SUR LA DYNAMIQUE DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES DES SURFACES K3

SERGE CANTAT

RÉSUMÉ. We study the dynamics of the automorphisms group of K3 surfaces. Assuming that the surface contains two elliptic fibrations which are invariant by non-periodic automorphisms, we give the classification of invariant probability measures. We also describe the closure of orbits and then give applications to the repartition of rational points on K3 surfaces.

INTRODUCTION

Soit X une surface K3, c'est-à-dire une surface complexe compacte simplement connexe qui possède une 2-forme holomorphe partout non nulle. Son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X)$ est un groupe discret, en général fini, mais qui contient parfois des groupes libres à plusieurs générateurs. Lorsque c'est le cas, l'entropie topologique de certains automorphismes est strictement positive et leur dynamique est très riche [9].

Ici, nous nous intéressons à la dynamique du groupe $\mathrm{Aut}(X)$ dans son ensemble. Nous supposerons qu'il existe sur X au moins deux fibrations elliptiques (singulières) invariantes par des automorphismes d'ordre infini, hypothèse qui, à première vue peut sembler déraisonnable, mais est en fait fréquemment réalisée lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas viruellement abélien, c'est-à-dire lorsqu'il ne contient aucun sous-groupe abélien d'indice fini. Le but, atteint, est alors de classifier les mesures de probabilité et les fermés invariants par le groupe $\mathrm{Aut}(X)$.

Afin de présenter en détails les résultats principaux de ce texte, rappelons que pour classifier les mesures de probabilité invariantes il suffit d'étudier celles qui sont ergodiques, c'est-à-dire celles qui affectent une masse totale ou nulle à tout ensemble mesurable invariant. Toute mesure de probabilité invariante est en effet une moyenne pondérée de mesures ergodiques (voir le §2). Commençons donc par donner trois exemples de mesures ergodiques.

Exemple 1. Toute surface K3 est munie d'une forme volume Ω_X qui est canoniquement attachée à sa structure complexe et donc invariante par son groupe d'automorphismes. Pour la construire, il suffit de choisir une 2-forme holomorphe ω ne s'annulant pas et vérifiant

$$\int_X \omega \wedge \overline{\omega} = 1,$$

puis de poser $\Omega_X = \omega \wedge \overline{\omega}$. Puisque toute 2-forme holomorphe est le produit de ω par une fonction holomorphe, i.e. par un scalaire, on vérifie sans peine que Ω_X ne dépend pas du choix de ω.

Proposition 0.1. *Soit X une surface K3 qui possède deux fibrations elliptiques, chacune préservée par un automorphisme d'ordre infini. La mesure de probabilité associée à Ω_X est alors ergodique pour l'action de Aut(X).*

Exemple 2. Si X est une surface algébrique donnée par des équations à coefficients réels et si $\mathrm{Aut}(X)$ préserve la trace réelle $X(\mathbb{R})$ de X, la partie réelle de toute 2-forme holomorphe ω détermine sur $X(\mathbb{R})$ une mesure qui est invariante par $\mathrm{Aut}(X)$. La proposition précédente s'applique encore dans ce contexte et fournit un deuxième exemple de mesure ergodique.

Exemple 3. Le dernier exemple est celui des moyennes sur les orbites finies du groupe d'automorphismes. Lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas virtuellement abélien, l'existence de telles orbites semble rare mais se produit parfois(voir le §4).

Il existe parfois des diviseurs effectifs invariants par l'ensemble du groupe d'automorphismes. Lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas virtuellement abélien, ces diviseurs peuvent être contractés [14]. Ce phénomène est donc négligeable et n'apparaitrait plus si l'on admettait des surfaces singulières. Par ailleurs, nous ne connaissons pas d'exemple explicite pour lequel de tels diviseurs apparaissent. Nous n'étudierons donc pas cette situation.

Théorème 0.2. *Soit X une surface K3 qui admet deux fibrations invariantes par des automorphismes d'ordre infini. Toute mesure de probabilité Aut(X)-invariante et ergodique est alors :*

(o) nulle en dehors d'un diviseur Aut(X)-invariant et contractible , ou

(i) une mesure de comptage sur une orbite finie, ou

(ii) la mesure canonique Ω_X de X, ou

(iii) la restriction de la partie réelle d'une section non nulle du fibré canonique de X à une surface totalement réelle invariante.

Par définition, une sous-variété est totalement réelle lorsque ses plans tangents sont en tout point disjoints de leur multiplication par $\sqrt{-1}$.

Sous les mêmes hypothèses, on peut classifier les fermés invariants par $\mathrm{Aut}(X)$:

Théorème 0.3. *Si X est une surface K3 qui admet deux fibrations elliptiques invariantes par des automorphismes d'ordre infini, alors l'adhérence de* *toute Aut(X)-orbite est soit finie, soit une surface totalement réelle Aut(X)-invariante, soit la surface X tout entière, soit contenue dans un diviseur Aut(X)-invariant et contractible.*

L'existence d'automorphismes d'ordre infini, en particulier d'automorphismes dont l'entropie n'est pas nulle, a été récemment utilisée pour étudier la distribution des points rationnels sur certaines surfaces K3 (voir [16], [18], [1], [4], [5] et [6]). Les résultats présentés dans ce texte permettent d'aborder cette question, ce que nous faisons au dernier paragraphe. La méthode s'apparente fortement à celle de L. Wang [18], mais a l'avantage de séparer distinctement la dynamique de la géométrie diophantienne.

1. Fibrations elliptiques et twists de Dehn

Ce paragraphe résume quelques-unes des notions fondamentales concernant les automorphismes des surfaces K3, le but étant de décrire la place occupée au sein du groupe d'automorphismes par les transformations qui préservent une fibration elliptique. Au passage, nous introduisons les notations utilisées par la suite.

Définition 1. Soit X une surface K3. Un twist de Dehn est un automorphisme de X qui est d'ordre infini et préserve une fibration elliptique.

Cette définition sera en partie justifiée par la section 2 ; nous y verrons en effet que la dynamique de ces automorphismes a de nombreux points communs avec celle du twist de Dehn le plus simple, à savoir l'automorphisme du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit par la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les fibres de la fibration elliptique joueront le même rôle que les cercles horizontaux du tore, l'automorphisme agissant par translations le long de ces courbes.

• **Automorphismes et groupe de Néron-Severi (cf.** [3]**).** Soit X une surface K3 projective ; son groupe de Néron-Severi, c'est-à-dire le groupe des classes de Chern des fibrés en droites holomorphes, est un sous-groupe de $H^2(X,\mathbb{Z})$ noté S_X. Ce groupe abélien est muni d'une forme quadratique q_X, induite par la forme d'intersection de X, et son rang n_X est compris entre 1 et 20. Le théorème de la signature de Hodge affirme que q_X est de signature $(1, n_X - 1)$: il s'agit donc d'une forme de type hyperbolique. Nous noterons $\mathbb{H}_X$ la nappe de $\{c \in S_X \otimes \mathbb{R} \,|\, q_X(c,c) = 1\}$ contenant des classes de cohomologie de formes de Kähler et munirons cet ensemble de la métrique riemannienne induite par q_X. On obtient ainsi un modèle de l'espace hyperbolique réel de dimension $n_X - 1$.

Par définition, les courbes nodales sont les courbes rationnelles lisses de X et leurs classes de cohomologie sont les classes nodales de S_X ; cet ensemble sera noté $\mathrm{Nod}(X)$. La formule du genre montre que les classes nodales sont d'auto-intersection -2. Chaque classe nodale détermine donc une isométrie du réseau quadratique $(S_X,\, q_X)$, à savoir

$$\sigma_e : x \mapsto x + q_X(e,x)\, e.$$

Le groupe engendré par toutes ces réflexions sera noté W_X, pour "groupe de Weyl".

Soit $K(X)$ l'ensemble des classes de Kähler contenues dans $S_X \otimes \mathbb{R}$. Il s'agit du cône convexe déterminé par la famille de conditions :

$$\begin{cases} q_X(c,c) > 0 \\ q_X(c,e) > 0 \quad \forall e \in \mathrm{Nod}(X). \end{cases}$$

Le groupe W_X est un groupe de Coxeter pour lequel $K(X)$ est une chambre. Autrement dit, $K(X)$ est un domaine fondamental pour l'action de W_X sur la composante connexe de $\{c \,|\, q_X(c,c) > 0\}$ qui contient les classes des formes de Kähler.

Tout automorphisme f de X détermine une bijection linéaire $f^* : S_X \to S_X$ préservant simultanément la forme d'intersection q_X et le cône de Kähler $K(X)$. Il induit donc une isométrie de $\mathbb{H}_X$ que nous noterons $f^\diamond$. Le théorème suivant résume à la fois le paragraphe 7 de [15] et l'un des compléments apportés par [14] :

Théorème 1.1 (Pjateckiĭ-Šapiro & Šafarevič, Nikulin). *L'application $f \mapsto f^*$ est une représentation du groupe d'automorphismes de X dans celui des isométries de (S_X, q_X). Son image est d'indice fini dans le groupe des isométries de S_X qui préservent le cône $K(X)$, ou, ce qui revient au même, l'ensemble $Nod(X)$. Le noyau est fini et cyclique.*

En particulier, un automorphisme est périodique si et seulement si la transformation linéaire f^* associée l'est aussi.

Trois cas et seulement trois sont possibles pour un automorphisme f. Ou bien l'isométrie $f^\diamond$ est de type elliptique, ce qui signifie qu'elle admet un point fixe intérieur à $\mathbb{H}_X$, et dans ce cas f^* est d'ordre fini car c'est une rotation à coefficients entiers. Ou bien $f^\diamond$ admet un unique point fixe situé sur le bord de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_X$; ce point correspond alors à une droite f^*-invariante contenue dans le cône de lumière de q_X et nous dirons que f est de type parabolique. Ou bien $f^\diamond$ admet exactement deux points fixes situés sur le bord de $\mathbb{H}_X$; dans ce cas il s'agit de deux directions propres respectivement dilatée et contractée par f^* et nous dirons que f est de type hyperbolique.

Remarque 1. Si f est un automorphisme de type parabolique, la droite f^*-invariante contenue dans le cône de lumière de q_X contient des points entiers de S_X. L'invariance de $K(X)$ par f^* montre en outre que cette droite intersecte l'adhérence de $K(X)$.

• **Fibrations elliptiques.** Par définition, un élément de S_X est dit primitif s'il n'appartient à aucun des kS_X, pour k entier supérieur ou égal à 2.

Proposition 1.2 (Pjateckiĭ-Šapiro & Šafarevič, [15], §3). *Soit c un élément primitif de S_X qui est d'auto-intersection nulle et appartient à l'adhérence de $K(X)$. Le fibré en droites associé admet alors un unique pinceau de sections et les zéros de ces sections sont les fibres d'une fibration elliptique.*

Corollaire 1.3. *Soit f un automorphisme d'une surface K3. Si f est de type parabolique, il préserve une unique fibration elliptique et l'action induite sur la base de la fibration est d'ordre fini. En particulier, les automorphismes de type parabolique sont exactement les twists de Dehn.*

Démonstration. La droite contenue dans le cône de lumière de (S_X, q_X) et préservée par un tel automorphisme étant définie sur les rationnels, elle contient un vecteur primitif $c \in S_X$. Puisque l'adhérence de $K(X)$ intersecte cette droite, on peut supposer, quitte à changer c en $-c$, que ce vecteur primitif est dans l'adhérence de $K(X)$. La proposition précédente s'applique donc et fournit une fibration elliptique $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ qui, par unicité, est f-invariante. L'action induite sur la base est un automorphisme Φ de $\mathbb{P}^1$, i.e. une homographie.

Les valeurs critiques de la fibration sont en nombre fini et contiennent au moins trois éléments, ce qui résulte du calcul de caractéristique d'Euler suivant. Soit D_i, $i = 1, ..., k$, les fibres singulières de π, ϵ_i la caractéristique d'Euler de D_i et r_i le rang du sous-groupe de S_X engendré par les composantes irréductibles de D_i. Puisque deux fibres singulières distinctes ne se coupent pas, les sous-groupes engendrés par chacun des D_i sont en somme directe. Puisqu'ils sont tous contenus dans l'orthogonal de la classe de Chern de la fibration elliptique, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=k} r_i \leq n_X - 1 \leq 19.$$

Par ailleurs, la caractéristique d'Euler d'une surface K3 est égale à 24, ce qui entraîne $\sum \epsilon_i = 24$. Pour montrer que k est supérieur à 3, il suffit alors de remarquer que $\epsilon_i - r_i = 1$ si D_i est de type I_n, et $\epsilon_i - r_i = 2$ sinon.

Puisque Φ permute cet ensemble fini contenant au moins trois éléments distincts, Φ est une homographie d'ordre fini et la preuve du corollaire est terminée. $\square$

Corollaire 1.4 (Classique). *Toute surface K3 dont le nombre de Picard n_X est supérieur ou égal à 5 admet au moins une fibration elliptique.*

La démonstration est simple : le théorème de Meyer permet d'exhiber un élément primitif de S_X d'auto-intersection nulle et l'un des points de son orbite par W_X satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2.

• **Un résultat de Nikulin.** Tout ce qui précède montre que, une fois la structure du réseau quadratique (S_X, q_X) déterminée, l'existence de fibrations elliptiques est un problème classique d'arithmétique : il s'agit de savoir si une forme quadratique donnée représente zéro, ce qui relève du principe de Hasse-Minkowski. Décider de l'existence de twists de Dehn est un problème de nature différente qui a été résolu par V.V. Nikulin et E. Vinberg. Nous retiendrons deux résultats. Le premier affirme que, si q_X ne représente pas -2, toute fibration elliptique est stabilisée par un twist de Dehn ; ceci montre qu'en général les hypothèses du théorème 3.3 sont vérifiées dès qu'il existe deux fibrations elliptiques distinctes. Le deuxième s'énonce de la manière suivante :

Théorème 1.5 (V.V. Nikulin [14]). *Soit X une surface K3 algébrique dont le nombre de Picard n_X est supérieur ou égal à 6. Alors Aut(X) est infini si et seulement s'il existe sur X un twist de Dehn. Si Aut(X) est infini, il est virtuellement abélien si, et seulement s'il n'existe qu'une seule fibration elliptique préservée par un twist de Dehn.*

Exemple 4. En juxtaposant les travaux de V.V. Nikulin et ceux de T. Shioda, D.R. Morrison a démontré que tout réseau quadratique primitif contenu dans $U^3 \oplus (-E_8)^2$ et de signature $(1, n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, apparaît comme réseau de Néron-Severi d'une surface K3 [13]. En corollaire, tout réseau quadratique pair de rang n inférieur ou égal à 11 et de signature $(1, n-1)$ apparaît comme groupe de Néron-Severi d'une surface K3.

Considérons l'exemple de la forme quadratique $-4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_4^2)$. Elle ne représente pas 0 et correspond donc à une surface K3 projective de nombre de Picard 4 qui n'admet aucun twist de Dehn. Puisqu'elle ne représente pas -2, son groupe de Weyl est trivial et le groupe d'automorphismes de cette surface est un réseau dans $\mathrm{SO}(1,3)$; en particulier, c'est un groupe infini qui n'est pas virtuellement abélien.

Il existe des réseaux quadratiques de rang 5 qui correspondent à des surfaces K3 dont le groupe d'automorphismes n'est pas virtuellement abélien, qui admettent de nombreuses fibrations elliptiques, mais qui ne possèdent aucun twist de Dehn (voir [14] pour la liste complète de ces réseaux quadratiques).

Les résultats obtenus dans ce texte nécessitent l'existence de twists de Dehn le long de fibrations distinctes et ne s'appliquent donc pas à ces deux exemples qui, pourtant, ont un "gros" groupe d'automorphismes.

2. Dynamique des twists de Dehn

• **Mesures invariantes.** Soit G un groupe d'homéomorphismes d'un espace métrique compact X. Supposons que G préserve une mesure de probabilité et notons $\mathrm{Prob}(X)^G$ l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par les éléments de G. C'est un convexe non vide contenu dans l'ensemble des mesures de probabilité de X. Étant fermé, il est compact pour la topologie faible, i.e. pour la topologie de la convergence simple en évaluation sur chaque ensemble mesurable. La théorie de Krein-Milman nous apprend alors que tout point de $\mathrm{Prob}(X)^G$ est une moyenne de points extrémaux. Pour décrire toutes les mesures invariantes il suffit donc de décrire celles qui sont des points extrémaux de $\mathrm{Prob}(X)^G$. Ces mesures sont par définition les mesures ergodiques (et invariantes) sous l'action de G.

Il est facile de constater que les mesures ergodiques sont caractérisées par la propriété suivante : $\mu \in \mathrm{Prob}(X)^G$ est ergodique si et seulement si, pour toute partie mesurable A qui est G-invariante, $\mu(A)$ vaut 0 ou 1. Nous utiliserons constamment cette caractérisation.

Le lecteur désirant un exposé détaillé des notions de base de théorie ergodique peut se reporter aux premiers chapitres de [10].

• **Unique ergodicité.** Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact K est dit "uniquement ergodique" s'il préserve une unique mesure de probabilité sur K. L'exemple essentiel est celui des translations dans les groupes compacts :

Proposition 2.1 (cf. [10]). *Soit $g : K \to K$ une translation d'un groupe compact K. Alors g est uniquement ergodique si et seulement si ses orbites sont denses.*

Bien sûr, l'unique mesure invariante est la mesure de Haar du groupe. L'exemple classique est celui des rotations le long d'un cercle, i.e. le long d'un tore de dimension 1 : elles sont périodiques ou uniquement ergodiques.

Soit E une courbe elliptique, obtenue en quotientant la droite $\mathbb{C}$ par le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.\tau$, et $g : z \mapsto z + t$ une translation de E. Si t appartient à $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}.\tau$ alors g est une tranformation périodique. S'il existe un nombre réel irrationnel α tel que αt appartienne à $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}.\tau$ alors g préserve une fibration en cercles et détermine une rotation irrationnelle sur chacun d'entre eux. En particulier, g est uniquement ergodique en restriction à chacun de ces cercles et les mesures de probabilité de E qui sont g-invariantes sont exactement les produits de la mesure de Haar sur ces cercles par une mesure transverse à la fibration. Enfin, dans tous les cas restants, les orbites de g sont denses et g est uniquement ergodique.

• **Twists de Dehn.** Soit X une surface K3 algébrique et f un twist de Dehn le long d'une fibration elliptique $\pi : X \to \mathbb{P}^1$. Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés f^k on peut supposer qu'il préserve chacune des fibres de π et que sa restriction à toutes les fibres régulières est une translation (cf. corollaire 1.3). Soit $\lambda_{\mathbb{P}^1}$ la mesure de Lebesgue sur la base $\mathbb{P}^1$.

Proposition 2.2. *Pour $\lambda_{\mathbb{P}^1}$-presque tout point x, la transformation induite par f sur $\pi^{-1}(\{x\})$ est uniquement ergodique.*

Démonstration. Soit Δ un disque de $\mathbb{P}^1$ ne contenant aucune des valeurs critiques de π. Il existe alors sur Δ deux fonctions holomorphes à valeurs complexes, τ et t, telles que la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ soit le quotient de $\mathbb{C}$ par le réseau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau(x)$ et telles que f induise sur cette fibre la translation de vecteur $t(x)$. Si les orbites de f ne sont pas denses dans la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ c'est que le vecteur $t(x)$ pointe le long d'une droite à pente rationnelle dans la base $(1, \tau(x))$ de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Si f n'est pas uniquement ergodique le long de presque toute fibre, il existe donc trois fonctions continues a, b et l, à valeurs réelles telles que

$$t(x) = l(x)(a(x) + b(x)\tau(x)),$$

avec $(a(x), b(x)) \in \mathbb{Q}^2$. Puisque $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, les fonctions a et b sont constantes sur Δ. La fonction l est donc une fonction à valeurs réelles qui est le quotient de deux fonctions holomorphes, à savoir $t(x)/(a + b\tau(x))$. Elle aussi doit donc être constante.

En raisonnant par l'absurde, nous avons donc démontré que, pour tout x dans Δ, la translation induite par f sur la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ est donnée par le vecteur $t(x) = a' + b'\tau(x)$, où a' et b' sont deux nombres réels ne dépendant pas de x. Cette écriture est valable dans un voisinage Δ de tout point qui n'est pas une valeur critique de π. Pour montrer que ceci est impossible, il suffit d'exhiber un ouvert Δ comme ci-dessus pour lequel les nombres a' et b' sont rationnels : f serait alors périodique, contrairement à la définition des twists de Dehn.

Soit D l'union des fibres singulières de π, C une courbe d'auto-intersection strictement positive évitant les singularités de D, et $M = \#\{D \cap C\}$. Si m est un point d'intersection de C avec $f^n(C)$ situé sur D, il s'agit d'un des M points de $D \cap C$ et l'on peut supposer que m est un point fixe de f. Puisque f préserve la fibration π et induit l'identité sur la base, il existe des coordonnées locales autour de m dans lesquelles π est la projection sur l'axe des x et f est du type $(x, y) \mapsto (x, y + g(x))$ (rappelons que D est lisse au point m). L'application f^n est donc $(x, y) \mapsto (x, y + ng(x))$. En particulier, l'ordre de tangence de C avec $f^n(C)$ est égal à l'ordre d'annulation de g en 0 et ne dépend pas de n. Il en résulte que le nombre des points d'intersection entre C et $f^n(C)$ qui sont situés sur D – comptés avec multiplicité – est majoré par une constante indépendante de n. Puisque f^* est parabolique, $q_X([C], f^n([C]))$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. L'un de ces points d'intersection se situe donc en dehors de D. Ceci montre que les coefficients a' et b' introduits plus haut sont rationnels et termine la preuve. □

• **Vocabulaire et notations.** Nous noterons D_f le sous-ensemble de $\mathbb{P}^1$ constitué des points p pour lesquels la translation $f_p : \pi^{-1}(\{p\}) \to \pi^{-1}(\{p\})$ induite par f le long de la fibre n'est pas uniquement egodique. Par définition, D_f est le lieu de dégénérescence de f. C'est l'union des courbes réelles $\gamma_{a,b} \subset \mathbb{P}^1$ qui en coordonnées locales s'écrivent

$$\gamma_{a,b} = \left\{ z \in \mathbb{P}^1 : \frac{t(z)}{a + b\tau(z)} \in \mathbb{R} \right\},$$

où a et b sont deux nombres rationnels et t et τ sont les fonctions introduites dans la preuve de la proposition. Ces courbes sont donc en quantité dénombrable.

Pour chaque courbe γ du lieu de dégénérescence de f, on peut distinguer deux types de points le long de γ. Les points rationnels, pour lesquels f_p est périodique, et les points irrationnels pour lesquels f_p est une translation à orbites denses le long d'une fibration en cercles de $\pi^{-1}(\{p\})$. Dans ce deuxième cas, les mesures μ_p invariantes par f_p sont les mesures produit $\mu_p^\perp \otimes \lambda_{\mathbb{S}^1}$ où $\mu_p^\perp$ est une mesure transverse à la fibration en cercles et $\lambda_{\mathbb{S}^1}$ est la mesure de Haar du cercle.

Lorsque l'on dispose de deux twists de Dehn f_v et f_h le long de fibrations distinctes et d'une courbe de dégénérescence γ_v (resp. γ_h) pour chacun d'entre eux, le lieu de dégénérescence simultanée $S = \pi_v^{-1}(\gamma_v) \cap \pi_h^{-1}(\gamma_h)$ est localement donné par deux équations du type $\{(x, y) : H(x, y) \in \mathbb{R}\}$ où

$$H = \left(\frac{t}{a + b\tau} \right) \circ \pi$$

est une fonction holomorphe. Les ensembles S ainsi déterminés sont donc des surfaces totalement réelles.

3. Classification des mesures Aut(X)-invariantes

Ce paragraphe est consacré à la classification des mesures invariantes et ergodiques sous l'action de $\mathrm{Aut}(X)$.

• **Ergodicité du volume canonique.** Commençons par étudier l'ergodicité du volume canonique Ω_X. Nous le ferons en deux temps ce qui permettra de préciser la proposition énoncée dans l'introduction.

Proposition 3.1. *Soit X une surface $K3$ projective dont le nombre de Picard n_X est supérieur ou égal à 6. Alors, l'action du groupe Aut(X) est ergodique par rapport au volume canonique de X si, et seulement si, le groupe Aut(X) n'est pas virtuellement abélien.*

Lorsque le groupe d'automorphismes n'est pas virtuellement abélien le théorème 1.5 montre qu'il existe au moins deux fibrations elliptiques distinctes munies de twists de Dehn. Nous noterons π_v et π_h ces deux fibrations et f_v et f_h les deux twists. La fibration π_v sera dite verticale, ses fibres seront dites verticales et le twist f_v agira donc par translations verticales ; la fibraion π_h sera dite horizontale. La mesure canonique de X sera notée Ω_X. La mesure de Lebesgue de $\mathbb{P}^1$ sera notée $\lambda_{\mathbb{P}^1}$. Nous ne ferons pas de distinctions entre les deux bases de ces fibrations, les notant chacune $\mathbb{P}^1$.

Nous utiliserons souvent le processus de désintégration des mesures le long des fibrations π_v et π_h. À chaque mesure de probabilité ν sur X correpond ainsi une famille de mesures ν_x, $x \in \mathbb{P}^1$, vérifiant

$$\forall \xi \in L^1(\nu), \quad \int_X \xi(m)\, d\nu(m) = \int_{\mathbb{P}^1} \left\{ \int_{\pi_v^{-1}\{x\}} \xi(t)\, d\nu_x(t) \right\} d\pi_{v*}\nu(x).$$

Si ν est invariante par f_v, $(\pi_v)_*\nu$-presque toute mesure ν_x est invariante par la restriction de f_v à la fibre $\pi^{-1}\{x\}$. Pour un traitement clair et succinct de cette notion, nous renvoyons à la page 58 de [7].

Démonstration. Commençons par supposer que $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas virtuellement abélien. La mesure Ω_X étant invariante par le groupe d'automorphismes de X, elle l'est par les twist de Dehn. En désintégrant cette mesure le long de la fibration $\pi_v : X \to \mathbb{P}^1$ et en utilisant le twist de Dehn vertical f_v, on en déduit que la mesure Ω_X est le produit fibré d'une mesure absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathbb{P}^1}$ par la mesure de Haar dans chaque fibre (cf. proposition 2.2). Le même argument s'applique pour la projection horizontale.

Soit B un Borélien $\mathrm{Aut}(X)$-invariant de mesure canonique strictement positive. L'invariance de B par f_v montre que, pour $\lambda_{\mathbb{P}^1}$-presque tout point x de $\pi_v(B)$, B contient une partie de $\pi_v^{-1}(\{x\})$ dont la mesure de Haar est totale. Sans changer la mesure de B pour Ω_X, on peut donc supposer que B contient les fibres verticales qui le rencontrent. En projetant horizontalement, on en déduit que B contient aussi les fibres de π_h pour $\lambda_{\mathbb{P}^1}$-presque tout point de $\pi_h(B) = \mathbb{P}^1$, et donc que $\Omega_X(B) = 1$. La mesure Ω_X est donc ergodique.

Supposons maintenant que $\mathrm{Aut}(X)$ est virtuellement abélien et montrons que l'action n'est pas ergodique. Le théorème de Nikulin permet d'affirmer que

$\mathrm{Aut}(X)$ est virtuellement engendré par les twists de Dehn le long d'une unique fibration elliptique. Par conséquent, tout Borélien A saturé par les fibres de cette fibration est virtuellement invariant par $\mathrm{Aut}(X)$, et la mesure canonique n'est plus ergodique. $\square$

Corollaire 3.2 (de la preuve). *Soit X une surface $K3$ qui admet deux twists de Dehn le long de fibrations distinctes, alors Ω_X est Aut(X)-ergodique.*

Remarque 2. Supposons que X est une surface $K3$ projective déterminée par des équations à coefficients réels et que sa trace réelle $X(\mathbb{R})$ est invariante par le groupe d'automorphismes de X. Soit ω_X une 2-forme holomorphe non nulle. La mesure canonique de $X(\mathbb{R})$ est alors un multiple de la partie réelle de ω_X. Sous les hypothèses du corollaire, et lorsque $X(\mathbb{R})$ est connexe, cette mesure est invariante et ergodique ; il suffit en effet de remplacer les fibrations elliptiques de la démonstration précédente par les fibrations en cercles correspondantes. D'ailleurs, il n'est pas utile de supposer que la surface totalement réelle invariante est la trace réelle de X. Il suffit de supposer que $S \subset X$ est une surface totalement réelle connexe et $\mathrm{Aut}(X)$-invariante pour que la restriction de $\omega_X + \overline{\omega_X}$ à S soit invariante et ergodique.

• **Mesures ergodiques.** Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Soit X une surface $K3$ munie de twists de Dehn le long de fibrations distinctes. Toute mesure de probabilité $\mathrm{Aut}(X)$-invariante et ergodique est alors :*

(o) nulle en dehors d'un diviseur Aut(X)-invariant et contractible, ou

(i) la mesure canonique Ω_X de X, ou

(ii) une mesure de comptage sur une orbite finie, ou

(iii) la restriction de la partie réelle d'une section non nulle du fibré canonique de X à une surface totalement réelle invariante.

Remarque 3. Il est possible que cette classification des mesures ergodiques soit encore valable sous l'hypothèse plus faible "*$\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas virtuellement abélien*". Les méthodes employées ici sont insuffisantes, sauf lorsque n_X est supérieur ou égal à 6 (cf. théorème 1.5).

Lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ est infini et virtuellement abélien, deux cas sont envisageables : ou bien il existe une fibration elliptique préservée par tout automorphisme, et dans ce cas les mesures invariantes ont été décrites au deuxième paragraphe, ou bien non. Dans ce dernier cas, il existe un automorphisme ϕ qui engendre un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Aut}(X)$ et cet automorphisme a une entropie strictement positive [9]. L'ensemble des mesures ergodiques est alors nettement plus complexe. Ainsi, il existe parfois des points périodiques réels redevables du théorème K.A.M. [11], [8] ; en particulier, la mesure canonique de $X(\mathbb{R})$ n'est plus ergodique.

Remarque 4. Si μ est une mesure invariante et ergodique pour laquelle il existe un point x vérifiant $\mu\{x\} > 0$ (un atome), alors μ est concentrée sur une orbite finie. Ceci est évident et permet de restreindre l'étude aux mesures de probabilité sans atome. Pour des exemples d'orbites finies nous renvoyons le lecteur au dernier paragraphe.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème 3.3. Dans toute la suite, μ désigne donc une mesure de probabilité $\mathrm{Aut}(X)$-invariante, ergodique et sans atome. Puisque μ est invariante par tous les twists de Dehn, elle l'est par les deux twists f_v et f_h donnés dans l'énoncé (nous gardons les notations de la proposition 3.1). En désintégrant la mesure μ le long des fibres de π_v on obtient une famille de mesures de probabilité μ_p sur chaque fibre $\pi_v^{-1}(\{p\})$, $p \in \mathbb{P}^1$, et une mesure de probabilité ν_v sur $\mathbb{P}^1$, telles que

$$\int_X \xi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{P}^1} \left(\int_{\pi_v^{-1}(\{p\})} \xi(t)\, d\mu_p(t) \right) d\nu_v(p)$$

pour toute fonction continue ξ. Les mesures μ_p sont invariantes par les translations $f_p : \pi_v^{-1}(\{p\}) \to \pi_v^{-1}(\{p\})$. En particulier, si p n'appartient pas à l'ensemble de dégénérescence D_{f_v} de f_v, alors μ_p coïncide avec la mesure de Haar de $\pi_v^{-1}(\{p\})$, que nous noterons λ_p. On peut faire la même construction le long de la fibration horizontale π_h : $q \in \mathbb{P}^1$ désignera le point de la base, μ_q les mesures horizontales associées à μ et f_q les translations horizontales.

Remarque 5. Quitte à contracter les diviseurs effectifs $\mathrm{Aut}(X)$-invariants, on peut supposer que chaque composante irréductible de π_v (resp. π_h) se projette surjectivement sur la base de la fibration π_h (resp. π_v). Si ce n'était pas le cas, il suffirait en effet de conjuguer f_v par un élément de $\mathrm{Aut}(X)$ qui ne fixe pas les composantes des fibres communes à π_v et π_h. Par ce procédé, le cas (o) du théorème est mis de côté.

Lemme 3.4. *Si $\nu_v(D_{f_v}) = 0$ alors μ coïncide avec la mesure canonique Ω_X.*

Démonstration. Puisque $\nu_v(D_{f_v}) = 0$ on peut supposer que toutes les mesures μ_p sont les mesures de Haar λ_p, ce qui permet d'écrire $\mu = \nu_v \otimes_{\pi_v} \lambda_p$ (avec un léger abus de notation).

Montrons que la mesure ν_h est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{P}^1$. Raisonnant par l'absurde, il existe un borélien B dans X de μ-mesure strictement positive qui se projette horizontalement sur un ensemble A de $\lambda_{\mathbb{P}^1}$-mesure nulle. La mesure de Haar de chaque fibre de π_v se projette horizontalement en une mesure absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathbb{P}^1}$. Ceci entraîne $\lambda_p\left(B \cap \pi_v^{-1}(\{p\})\right) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{P}^1$, et contredit $\mu(B) > 0$.

En corollaire, $\nu_h(D_{f_h}) = 0$ et l'on peut écrire $\mu = \nu_h \otimes_{\pi_h} \lambda_q$. Puisque ν_h est absolument continue par rapport à $\lambda_{\mathbb{P}^1}$, la mesure μ est donc absolument continue par rapport à Ω_X et l'on conclut grace au corollaire de la proposition 3.1. $\square$

Lemme 3.5. *Si $\nu_v(D_{f_v})$ est strictement positif, alors $\nu_v(D_{f_v}) = 1$ et μ coïncide avec la restriction de la partie réelle d'une section du fibré canonique à une surface totalement réelle $Aut(X)$-invariante.*

Nous allons utiliser plusieurs fois le théorème de récurrence de Poincaré sous sa forme la plus élémentaire. Ce dernier affirme que, si $f : X \to X$ est une transformation mesurable préservant une mesure de probabilité ν et si A est une partie mesurable vérifiant $\nu(A) > 0$, alors il existe au moins un entier n non nul tel que $\nu(A \cap f^n(A)) > 0$. La démonstration est simple : puisque les $f^k(A)$ ont tous la même mesure, ils ne peuvent pas être deux à deux disjoints, car sinon $\nu(X)$ serait infinie ; il existe donc deux entiers m et m' disjoints tels que $\nu(f^m(A) \cap f^{m'}(A)) > 0$, et $n = m' - m$ convient.

Démonstration. C'est le cœur de la démonstration du théorème 3.3.

Première étape. *Les mesures ν_v et ν_h sont sans atome.*

Si p_0 est un atome de ν_v, alors $\mu(\pi_v^{-1}(\{p_0\}))$ est strictement positif. Puisque μ est invariante par f_h, on peut appliquer le théorème de récurrence de Poincaré à l'ensemble $\pi_v^{-1}(\{p_0\})$, ce qui montre l'existence d'un itéré f_h^n de f_h pour lequel $\pi_v^{-1}(\{p_0\}) \cap f_h^n(\pi_v^{-1}(\{p_0\}))$ est de mesure strictement positive. La remarque 5 montre que cette intersection est celle de deux courbes algébriques distinctes et ne comporte donc qu'un nombre fini de points ; μ a donc des atomes, ce qui est exclu. Cette preuve s'applique aussi à ν_h.

Deuxième étape. *Description préliminaire des mesures μ_p.*

Soit γ une courbe de dégénérescence de f_v telle que $\nu_v(\gamma)$ soit strictement positif. La première étape permet de supposer que f_p est, pour ν_v-presque tout point de γ, une translation à orbites denses le long des cercles d'une fibration rationnelle de $\pi_v^{-1}(\{p\})$. Pour chacun de ces points p il existe donc une mesure transverse invariante $\mu_p^\perp$ telle que $\mu_p = \mu_p^\perp \otimes \lambda_{\mathbb{S}^1}$ où $\lambda_{\mathbb{S}^1}$ est la mesure de Haar du cercle.

Montrons que $\mu_p^\perp$ est atomique pour ν_v-presque tout point p de γ. Si ce n'est pas le cas, il existe une partie γ' de γ de ν_v-mesure strictement positive sur laquelle $\mu_p^\perp$ est partout sans atome. Notons $B = \pi_v^{-1}(\gamma')$ et calculons sa mesure en utilisant la projection horizontale. La première chose à remarquer, c'est que l'intersection de toute fibre de π_h avec B est contenue dans une courbe réelle, à savoir l'image réciproque de γ par le revêtement ramifié π_v : $\pi_h^{-1}(\{q\}) \to \mathbb{P}^1$. En particulier, dans chaque fibre horizontale, la mesure de Haar de cette intersection est nulle. Il en résulte que l'intersection B' de B avec $\pi_h^{-1}(D_{f_h})$ est de mesure non nulle, car sinon B serait de mesure nulle. Utilisons à nouveau la fibration verticale. Puisque B' intersecte chaque verticale sur un ensemble dénombrable de courbes réelles, et puisque $\mu_p^{\perp}$ est sans atome pour tout point de $\pi_v(B')$, on en déduit que B' est de mesure nulle pour presque toute conditionnelle μ_p. Ceci est une contradiction car alors $\mu(B') = 0$.

On peut maintenant supposer que, pour tout point p de la courbe γ, la mesure μ_p est la somme d'un nombre fini de mesures de Haar sur des cercles d'une fibration rationnelle de $\pi_v^{-1}(\{p\})$. Cet énoncé est plus fort que celui que nous venons d'établir : il signifie que les mesures $\mu_p^{\perp}$ sont purement atomiques. Ceci résulte sans encombre de la méthode employée (en retranchant au borélien B les cercles des atomes de $\mu_p^{\perp}$).

Troisième étape. *La mesure ν_v est concentrée sur le lieu de dégénérescence du twist de Dehn f_v. Conclusion.*

Précisons légèrement les notations en désignant γ par γ_v et en choisissant une courbe γ_h de mesure positive pour ν_h dans la projection $\pi_h(\pi_v^{-1}(\gamma_v))$. Nous noterons S la surface totalement réelle qui se projette sur γ_v et γ_h ; en d'autres termes, $S = \pi_v^{-1}(\gamma_v) \cap \pi_h^{-1}(\gamma_h)$. Puisque la mesure μ et les mesures ν_v et ν_h sont sans atome (première étape), le théorème de récurrence de Poincaré montre que l'orbite de S par $\mathrm{Aut}(X)$ est finie. L'orbite de S détermine donc une surface totalement réelle invariante munie d'une mesure ergodique invariante, à savoir la restriction de μ à S. Puisque ν_v et ν_h sont sans atome, la mesure induite par μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et la preuve de la proposition 3.1 montre sans peine la fin du résultat. □

Démonstration du théorème. La conclusion est simple. Toute mesure $\mathrm{Aut}(X)$-invariante ergodique est soit atomique et coïncide alors avec la mesure de comptage sur une orbite finie, soit la mesure canonique (lemme 3.4) soit la mesure canonique d'une surface totalement réelle (lemme 3.5). □

4. Fermés invariants et points rationnels

• **Fermés invariants.** La démonstration du théorème suivant est très proche de celle du théorème 3.3. Nous n'en donnerons donc pas la preuve.

Théorème 4.1. *Soit X une surface K3 admettant deux fibrations invariantes par des automorphismes d'ordre infini. Soit m un point de X qui n'appartient à aucun diviseur Aut(X)-invariant. L'adhérence de son orbite par Aut(X) est alors un ensemble fini, une surface totalement réelle Aut(X)-invariante, ou la surface X toute entière.*

Exemple 5 (L. Wang,[18]). Soit X une surface K3 plongée dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, c'est-à-dire une hypersurface lisse de tridegré $(2, 2, 2)$; en projetant X sur les plans de coordonnées (x, y), (y, z), et (z, x), on obtient donc trois revêtements doubles. Les trois involutions holomorphes qui permutent les deux feuillets de chacun de ces revêtements engendrent un groupe libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ contenu dans $\mathrm{Aut}(X)$ [8], [18], [4]. La composition de deux de ces involutions est un twist de Dehn ; X admet donc au moins deux twists de Dehn le long de fibrations distinctes. Supposons que l'équation de X dans la partie affine $\mathbb{C}^3$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ soit

$$x^2y^2z^2 + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + xyz = x(1-x) + y(1-y) + z(1-z).$$

On vérifie alors que le groupe engendré par les trois involutions précédentes est d'indice fini dans $\mathrm{Aut}(X)$, puis que l'orbite du point $(0,0,0)$ se réduit à $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et est donc finie. Dans cet exemple, il n'y a pas de diviseur invariant par le groupe d'automorphismes. En particulier, cet exemple répond par l'affirmative à la question suivante de Nikulin ([14], page 1467) : existe-t-il une surface K3 dont le groupe d'automorphismes ne stabilise aucun diviseur effectif mais a au moins une orbite finie ?

Remarque 6. Une surface d'Enriques générique ne contient pas de courbe nodale, ce qui permet de calculer son groupe d'automorphismes [2]. En particulier, une telle surface admet au moins deux twists de Dehn le long de fibrations distinctes. Si X est le revêtement double d'une surface d'Enriques Y, la forme Ω_X passe au quotient et détermine une forme $\mathrm{Aut}(Y)$-invariante. Les théorèmes 3.3 et 4.1 sont donc valables pour les surfaces d'Enriques génériques. On peut en outre supposer qu'il n'y a ni diviseur ni surface totalement réelle invariants : toute orbite est donc finie ou dense.

• **Distribution des points rationnels.** Rappelons que, si X est une variété algébrique définie sur un corps de nombres k, et si k' est une extension de k, nous désignons par $X(k')$ l'ensemble des points de X à coordonnées dans k'. La lettre X désignera toujours $X(\mathbb{C})$. Les quelques lignes qui suivent sont motivées par les conjectures de [11] concernant la répartition des points rationnels sur les variétés algébriques.

Proposition 4.2. *Soit X une surface K3 projective définie sur un corps de nombres k. Il existe alors une extension finie k' de k telle que $X(k')$ soit $\mathrm{Aut}(X)$-invariante.*

Démonstration. D'après [17], le groupe d'automorphismes d'une surface K3 est un groupe de type fini. Si X est définie sur un corps de nombres, les équations déterminant les automorphismes de X sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il en résulte qu'un système de générateurs de $\mathrm{Aut}(X)$ est définie sur une extension finie k' de k, et donc, que tous les automorphismes le sont. $\square$

Exemple 6 (suite). Lorsque X est une surface K3 lisse de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ définie sur un corps de nombres k, par exemple sur $\mathbb{Q}$, les trois involutions sont définies sur k. Considérons la surface d'équation

$$x^2y^2z^2 + x^2(y^2+z^2) + x^2 + y^2 + z^2 + y(x+z) - z - y = 2$$

dans la partie affine $\mathbb{C}^3$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il se trouve que $X(\mathbb{R})$ admet une unique composante connexe homéomorphe à une sphère. Par ailleurs, le plan $\{x = 0\}$ coupe X sur la conique d'équation $y^2 + z^2 + yz - z - y = 2$. Cette conique a un point rationnel, $(-1, 0)$, et en a donc une infinité. On vérifie sans peine que l'orbite de cette courbe par $\mathrm{Aut}(X)$ est infinie. Le théorème 4.1 montre alors que $X(\mathbb{Q})$ est dense dans $X(\mathbb{R})$. On retrouve ainsi un exemple déjà traité par L. Wang.

Cette méthode permet de faire la part entre les arguments de nature dynamique et ceux de nature arithmétique. Le point crucial, outre l'existence de twists de Dehn, est l'existence d'une infinité de points rationnels.

Si X est une surface K3 définie sur un corps de nombres k, alors X admet toujours une courbe rationnelle singulière définie sur une extension finie k' de k [12]. Par construction, cette courbe R est d'auto-intersection strictement positive ; lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ est infini, l'orbite de R l'est donc aussi, car toute courbe irréductible ayant une orbite finie est d'auto-intersection négative. Si l'extension k' est suffisamment grande, les points à coordonnées dans k' sont denses dans R et $X(k')$ n'est contenue dans aucune surface totalement réelle $\mathrm{Aut}(X)$-invariante. Le théorème 4.1 entraîne donc (voir aussi [5], [6]) :

Proposition 4.3. *Soit X une surface K3 définie sur un corps de nombres k. Supposons que X admette deux fibrations elliptiques invariantes par des automorphismes d'ordre infini. Il existe alors une extension finie k' de k telle que $X(k')$ soit dense dans $X(\mathbb{C})$ pour la topologie usuelle.*

Remarque 7. Pour conclure, signalons qu'il n'existe pas d'endomorphisme de degré strictement supérieur à 1 sur les surfaces K3, ce qui résulte de la remarque suivante. Si g est un endomorphisme de X et ω est une 2-forme holomorphe partout non nulle, alors l'image réciproque de ω par g est également une 2-forme holomorphe, non nulle, et donc partout non nulle ; en particulier, la différentielle de g est partout de rang 2 et g est un revêtement. Puisque X est simplement connexe, g est un automorphisme. Ceci explique que nous ayons restreint l'étude aux automorphismes (qui, par ailleurs, coïncident avec les transformations birationnelles), sans chercher à employer d'autres transformations pour décrire la répartition des points rationnels.

Références

[1] A. Baragar. Rational points on $K3$ surfaces in. *Math. Ann.*, 305(3):541–558, 1996.

[2] W. Barth and C. Peters. Automorphisms of Enriques surfaces. *Invent. Math.*, 73(3):383–411, 1983.

[3] W. Barth, C. Peters, and A. van de Ven. *Compact complex surfaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] H. Billard. Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces $K3$. *Compositio Math.*, 108(3):247–275, 1997.

[5] F. A. Bogomolov and Yu. Tschinkel. Density of rational points on Enriques surfaces. *Math. Res. Lett.*, 5(5):623–628, 1998.

[6] F. A. Bogomolov and Yu. Tschinkel. On the density of rational points on elliptic fibrations. *J. Reine Angew. Math.*, 511:87–93, 1999.

[7] Bourbaki, N. *Chap. 6: Integration vectorielle.* Actualites scientifiques et industrielles. No.1281. Paris: Hermann 105 p., 1960.

[8] S. Cantat. *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes,* Thèse de Doctorat de l'ÉNS-Lyon, Décembre 1999.

[9] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10):901–906, 1999.

[10] R. Mañé. *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Portuguese by Silvio Levy.

[11] B. Mazur. Speculations about the topology of rational points: an update. *Astérisque*, (228):4, 165–182, 1995. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).

[12] S. Mori and S. Mukai. The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, pages 334–353. Springer, Berlin, 1983.

[13] D. R. Morrison. On $K3$ surfaces with large Picard number. *Invent. Math.*, 75(1):105–121, 1984.

[14] V. V. Nikulin. Quotient-groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms by subgroups generated by 2-reflections. Algebro-geometric applications. In *Current problems in mathematics, Vol. 18*, pages 3–114. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981.

[15] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and I. R. Šafarevič. Torelli's theorem for algebraic surfaces of type $K3$. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:530–572, 1971.

[16] J. H. Silverman. Rational points on $K3$ surfaces: a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2):347–373, 1991.

[17] Hans Sterk. Finiteness results for algebraic $K3$ surfaces. *Math. Z.*, 189(4):507–513, 1985.

[18] L. Wang. Rational points and canonical heights on $K3$-surfaces in $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, pages 273–289. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.