Automorphismes des surfaces complexes compactes
(travaux de Bedford & Kim, McMullen, Nagata, Harbourne...)

Résumé

Serge CANTAT

références : . Dolgachev-Ortland : Astérisque
. Bedford-Kim : Dynamics of Rational Surface Automorphisms
. McMullen : Publications IHES 2007.

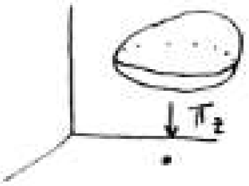
1. Points périodiques des automorphismes des surfaces complexes compactes kählériennes

.a. Aut(X) = automorphismes de X = difféomorphismes holomorphes de X
Aut(X) opère sur $H^*(X,\mathbb{Z})$ et préserve la décomposition de Hodge, la classe canonique $[K_X]$, la forme d'intersection sur $H^2(X,\mathbb{Z})$, la structure entière.
Si $f\in$ Aut(X) on pose $\lambda(f)$ = rayon spectral de $f^*\in GL(H^*(X,\mathbb{Z}))$.

.b. Théorème : Soit f un automorphisme d'une surface complexe compacte kählérienne X. Un, et un seul des cas suivants peut se produire :
- $\|(f^n)^*\|$ est borné ; dans ce cas $\exists k>0$ tel que f^k soit le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs holomorphes sur X
- $\|(f^n)^*\|$ croît quadratiquement (i.e. comme n^2) ; dans ce cas f préserve une fibration elliptique (éventuellement singulière) de X.
- $\lambda(f)>1$, i.e. $\|(f^n)^*\|$ croît exponentiellement ; dans ce cas, X doit être $\mathbb{P}^2$ éclaté ou un tore (éventuellement éclaté), ou une surface K3 (" " e), ou une surface d'Enriques (" " e).

. c. Exemples :
- surfaces abéliennes de la forme $E\times E$ où $E=\mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique : dans ce cas $SL_2(\mathbb{Z})\subset$ Aut(E^2).

• Surfaces K3 dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: génériquement $\mathrm{Aut}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_z : & \text{permutation des fibres de } \pi_z \\ \sigma_y : & \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \pi_y \\ \sigma_x : & \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \pi_x \end{array}\right\} \mathrm{Aut}(X) = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \rangle$$

$\lambda(f) > 1 \iff$ f est une composition de σ_x, σ_y et σ_z qui n'est pas conjuguée à une composition de seulement 1 ou 2 de ces involutions.

• d. Points périodiques : f automorphisme dont tous les points fixes sont transverses

• si $L(f) := \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \operatorname{Trace}\left(f^* |_{H^k(X,\mathbb{Z})}\right)$ alors

$$L(f) = \# \mathrm{Fix}(f)$$

• si $L^r(f) = \sum_{s=0}^{4} (-1)^s \operatorname{Trace}\left(f^* |_{H^{r,s}(X,\mathbb{C})}\right)$ alors

$$L^r(f) = \sum_{f(p)=p} \frac{\operatorname{Trace}(\Lambda^r Df_p)}{\det(\mathrm{Id} - Df_p)}$$

Théorème : Si f est un automorphisme d'une surface projective complexe X tel que $\lambda(f) > 1$, il existe une mesure de probabilité μ_f sur X telle que

$$\frac{1}{\lambda(f)^N} \sum_{\substack{p \in \mathrm{Periodique}(f,N) \\ p \text{ isolé}}} \delta_p \xrightarrow[N \to +\infty]{\text{faiblet}} \mu_f$$

Question : À quel point μ_f peut-elle être irrégulière ? Quel est son support ? Est-ce-que les points périodiques sont toujours denses ?

But : Construire des exemples où μ_f est irrégulière (par exemple μ_f pas absolument continue par rapport à Lebesgue, $\mathrm{support}(\mu_f) \neq X(\mathbb{C})$, ...).

2. Ensemble de Fatou et domaines de Siegel.

a. définition : $x \in \mathrm{Fatou}(f)$ si la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille normale sur un voisinage de x.

Théorème (Dinh & Sibony, C.) L'ensemble de Fatou est « presque » Kobayashi hyperbolique.

b. Domaine de Siegel : f a un domaine de Siegel autour du point fixe q s'il existe $A \in U_2$ (groupe unitaire) et $h : \mathrm{Boule}(0,1) \to X$ tel que h est un difféomorphisme holomorphe sur son image, $h(0) = q$ et $f \circ h = h \circ A$. Autrement dit, f est localement conjugué à une rotation au voisinage de q.

Corollaire : Si $\mathrm{Fatou}(f)$ contient un point fixe q de f, f a un domaine de Siegel autour de q, et réciproquement si f a un domaine de Siegel en q, alors $q \in \mathrm{Fatou}(f)$.

Question : Construire des domaines de Siegel ; dans ce cas $\mathrm{Fatou}(f) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Support}(\mu_f) \neq X$.

3. Linéarisation à une rotation.

a. le cas d'une variable.

- $f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad \alpha = e^{2i\pi\theta} \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- on cherche $h(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ avec $f \circ h(z) = h(\alpha z)$.
- formellement $b_2 = \dfrac{a_2}{\alpha^2 - \alpha}, \ldots b_n = \dfrac{a_n + X_n}{\alpha^n - \alpha}$ où $X_n \in \mathbb{Z}[a_i, i \leq n-1 ; b_i, i \leq n$

Théorème (Cremer)

- Si $\liminf |\alpha^q - \alpha|^{1/q} = 0$, il existe un germe analytique f qui n'est pas linéarisable.
- Si $\liminf |\alpha^q - \alpha|^{1/d^q} = 0$, aucun germe polynomial de degré d $f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + \cdots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d$ n'est linéarisable.

Théorème (Siegel) : Si $\exists c > 0, \exists M > 0 \quad |\alpha^q - q| \geq c\, q^{-M}$, tout germe $f(z) = \alpha z + a_2 z^2 + \cdots$ est localement linéarisable.

b. plusieurs variable. (deux variables pour simplifier)

- $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$ + termes d'ordre supérieur $|\alpha|=1$ $|\beta|=1$ pas des racines de l'unité.

Résonance : relation de la forme $\alpha = \alpha^a \beta^b$ ou de la forme $\beta = \alpha^a \beta^b$ $\Big\}$ $a \geq 0$ $b \geq 0$ entiers et $a+b \geq 2$

Monôme résonnant : $x^a y^b$.

<u>Problème</u> : Il y a déjà une obstruction <u>formelle</u> à la linéarisation : on ne peut chasser les monômes résonnants.

. <u>Exemple</u> : si f préserve le volume, $\mathrm{Jac}(f,0) = 1$ donc $\alpha\beta = 1$ et, par exemple, $\alpha = \alpha^2 \beta$.

. <u>Définition</u> : . On dit que α et β sont multiplicativement indépendant si la seule solution de $\alpha^a \beta^b = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ est la solution nulle $(0,0)$.

.. On dit que α et β sont simultanément diophantiens si $\exists c, M > 0$ t.q.

$$\min\left(|\alpha^a \beta^b - \alpha| , |\alpha^a \beta^b - \beta| \right) \geq c \; |a+b|^{-M} \quad \forall a \geq 0, b \ldots \text{ avec } a+b \ldots$$

<u>Théorème</u> : . Si α et β sont simultanément diophantiens on peut linéariser (Siegel étendu à plusieurs variables)

. Si α et β sont algébriques et multiplicativement indépendants, ils sont simultanément diophantiens (théorie de l'approximation diophantienne, Baker, Gelfond, Feldman ...)

4. Surfaces K3.

a. X une surface K3

Ω_1 = 2-forme holomorphe non nulle sur X

$\delta : \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ = déterminant jacobien vis-à-vis de Ω_1 :

$f \longmapsto \delta(f)$ $\qquad f^* \Omega_1 = \delta(f)\, \Omega_1$

Remarque : $\int_X \Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_1 < +\infty$: $|\delta(f)|^2$ = degré de $f = 1$.

b. Proposition : Si X est une K3 projective, $\delta(f)$ est une racine de l'unité ($\forall f \in \mathrm{Aut}(X)$).

Conséquence : Il y a toujours des résonances et l'on ne dispose pas de procédé pour linéariser.

c. Théorème (McMullen) : Il existe une surface K3 (non projective) munie d'un automorphisme f avec un domaine de Siegel (rem. dans ce cas $\lambda(f) > 1$ automatiquement).

remarques :

1. Si f a un unique point fixe les formules de Lefschetz permettent de calculer $\det(Df_p)$ et $\mathrm{Trace}(Df_p)$ donc α et β en fonction de f^*.
2. On cherche donc à imposer f^* pour que α et β soient de module 1 et multiplicativement indépendants
3. On réalise alors f connaissant f^* par Torelli et surjectivité des périodes.

Question : Existe-t-il un automorphisme f d'une K3 projective avec $\lambda(f) > 1$ et un ensemble de Fatou $\neq \emptyset$?

5. Surfaces Rationnelles.

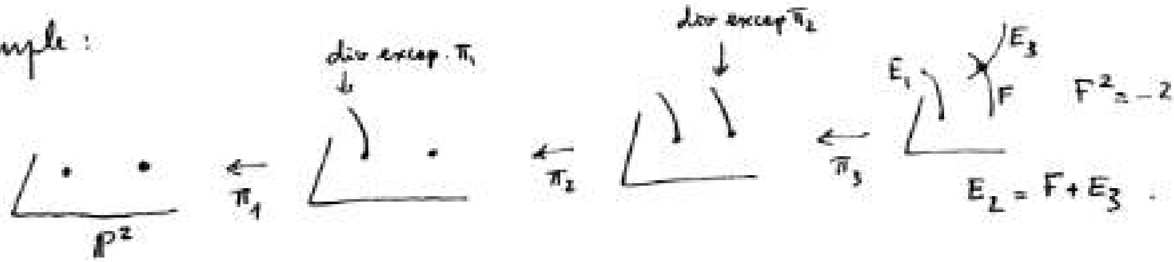
a. Nagata :

- S une surface rationnelle qui domine $\mathbb{P}^2$: si $\rho(S) = n+1$ (i.e. $\dim H^2(S,\mathbb{R}) = n+1$), S est obtenue en éclatant n points (éventuellement ∞^{nt} proches).

- configuration exceptionnelle : • si on éclate n points distincts $p_1, p_2, \dots, p_n$, $\mathcal{E} =$ E_0 = transformée totale d'une droite
  E_i = diviseur exceptionnel de p_i

  • sinon : $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n$ et $E_i = \pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_n{}^*(\text{Div Excep}(\pi_i))$.

  • exemple :



- racines simples pour $\mathcal{E}$: $\alpha_0 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3$.
  $\alpha_i = E_i - E_{i+1}$, $1 \le i \le n-1$.

- groupe de Weyl W_n : engendré par $s_i(x) = x + (x \cdot \alpha_i)\,\alpha_i$ $\in GL(\mathrm{Pic}(S))$.

- racines = W_n-orbite de l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$.
  racines nodales = celles quis sont représentées par un diviseur effectif.

Théorème (Nagata) :

1) La notion de racine et de racine nodale et le groupe de Weyl $W_n \subset GL(\mathrm{Pic}(S))$ ne dépendent pas du choix de la configuration exceptionnelle $\mathcal{E}$ sur S.

2) $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ config. excep. $\exists w \in W_n \;/\; w(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$

3) $\forall f \in \mathrm{Aut}(S)$ $\exists w \in W_n \;/\; f^* = w$

4) Si on éclate n points génériques, il n'y a pas de racine nodale sur la surface et $w(\mathcal{E})$ est une config. excep. $\forall w \in W_n$

b. Élément de Coxeter.

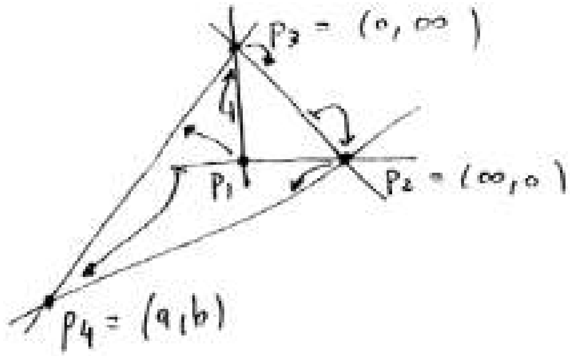
- $w_n = s_1 \circ \cdots \circ s_{n-1} \circ s_0$

$$\begin{cases} E_0 \to 2E_0 - E_2 - E_3 - E_4 \\ E_1 \to E_0 - E_3 - E_4 \\ E_2 \to E_0 - E_2 - E_4 \\ E_3 \to E_0 - E_2 - E_3 \\ E_i \to E_{i+1} \quad \text{et} \quad E_n \to E_1 \end{cases}$$

- Rayon Spectral$(w_n) > 1 \iff n \geq 10$.

- $f_{a,b}(x,y) = \left(y, \frac{y}{x}\right) + (a,b)$

Action de $f_{a,b}$ sur $\mathbb{P}^2$:



<u>Théorème</u> : Soit S une surface rationnelle, $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ un morphisme birationnel, $\mathcal{E}$ configuration exceptionnelle associée. ~~Soit f~~ L'automorphisme w_n de $\mathrm{Pic}(S)$ est réalisé par un automorphisme f de S si et seulement si (quitte à composer π par un élément de $PGL_3(\mathbb{C})$) on a

$$\exists a,b \qquad \pi \circ f \circ \pi^{-1} = f_{a,b}$$

et $\quad f_{a,b}^{n-3}(p_4) = p_1 \quad$ (et $f_{a,b}^{l-3}(p_4) \neq p_1$ si $l < n$)

et π^{-1} est l'éclatement de $p_1, p_2, p_3, p_4, f(p_4), \dots, f^{n-4}(p_4)$.

→ Il s'agit donc de trouver (a,b) pour que $f_{a,b}^{n-3}(a,b) = (0,0)$.

c. <u>Réalisation de w_n</u>

<u>Théorème</u> (Bedford & Kim, McMullen)

- Soit L l'extension de degré 10 de $\mathbb{Q}$ donnée par le polynôme

$$P_{10}(t) = \frac{1}{t-1}\left(t^{11} - t^9 - t^8 + t^3 + t^2 - 1\right).$$

Les racines de P_{10} sont toutes de module 1 sauf 2, λ_{10} et $1/\lambda_{10}$.

- Il y a 10 réalisations de w_{10} sur une surface rationnelle (à isomorphisme près) ; elles sont toutes définies par un $f_{a,b}$, avec $a, b \in L$.

- Chaque réalisation préserve une courbe cuspidale C : sur la surface telle que $[C] = -K_S$

- Si Ω est une 2-forme méromorphe à pôle le long de C, la réalisation f vérifie $f^*\Omega = \varepsilon\,\Omega$ où ε est l'une des 10 racines de P_{10}.
- La donnée de ε détermine la réalisation et les 10 réalisations sont conjuguées par $Gal(L/\mathbb{Q})$: si $\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$

$$\underset{\text{réalisation 1}}{f_{a,b}} \curvearrowright \underset{\text{seconde réalisation}}{f_{\sigma(a),\sigma(b)}}$$

- Quelque soit la réalisation choisie (parmi les 10), l'ensemble des points périodiques de f n'est pas dense dans S.

Explication : Ou bien un domaine de Siegel, ou bien un point fixe attractif.

d. Lorsque $n \geq 14$, il existe des réalisations de w_n sur des surfaces pour lesquelles $-mK_X$, $m>0$, n'a pas de section ($\forall m>0$).

e. Harbourne et McMullen.

→ Il existe maintenant une condition suffisante permettant de réaliser des éléments de W_n par des automorphismes sur des surfaces rationnelles obtenues en éclatant n points $\neq$ le long d'une cubique.

Théorème (Harbourne, McMullen)

Soit $w \in W_n$ un élément du groupe de Weyl, que l'on pense comme une isométrie de

$$\mathbb{Z}^{1,n} = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n) \text{ avec } \begin{cases} e_0^2 = 1 \\ e_i^2 = -1 & i \geq 1 \\ e_i \cdot e_j = 0 \end{cases}$$

Si il n'existe pas de racine α dont l'orbite par w est périodique, on peut trouver

- n points sur la cubique cuspidale $y^2 = x^3$
- un automorphisme f de $S = \mathbb{P}^2$ éclaté en ces n points

tel que (avec la config. exceptionnelle associée à ces n points) on ait

$$f^* = w$$