (iii) *l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$  est lisse ;*
- (iv)  *$f$  n'est pas conjuguée topologiquement à un exemple de KUMMER.*

Pour les automorphismes des surfaces K3, on ne sait pas si la lissité de la mesure d'entropie maximale  $\mu_f$  assure que  $f$  est un exemple de KUMMER (voir [A] et [88]) :

**Question 6.1.** Peut-on classer les automorphismes des surfaces projectives complexes dont l'entropie est strictement positive et la mesure d'entropie maximale est lisse ?

### 6.3.5. Commutants.

Les méthodes employées pour obtenir ces énoncés permettent également de caractériser les exemples de KUMMER par leur groupe de symétries lorsque la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle.

**Théorème 6.22** (CANTAT, [M]). *Soit  $f : X \dashrightarrow X$  une transformation rationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne dont le degré topologique est strictement supérieur à 1. Supposons que la dimension de KODAIRA de  $X$  est nulle et que  $f$  commute à une infinité d'automorphismes de  $X$ . Alors  $f$  est un exemple de KUMMER.*

Il serait intéressant d'étendre ce type de résultat aux transformations rationnelles non inversibles du plan projectif qui commutent avec une infinité de transformations birationnelles. Pour les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs qui commutent entre eux, DINH et SIBONY ont obtenu un résultat (quasiment) complet (voir [41]) et pour les correspondances on dispose aussi d'énoncés intéressants (voir [40], [37], [36]).



## 7. LISTE DES TRAVAUX PRÉSENTÉS

[A ] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.*, 187(1) :1–57, 2001.

[Abis ] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :901–906, 1999.

[B ] Serge Cantat. Sur la dynamique du groupe d’automorphismes des surfaces  $K3$ . *Transform. Groups*, 6(3) :201–214, 2001.

[C ] Serge Cantat. Croissance des variétés instables. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(4) :1025–1042, 2003.

[D ] Jean-Yves Briend, Serge Cantat, and Mitsuhiro Shishikura. Linearity of the exceptional set for maps of  $\mathbf{P}_k(\mathbb{C})$ . *Math. Ann.*, 330(1) :39–43, 2004.

[E ] Serge Cantat. Deux exemples concernant une conjecture de Serge Lang. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7) :581–586, 2000.

[F ] Serge Cantat. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign. Math.* (2), 49(3-4) :237–262, 2003.

[G ] Serge Cantat and Charles Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 :199–235, , 2003. Corrigendum in vol 582, p. 229–231, 2005.

[H ] Serge Cantat. Difféomorphismes holomorphes Anosov. *Comment. Math. Helv.*, 79(4) :779–797, 2004.

[I ] Serge Cantat. Dynamique diophantienne. *Images des Maths, CNRS*, 3 :41–46, 2004.

[J ] Serge Cantat. Version Kählérienne d’une conjecture de Robert J. Zimmer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(5) :759–768, 2004.

[K ] Serge Cantat and Stéphane Lamy. Groupes d’automorphismes polynomiaux du plan. *preprint*, 2005.

[L ] Serge Cantat and Stéphane Le Borgne. Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires. *Int. Math. Res. Not.*, (56) :3479–3510, 2005.

[M ] Serge Cantat. Caractérisation des exemples de KUMMER et de LATTÈS. *preprint*, 2005.

## RÉFÉRENCES

- [1] Ekaterina Amerik. On endomorphisms of projective bundles. *Manuscripta Math.*, 111(1) :17–28, 2003.
- [2] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. Exceptional points of an endomorphism of the projective plane. *Math. Z.*, 249(4) :741–754, 2005.
- [3] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés de classe canonique triviale. *preprint*, 2005.
- [4] Ekaterina Amerik, Marat Rovinsky, and Antonius Van de Ven. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(2) :405–415, 1999.
- [5] Aldo Andreotti. Sopra le superfici algebriche che posseggono trasformazioni birazionali in sé. *Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl.*, 9(5) :255–279, 1950.
- [6] Wolf P. Barth.  $K3$  surfaces with nine cusps. *Geom. Dedicata*, 72(2) :171–178, 1998.
- [7] Hyman Bass and Alexander Lubotzky. Automorphisms of groups and of schemes of finite type. *Israel J. Math.*, 44(1) :1–22, 1983.
- [8] Arnaud Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4) :755–782 (1984), 1983.
- [9] Arnaud Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :53–58, 2001.
- [10] Arnaud Beauville and Ron Donagi. La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(14) :703–706, 1985.
- [11] Eric Bedford and Jeffrey Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.*, 128(2) :331–368, 2005.
- [12] Eric Bedford and Jeffrey Diller. Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane : the golden mean subshift. *Amer. J. Math.*, 127(3) :595–646, 2005.
- [13] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . *Invent. Math.*, 114(2) :277–288, 1993.
- [14] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1) :77–125, 1993.
- [15] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$  : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.*, 103(1) :69–99, 1991.
- [16] Yves Benoist. Une nilvariété non affine. *J. Differential Geom.*, 41(1) :21–52, 1995.
- [17] Yves Benoist. Pavages du plan. *Texte des Journées Mathématiques X-UPS*, pages 1–48, 2001.
- [18] Yves Benoist, Patrick Foulon, and François Labourie. Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1) :33–74, 1992.
- [19] Yves Benoist and François Labourie. Sur les difféomorphismes d’Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables. *Invent. Math.*, 111(2) :285–308, 1993.

- [20] Chal Benson and Carolyn S. Gordon. Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology*, 27(4) :513–518, 1988.
- [21] François Berteloot and Christophe Dupont. Une caractérisation des endomorphismes de lattès par leur mesure de green. *Comment. Math. Helv.*, 80(2) :433–454, 2005.
- [22] François Berteloot and Jean-Jacques Loeb. Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de  $\mathbb{P}^k$ . *Bull. Soc. Math. France*, 129(2) :175–188, 2001.
- [23] François Berteloot and Volker Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*, volume 7 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2001.
- [24] José Bertin and Pol Vanhaecke. The even master system and generalized Kummer surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 116(1) :131–142, 1994.
- [25] Christina Birkenhake and Herbert Lange. A family of abelian surfaces and curves of genus four. *Manuscripta Math.*, 85(3-4) :393–407, 1994.
- [26] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on Enriques surfaces. *Math. Res. Lett.*, 5(5) :623–628, 1998.
- [27] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on elliptic  $K3$  surfaces. *Asian J. Math.*, 4(2) :351–368, 2000.
- [28] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d’équilibre d’un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 93 :145–159, 2001.
- [29] Matthew G. Brin and Craig C. Squier. Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line. *Invent. Math.*, 79(3) :485–498, 1985.
- [30] Marco Brunella. *Birationnal Geometry of Foliations*. Impa, 2000.
- [31] Alexander I. Bufetov. Convergence of spherical averages for actions of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 155(3) :929–944, 2002.
- [32] Robert Burton and Manfred Denker. On the central limit theorem for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(2) :715–726, 1987.
- [33] Gregory T. Buzzard and Steven S. Y. Lu. Algebraic surfaces holomorphically dominated by  $\mathbb{C}^2$ . *Invent. Math.*, 139(3) :617–659, 2000.
- [34] Frédéric Campana. Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(3) :307–316, 1995.
- [35] Frédéric Campana. Special varieties and classification theory : an overview. *Acta Appl. Math.*, 75(1-3) :29–49, 2003. Monodromy and differential equations (Moscow, 2001).
- [36] Laurent Clozel and Emmanuel Ullmo. Correspondances modulaires et mesures invariantes. *J. Reine Angew. Math.*, 558 :47–83, 2003.
- [37] Laurent Clozel and Emmanuel Ullmo. Rigidité de l’action des opérateurs de Hecke sur les espaces de réseaux. *Math. Ann.*, 326(2) :209–236, 2003. With an appendix by Y. Shalom.
- [38] Arthur B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*. Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publication, vol. X. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

- [39] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [40] Tien-Cuong Dinh. Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de  $\mathbb{C}^2$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(2) :431–459, 2001.
- [41] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Sur les endomorphismes holomorphes permutables de  $\mathbb{P}^k$ . *Math. Ann.*, 324(1) :33–70, 2002.
- [42] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamique des applications d’allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(4) :367–423, 2003.
- [43] Tien Cuong Dinh and Nessim Sibony. Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps. *preprint*, 2004.
- [44] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Groupes commutatifs d’automorphismes d’une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.*, 123(2) :311–328, 2004.
- [45] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6) :959–971, 2004.
- [46] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2) :291–312 (electronic), 2005.
- [47] Tien Cuong Dinh and Nessim Sibony. Une borne supérieure pour l’entropie topologique d’une application rationnelle. *Ann. of Math. (2)*, 161(3), 2005.
- [48] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Distribution des valeurs d’une suite de transformations méromorphes et applications. *Comment. Math. Helv.*, à paraître, 2006.
- [49] Igor V. Dolgacev. On rational surfaces with a pencil of elliptic curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30 :1073–1100, 1966. en russe.
- [50] Romain Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. Jour.*, à paraître, 2005.
- [51] Charles Favre. Les applications monomiales en deux dimensions. *Michigan Math. J.*, 51(3) :467–475, 2003.
- [52] Charles Favre and Juan Rivera-Letelier. Théorème d’équidistribution de Brolin en dynamique  $p$ -adique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(4) :271–276, 2004.
- [53] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex Hénon mappings in  $\mathbb{C}^2$  and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.*, 65(2) :345–380, 1992.
- [54] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimensions. In *Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.
- [55] Akira Fujiki. On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 44(3) :225–258, 1978.
- [56] Yoshio Fujimoto and Noboru Nakayama. Compact complex surfaces admitting non-trivial surjective endomorphisms. *Tohoku Math. J. (2)*, 57(3) :395–426, 2005.
- [57] Étienne Ghys. Flots d’Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(2) :251–270, 1987.
- [58] Étienne Ghys. Rigidité différentiable des groupes fuchsien. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :163–185 (1994), 1993.

- [59] Étienne Ghys. Holomorphic Anosov systems. *Invent. Math.*, 119(3) :585–614, 1995.
- [60] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4) :329–407, 2001.
- [61] Étienne Ghys and Vlad Sergiescu. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helv.*, 62(2) :185–239, 1987.
- [62] Étienne Ghys and Alberto Verjovsky. Locally free holomorphic actions of the complex affine group. In *Geometric study of foliations (Tokyo, 1993)*, pages 201–217. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
- [63] Marat H. Gizatullin. Rational  $G$ -surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1) :110–144, 239, 1980.
- [64] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53 :53–73, 1981.
- [65] Mikhail Gromov. On the entropy of holomorphic map. *Manuscrit*, 1980.
- [66] Mikhaïl Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [67] Vincent Guedj. Courants extrémaux et dynamique complexe. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(3), 2005.
- [68] Vincent Guedj. Entropie topologique des applications méromorphes. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(06), 2005.
- [69] Vincent Guedj. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Ann. of Math. (2)*, 161(3), 2005.
- [70] Brian Harbourne. Blowings-up of  $\mathbf{P}^2$  and their blowings-down. *Duke Math. J.*, 52(1) :129–148, 1985.
- [71] Brian Harbourne. Automorphisms of cuspidal  $K3$ -like surfaces. In *Algebraic geometry : Sundance 1988*, volume 116 of *Contemp. Math.*, pages 47–60. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [72] Moris W. Hirsch, Charles C. Pugh, and Michael Shub. *Invariant manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583.
- [73] Vassilii A. Iskovskih and Yuri I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 86(128) :140–166, 1971.
- [74] Vassilii A. Iskovskih and Yuri G. Prokhorov. Fano varieties. In *Algebraic geometry, V*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–247. Springer, Berlin, 1999.
- [75] Teisuke Jin. Unstable manifolds and the Yoccoz inequality for complex Hénon mappings. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(3) :727–751, 2003.
- [76] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza*. Cambridge : Cambridge University Press., 1997.
- [77] Jong Hae Keum. Automorphisms of Jacobian Kummer surfaces. *Compositio Math.*, 107(3) :269–288, 1997.

- [78] Jonghae Keum and Shigeyuki Kondō. The automorphism groups of Kummer surfaces associated with the product of two elliptic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4) :1469–1487 (electronic), 2001.
- [79] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [80] Shigeyuki Kondō. The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface. *J. Algebraic Geom.*, 7(3) :589–609, 1998.
- [81] Robert Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. In *Complete intersections (Acireale, 1983)*, pages 29–61. Springer, Berlin, 1984.
- [82] Pierre Liardet and Dalibor Volný. Sums of continuous and differentiable functions in dynamical systems. *Israel J. Math.*, 98 :29–60, 1997.
- [83] David I. Lieberman. Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.
- [84] Ricardo Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics*, volume 8 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Portuguese by Silvio Levy.
- [85] Hideyuki Matsumura and Paul Monsky. On the automorphisms of hypersurfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 :347–361, 1963/1964.
- [86] Barry Mazur. The topology of rational points. *Experiment. Math.*, 1(1) :35–45, 1992.
- [87] Curtis T. McMullen. Dynamics on  $K3$  surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.
- [88] Curtis T. McMullen. Algebra and dynamics. *Lecture Notes*, <http://abel.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/03/html/index.html>, pages 1–108, 2004.
- [89] Curtis T. McMullen. Dynamics on blow-ups of the projective plane. *preprint*, 2005.
- [90] John Milnor. On Lattès maps. *preprint*, pages 1–29, 2004.
- [91] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. *Holomorphic dynamics*, volume 66 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1995 Japanese original and revised by the authors.
- [92] David Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [93] Noboru Nakayama. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math.*, 56(2) :433–446, 2002.
- [94] Amos Nevo and Elias M. Stein. A generalization of Birkhoff’s pointwise ergodic theorem. *Acta Math.*, 173(1) :135–154, 1994.

- [95] Kapil H. Paranjape and Vasudevan Srinivas. Self-maps of homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 98(2) :425–444, 1989.
- [96] Jorge Vitória Pereira and Percy Fernández Sánchez. Transformation groups of holomorphic foliations. *Comm. Anal. Geom.*, 10(5) :1115–1123, 2002.
- [97] Klaus Peters. Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.*, 15 :222–231, 1964.
- [98] Mary Rees. Positive measure sets of ergodic rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(3) :383–407, 1986.
- [99] Richard Sacksteder. The measures invariant under an expanding map. In *Géométrie différentielle (Colloq., Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1972)*, pages 179–194. Lecture Notes in Math., Vol. 392. Springer, Berlin, 1974.
- [100] Michael Schlessinger. Rigidity of quotient singularities. *Invent. Math.*, 14 :17–26, 1971.
- [101] Jean-Pierre Serre. Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil. *Ann. of Math. (2)*, 71 :392–394, 1960.
- [102] Michael Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. J. Math.*, 91 :175–199, 1969.
- [103] Michael Shub and Dennis Sullivan. Expanding endomorphisms of the circle revisited. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(2) :285–289, 1985.
- [104] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$ . In *Dynamique complexe*, pages 97–185. Panoramas et Synthèses, S.M.F., 1999.
- [105] Joseph H. Silverman. Rational points on  $K3$  surfaces : a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2) :347–373, 1991.
- [106] John Smillie. Complex dynamics in several variables. In *Flavors of geometry*, volume 31 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 117–150. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. With notes by Gregory T. Buzzard.
- [107] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.
- [108] Marcelo Viana. *Stochastic dynamics of deterministic systems*, volume 21. IMPA, 1997.
- [109] Claire Voisin. Intrinsic pseudo-volume forms and  $K$ -correspondences. In *The Fano Conference*, pages 761–792. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [110] Dalibor Volný. On limit theorems and category for dynamical systems. *Yokohama Math. J.*, 38(1) :29–35, 1990.
- [111] Jörg Winkelmann. Holomorphic self-maps of parallelizable manifolds. *Transform. Groups*, 3(1) :103–111, 1998.
- [112] Yosi Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987.
- [113] Shouwu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2) :281–300, 1995.



## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
1.1. Dynamique polynomiale	3
1.2. Transformations rationnelles et géométrie complexe	4
1.3. Dynamique et rigidité	6
1.4. Remarques	7
<b>Premier chapitre</b>	<b>9</b>
2. Existence de transformations holomorphes	11
2.1. Endomorphismes et entropie	11
2.2. Fibrations invariantes	15
2.3. Transformations holomorphes des courbes et des surfaces	21
2.4. Existence d'endomorphismes : trois cas particuliers	23
3. Exemples de transformations méromorphes	27
3.1. Les tores, leurs quotients, les exemples de LATTÈS et les exemples de KUMMER	27
3.2. Surfaces K3 et variétés de CALABI-YAU	31
3.3. Surfaces et variétés (presque) rationnelles	39
4. Groupes d'automorphismes	45
4.1. Groupes de difféomorphismes	46
4.2. Automorphismes des variétés complexes compactes	47
4.3. Conjecture de ZIMMER	48
4.4. Le plan affine	49
<b>Second chapitre</b>	<b>53</b>
5. Dynamique	55
5.1. Mesure d'entropie maximale	55
5.2. Transformations cohomologiquement dilatantes	58
5.3. Transformations birationnelles des surfaces	62
5.4. Applications géométriques	65
6. Rigidité	70
6.1. Automorphismes de type ANOSOV	70
6.2. Feuilletages et dynamiques pseudo-ANOSOV des surfaces	73
6.3. Mesure d'entropie maximale lisse	77
7. Liste des travaux présentés	84

Références