LA CONJECTURE DE BOGOMOLOV GÉOMÉTRIQUE

SERGE CANTAT

PRÉAMBULE

Version préliminaire : attention aux erreurs !

Ces notes suivent et complètent le mini-cours de quatre heures donné à Bucarest en Juin 2019. Il s'agit de présenter un travail en commun avec Z. Gao, P. Habegger et J. Xie (cf. [A] ci-dessous), qui donne une réponse positive à la conjecture de Bogomolov pour les corps de fonctions en caractéristique 0.

La présentation est informelle, ce texte devant être conçu, d'une part, comme une introduction à l'article initial écrit avec mes co-auteurs, d'autre part comme un complément à cet article et au cours que j'ai eu la chance de donner à Bucarest : on y trouvera une esquisse de preuve de l'inégalité de Gublert et Zhang, et une preuve du théorème de Muchnik dans un cas très particulier.

Références

[A] S. Cantat, Z. Gao, P. Habegger, J. Xie : The geometric Bogomolov conjecture in characteristic zero.

[B] Bombieri, Gubler : Heights (Cambridge University Press)

[C] Yamaki : Survey paper on the Geometric Bogomolov Conjecture

Nous recommandons au lecteur intéressé de consulter les articles de panorama d'Emmanuel Ullmo pour la version classique de la conjecture de Bogomolov, ainsi que celui de Poonen paru aux Inventiones Mathematicae pour des variations intéressantes.

Date: 2019.

L'auteur est soutenu par un financement de l'académie des sciences de Paris (fondation del Duca).

1. La conjecture de Bogomolov “arithmétique”

1.1. Si $x \in \mathbb{P}^N(\mathbf{Q})$, on peut écrire $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_N]$ avec des coordonnées $x_i \in \mathbf{Z}$ qui sont sans facteur commun distinct de ± 1. Cette écriture est unique, sauf à multiplier simultanément tous les x_i par -1. On définit alors la hauteur de x par

$$h(x) = \log \max_{0 \le i \le N} |x_i|. \tag{1.1}$$

Si $|\cdot|_p$ désigne la valeur absolue p-adique, normalisée par $|p|_p = 1/p$, alors

$$h(x) = \sum_{p \text{ premier ou } p=\infty} \log \max_i |x_i|_p \tag{1.2}$$

$$= \log \left(\prod_p \max |x_i|_p \right) \tag{1.3}$$

et cette écriture vaut pour toute écriture $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_N]$ à coordonnées rationnelles. Par exemple, dans $\mathbb{P}^1(\mathbf{Q})$, la hauteur du point $x = [2/3 : 1/5]$ vaut $h(x) = \log(10)$ (car $x = [10 : 3]$), et les contributions non triviales sont données par

$$\max_i |x_i|_p = 1 \quad \text{si } p = 2 \tag{1.4}$$

$$\max_i |x_i|_p = 3 \quad \text{si } p = 3 \tag{1.5}$$

$$\max_i |x_i|_p = 5 \quad \text{si } p = 5 \tag{1.6}$$

$$\max_i |x_i|_p = 2/3 \quad \text{si } p = \infty \tag{1.7}$$

ce qui donne bien

$$h(x) = \log(1) + \log(3) + \log(5) + \log(2/3) = \log(10). \tag{1.8}$$

La hauteur $h\colon \mathbb{P}^N(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ ne prend que des valeurs ≥ 0. Elle s’étend naturellement en une fonction $h\colon \mathbb{P}^N(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ qui mesure la complexité arithmétique des coordonnées de x (voir []).

1.2. Si X est une variété projective et L est un fibré en droites très ample sur X, il existe un entier $N \geq 1$ et un plongement de X dans $\mathbb{P}^N$ pour lequel L coïncide avec l’image réciproque de $O(1)$. Supposons que tout ceci soit défini sur $\mathbf{Q}$. On dispose alors d’une notion de hauteur $h_L\colon X(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$, celle induite par l’inclusion $X(\overline{\mathbf{Q}}) \subset \mathbb{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$. Ces diverses fonctions de hauteur vérifient des propriétés d’additivité naturelles, par exemple

$$h_{L \otimes L'}(x) = h_L(x) + h_{L'}(x) + O(1), \tag{1.9}$$

où $O(1)$ désigne une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. On obtient ainsi une application additive $L \mapsto h_L$ où $h_L\colon X(\overline{Q}) \to \mathbf{R}$ doit être vue dans l’espace des fonctions à valeurs réelles modulo les fonctions bornées; cette application est définie pour tout fibré en droite, et vérifie la propriété d'additivité (1.9).

1.3. Soit $f\colon \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ un endomorphisme, défini par $N+1$ polynômes homogènes $f_i \in \mathbf{Q}[x_0,\dots,x_N]$ de même degré $d \geq 2$, et sans zéros communs excepté $(0,\dots,0)$:

$$f(x) = [f_0(x) : \dots : f_N(x)] \tag{1.10}$$

où $x = [x_0 : \dots : x_N]$. Notons L le fibré $O(1)$. Alors $f^*L = O(d) = L^{\otimes d}$. On dit alors que l'endomorphisme f est polarisé (par le fibré très ample L). Alors

$$h_L(f(x)) = dh_L(x) + O(1). \tag{1.11}$$

Ceci résulte des propriétes d'additivité précédentes, mais montrons le directement. Tout d'abord,

$$\log|f_j| \leq d \log \max_i |x_i| + C^{ste} \tag{1.12}$$

où la constante C^{ste} ne dépend que des coefficients des f_j. Le théorème des zéros de Hilbert (dans sa version homogène) montre que les fonctions coordonnées x_j vérifient

$$x_j^{m_j} = Q_j(f_0,\dots,f_N) \tag{1.13}$$

pour certains polynômes homogènes Q_j en $N+1$ variables de degré m_j/d. Ainsi

$$m_j \log|x_j| \leq \frac{m_j}{d} \log\max|f_i| + C^{ste} \tag{1.14}$$

où les constantes dépendent maintenant des coefficients des Q_j. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$h_L(f[x_0 : \cdots : x_N]) - C \leq dh_L[x_0 : \cdots : x_N] \leq h_L(f[x_0 : \cdots : x_N]) - C. \tag{1.15}$$

Nous pouvons réécrire ces inégalités sous la forme

$$\frac{1}{d} f^* h_L(x) = h(x) + Er(x) \tag{1.16}$$

où la fonction d'erreur $Er\colon X(\overline{Q}) \to \mathbf{R}$ est bornée. En itérant cette relation, il vient

$$\frac{1}{d^n}(f^n))^* h_L(x) = h(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{d^j} Er(f^j(x)). \tag{1.17}$$

Puisque la fonction $x \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} d^{-j} Er(f^j(x))$ est bien définie et uniformément bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$, nous pouvons donc modifier h_L en posant

$$\hat{h}_L(x) = h(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{d^j} Er(f^j(x)). \tag{1.18}$$

C'est la hauteur canonique, ou hauteur de Tate, associée à l'endomorphisme polarisé f (et au fibré L). Elle vérifie

(1) $f^*\hat{h}_L = d\hat{h}_L$
(2) $\exists C > 0$, $|\hat{h}_L - h_L| \leq C$ (uniformément sur $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$).

On montre en outre que les points de $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$ dont la hauteur canonique est nulle sont exactement les points dont l'orbite $(f^n(x))_{n\geq 1}$ est finie (on parle de points pré-périodiques). Ceci découle des deux propriétés précédentes et du théorème de Northcott, suivant lequel les points de hauteurs $h_L(x) \leq B$ dont les coordonnées vivent dans des extensions de degré $\leq D$ sont en nombre fini, quelque soient les constantes B et $D > 0$.

1.4. Donnons nous maintenant une variété abélienne $A \subset \mathbb{P}^N$, définie sur $\mathbf{Q}$ (ou sur un corps de nombres).

Theorem 1.1 (Hauteur de Néron-Tate)**.** *Soit $[n]\colon A \to A$ la multiplication par n, avec $n \geq 1$ entier. La limite*

$$\hat{h}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} h_{O(1)}([n]x)$$

existe pour tout $x \in A(\overline{\mathbf{Q}}) \subset \mathbb{P}^N(\overline{\mathbf{Q}})$ et vérifie

(1) $\hat{h}([n]x) = n^2\hat{h}(x)$ *pour tout* $n \geq 1$*;*
(2) $\exists C > 0$*,* $|\hat{h}_L - h_L| \leq C$
(3) $\hat{h}(x) = 0$ *si et seulement si x est un point de torsion de A, si et seulement si l'ensemble $\{[n]x \mid n \geq 1\}$ est fini.*

C'est la **hauteur de Néron-Tate** de A, relative à la polarisation $L = O(1)$.

Soit X une sous-variété de A définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Pour $\varepsilon \geq 0$, notons

$$X(\varepsilon) = \{x \in X(\overline{Q}) \mid \hat{h}(x) \leq \varepsilon\}. \tag{1.19}$$

Par exemple, $X(0)$ est l'ensemble des points de torsion de A qui sont situés dans X. On dit que X est **petite** si $X(\varepsilon)$ est Zariski-dense dans X pour tout $\varepsilon > 0$.

On dit que X est **spéciale**, ou que X est un **translaté de torsion** (sous-entendu d'une sous-variété abélienne), s'il existe un point de torsion $a \in A(\overline{\mathbf{Q}})$ et une sous-variété abélienne $B \subset A$ telle que

$$X = a + B. \tag{1.20}$$

Si X est spéciale, les points de torsion de X sont Zariski-denses dans X, donc X est petite.

Theorem 1.2 (Ullmo, Zhang)**.** *Soit $X \subset A \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété d'une variété abélienne, toutes définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Alors X est petite si, et seulement si elle est spéciale.*

Cet énoncé est une réponse positive à la conjecture de Bogomolov (pour les corps de nombres). Il contient le théorème de Raynaud, qui affirme que X est spéciale si, et seulement si $X(0)$ est Zariski-dense dans X. La démonstration repose sur un théorème d'équidistribution des points de petite hauteur, c'est-à-dire d'équidistribution vers la mesure de Haar d'orbites sous Galois de points $x_n \in A$ dont la hauteur tend vers 0, théorème qui a joué un rôle important dans le développement de la "dynamique arithmétique".

2. VERSION GÉOMÉTRIQUE DE LA CONJECTURE DE BOGOMOLOV

2.1. Pour simplifier, nous considèrerons uniquement des variétés sur le corps des nombres complexes ; les corps de fonctions seront donc de la forme $\mathbf{C}(B)$ où B est une variété complexe, de dimension arbitraire. Le cas des corps de fonctions $\mathbf{k}(B)$, où $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique nulle, peut être déduit du cas complexe.

On va donc fixer

- une variété projective lisse $B \subset \mathbb{P}^m_{\mathbf{C}}$, de dimension d_B;
- $\mathcal{M}$ = un fibré en droites très ample sur B, à savoir $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbf{C}}}(1)_B$;
- β = la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^m_{\mathbf{C}}$ restreinte à B; c'est un représentant > 0 de $c_1(\mathcal{M})$ lorsque B est lisse;
- $K = \mathbf{C}(B)$, le corps de fonctions de B.

On se donne ensuite une variété abélienne A, définie sur K, et un fibré en droites très ample L sur A. On peut toujours supposer L symétrique, c'est-à-dire que $[-1]^*L = L$, quitte à remplacer L par $L \otimes [-1]^*L$. En utilisant le fibré L pour plonger A dans un espace projectif $\mathbb{P}^n_K$, on peut construire des entiers n et $N \geq 1$, un plongement

$$B \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \mathbb{P}^N_{\mathbf{C}} \tag{2.1}$$

et une sous-variété $\mathcal{A} \subset B \times \mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}$ telle que

(a) la projection $\pi \colon \mathcal{A} \to B$ définie par la première projection soit un modèle de A: cela signifie que la fibre générique de π au-dessus de B s'identifie à A;

(b) le fibré L sur A correspond à la restriction de $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{\mathbf{C}}}(1)_{|\mathcal{A}}$ à la fibre générique.

Quitte à remplacer $\mathcal{A}$ par sa normalisation, nous supposerons que $\mathcal{A}$ est normale (on peut en fait supposer $\mathcal{A}$ lisse quitte à effectuer une résolution des singularités et à modifier $\mathcal{L}$). Nous noterons alors α la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^N_{\mathbf{C}}$ restreinte à $\mathcal{A}$, si bien que $[\alpha] = c_1(\mathcal{L})$.

Enfin, X sera une sous-variété de A irréductible, dons nous noterons d_X la dimension. Si Y est n'importe quelle sous-variété de A, noterons $\tilde{Y}$ son adhérence de Zariski dans $\mathcal{A}$.

Le point de vue adopté sera celui qui consiste à interpréter $\mathcal{A}$ (et A) comme une famille de variétés abéliennes paramétrée par B (pouvant dégénérer au-dessus de certains points $b \in B$). Pour cela nous noterons B^o le complémentaire dans B du lieu critique de B et des valeurs critiques de π; ce fermé de Zariski que nous excluons contient l'image par π du lieu singulier de $\mathcal{A}$ et de toutes les fibres singulières. Nous noterons alors $\mathcal{A}^o = \pi^{-1}(B^o)$, et plus généralement

$$\tilde{Y}^o = \tilde{Y} \cap \pi^{-1}(B^o) \tag{2.2}$$

pour toute sous-variété Y de A. Si b appartient à B^o, nous noterons $\mathcal{A}_b$ et $\tilde{Y}_b$ les fibres de π. Lorsque b varie dans B^o, les $\mathcal{A}_b$ forment une famille de variétés abéliennes complexes et les $\tilde{X}_b$ une famille de sous-variétés des $\mathcal{A}_b$, tout ceci au-dessus de B^o.

2.2. Donnons nous maintenant un point $x \in A(K)$, défini sur K. Géométriquement, il lui correspond une section rationnelle $\sigma\colon B \dashrightarrow \mathcal{A}$ telle que

(1) $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$
(2) $\sigma(b) = [\sigma_0(b) : \cdots : \sigma_N(b)]$ où les σ_j sont des fonctions rationnelles sur B
(3) $\sigma(B)$, i.e. l'adhérence de Zariski de $\sigma(B^o)$, est égale à $\tilde{x}$.

Au-dessus de B^o, σ est régulière. Si $x \in A(\overline{K})$, alors x est défini sur une extension finie K' de $K = \mathbf{C}(B)$, disons de degré k, et $\tilde{x}$ correspond à une multisection de π de degré $\leq k$ (i.e. $\tilde{x}_b$ a au plus k points). Algébriquement, il existe un point x' de $A_{K'}$ tel que $x = x' \otimes_K K'$. Soit $\rho'\colon B' \to B$ la normalisation de B dans K'. Posons $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_B B'$ et $\rho\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ la projection sur le premier facteur. Soit $\tilde{x}'$ la clôture de Zariski de x' dans $\mathcal{A}'$. Pour mesurer la taille, ou complexité, ou hauteur, de x on pose alors

$$h(x) = \frac{1}{[K' : K]} \left(\tilde{x}' \cdot c_1(\rho^* \mathcal{L}) \cdot c_1(\rho^* \pi^* \mathcal{M})^{d_B - 1} \right) \tag{2.3}$$

où $\cdot$ désigne le produit d'intersection dans $\mathcal{A}'$. Pour simplifier, nous supposerons dans la suite que x est défini sur K ; le cas général s'obtient en effectuant le changement de base $\rho'\colon B' \to B$. On dispose alors des propriétés suivantes :

$$h(x) = \int_{\tilde{x}} \alpha \wedge (\pi^* \beta)^{d_B - 1}, \tag{2.4}$$

c'est l'intégration d'une forme différentielle lisse sur une sous-variété (singulière a priori) de $\mathbb{P}^N_{\mathbf{C}}$; en restreignant le calcul de cette intégrale à la partie lisse (c'est en fait comme cela qu'on peut définir l'intégrale précédente par un théorème de Lelong), on obtient

$$h(x) = \int_{\tilde{x}^o} \alpha \wedge (\pi^* \beta)^{d_B - 1}, \tag{2.5}$$

et comme $\tilde{x}^o = \sigma(B^o)$, un changement de variable donne

$$h(x) = \int_{B^o} (\sigma^* \alpha) \wedge (\beta)^{d_B - 1} \tag{2.6}$$

$$= [\sigma^* \alpha] \cdot [\beta]^{d_B - 1}, \tag{2.7}$$

produit d'intersection dans B. La hauteur de x est donc le dégré de σ, au sens du degré de $\sigma^* \mathcal{O}(1)$ par rapport à la polarisation $\mathcal{M}$.

Si on suppose toujours x défini sur K, et qu'on paramètre $\tilde{x}$ par une section rationnelle $\sigma(b) = [\sigma_0(b) : \cdots : \sigma_N(b)]$ comme ci-dessus, alors

$$h(x) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \max_i |\sigma_i|_{\mathfrak{p}} \tag{2.8}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des diviseurs premiers de B, c'est-à-dire l'ensemble des hypersurfaces irréductibles et réduites de B, et

$$\log|\varphi|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{ordre}_{\mathfrak{p}}(\varphi) \times \deg(\mathfrak{p}) \tag{2.9}$$

pour tout $\varphi \in \mathbf{C}(B)$, $\mathrm{ordre}_{\mathfrak{p}}(\varphi)$ désignant l'ordre d'annulation le long de $\mathfrak{p}$, et le degré du diviseur $\mathfrak{p}$ étant calculer avec la polarisation $\mathcal{M}$:

$$\deg(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cdot c_1(\mathcal{M})^{d_B - 1}. \tag{2.10}$$

Cette notion de hauteur est donc bien analogue à la hauteur arithmétique introduite dans le chapitre précédent.

Remark 2.1. La formule du produit arithmétique, qui stipule que $\sum \log|a|_p = 0$ pour tout a dans $\mathbf{Q}^*$ lorsque la somme porte sur tous les nombres premiers et $p = \infty$ (valeur absolue usuelle pour la place à l'infini), correspond ici à la formule du produit géométrique $\sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{ordre}_{\mathfrak{p}}(\varphi) \times \deg(\mathfrak{p}) = 0$ pour toute fonction rationnelle $\varphi \in \mathbf{C}(B)$.

Pour $X \subset A$, définie sur K et de dimension d_X, on pose alors

$$h(X) = \int_{\tilde{X}^o} \alpha^{d_X+1} \wedge (\pi^*\beta)^{d_B-1}. \tag{2.11}$$

Lorsque X est définie sur une extension finie K' de K, il faut à nouveau effectuer le changement de base donné par la normalisation B' de B dans K' et diviser l'intégrale obtenue par $[K' : K]$. Lorsque B est une courbe, $h(X)$ est donc le volume de $\tilde{X}$ pour la métrique de Fubini-Study.

2.3. La hauteur canonique, ou hauteur de Néron-Tate, est alors définie par

$$\hat{h}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} h([n]x) \tag{2.12}$$

lorsque x est un point et, plus généralement,

$$\hat{h}(X) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2(d_X+1)}} h([n]_* X) \tag{2.13}$$

lorsque X est une sous-variété de A définie sur $\overline{K}$ de dimension d_X. Ces deux limites existent ; elles ne dépendent pas du modèle $\mathcal{A}$ mais dépendent de la polarisation L de A. On remarqua aussi que $[n]\colon A \to A$ détermine une transformation rationnelle $\Phi_n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui est régulière au-dessus de B^o, et que

$$\hat{h}(X) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{2(d_X+1)}} \int_{\tilde{X}^o} (\Phi_n^*\alpha)^{d_X} \wedge (\pi^*\beta)^{d_B-1} \tag{2.14}$$

lorsque X est définie sur K.

Example 2.2. Supposons que $\mathcal{A}$ soit une famille triviale $\mathcal{A} = B \times C$ pour une variété abélienne C définie sur $\mathbf{C}$. Pour tout point $c \in C$ on obtient un point $x \in A$ pour lequel $\tilde{x} = B \times \{c\}$. Supposons en outre que $\alpha = \pi^*\beta + p_C^*\tau$ où p_C est la projection sur Cet τ est une forme de kähler sur C. Alors

$$h(x) = \int_{B\times\{c\}} p_C^*\tau \wedge (\pi^*\beta)^{d_B-1} + \int_{B\times\{c\}} (\pi^*\beta)^{d_B} \tag{2.15}$$

$$= \int_{B\times\{c\}} p_C^*\tau \wedge (\pi^*\beta)^{d_B-1} \tag{2.16}$$

$$= \int_B \beta^{d_B} \tag{2.17}$$

est égal au volume de B pour la forme de kähler β, ceci quelque soit le point x. En particulier, $h(x)$ ne dépend pas du point c initialement choisi sur C, donc $h([n]x) = h(x)$ pour tout $n > 0$, et $\hat{h}(x)$ pour tout point x de la forme $B \times \{c\}$, $c \in C$. Les points de hauteur canonique nulle sont donc dense dans X pour toute sous-variété X de la forme $B \times Y$ avec $Y \subset C$. De même, si $X \subset C$, alors

$$h((\Phi_n)_*(B \times X)) \leq C^{ste} Vol_\tau(nX) \times Vol_\beta(B) \leq C^{ste} n^{2d_X} \tag{2.18}$$

pour certaines constantes > 0, et ceci force $\hat{h}(x)$ à être nulle.

Si on change de polarisation, en remplaçant α par une autre forme de kähler κ, alors $c_0^{-1}\alpha \leq \kappa \leq c_0\alpha$ pour une constante $c_0 > 1$ et l'on obtient encore $\hat{h}(B \times \{c\}) = 0 = \hat{h}(B \times X)$.

2.4. L'exemple précédent conduit à introduire les notions suivantes. Nous dirons qu'une sous-variété $X \subset A$, définie sur $\overline{K}$, est un translaté de torsion (sous-entendu d'une sous-variété abélienne) s'il existe une sous-variété abélienne $D \subset A_{\overline{K}}$ et un point de torsion $a \in A(\overline{K})$ tels que $X = a + D$. Nous dirons que X est spéciale s'il existe

(a) une variété abélienne C définie sur $\mathbf{C}$ et une sous-variété $Y \subset C$
(b) un plongement $\iota \colon C \otimes_{\mathbf{C}} \overline{K} \to X$
(c) un translaté de torsion $a + D \subset A_{\overline{K}}$

tels que

$$X = (a + D) + \iota(Y). \tag{2.19}$$

Si x est un point de torsion de $a + D$ et x' est un point de Y, alors la hauteur canonique de $x + \iota(x')$ est nulle. En effet, l'ensemble $\{[n](x)\}_{n\geq 0}$ est fini, et le volume de $[n]\tilde{(x')}$ est borné, donc celui de $[n](x \tilde{+} \iota(x'))$ l'est aussi et la hauteur de $x + x'$ est nulle.

Theorem 2.3. *Soit B une variété projective complexe. Soit A une variété abélienne définie sur le corps de fonctions $K = \mathbf{C}(B)$. Soit X une sous-variété irréductible de A définie sur $\overline{K}$. Alors X est petite si, et seulement si X est spéciale.*

Dans l'énoncé, nous aurions pu remplacer le corps $\mathbf{C}$ par n'importe quel corps de caractéristique 0. L'énoncé ne précise pas le choix de la polarisation L conduisant à la définition de la hauteur canonique $\hat{h}$, et donc à la notion de petite sous-variété. En fait, si l'on change de polarisations, donc de formes de kähler α et β, on ne change pas la petitesse ; pour le voir, il suffit de remarquer que deux formes de kähler sont toujours comparables : si κ et κ' sont deux formes de kähler sur une variété compacte M, il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}\kappa \leq \kappa' \leq C\kappa$; si L et L' sont deux polarisations, il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}(L \cdot D) \leq (L' \cdot D) \leq C(L \cdot D)$ pour toute courbe D.

Dans la suite, nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 2.3. Pour simplifier, nous supposerons que toute application $\iota\colon C\otimes_{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{C}(B)}\to A$ est constante, pour toute variété abélienne C définie sur $\mathbf{C}$; autrement dit, la “partie isotriviale” de A est triviale (la $\overline{K}/\mathbf{C}$-trace de A est nulle). Nous supposerons aussi que X est définie sur K.

3. Le minimum essentiel

3.1. Soit X une sous-variété irréductible de la variété abélienne A. Le minimum essentiel de X est le nombre réel $\operatorname{ess}(X)\geq 0$ défini par

$$\operatorname{ess}(X)=\sup_{Y}\inf_{x\in X(\overline{K})\setminus Y}\hat{h}(x) \tag{3.1}$$

où Y décrit l'ensemble des fermés de Zariski stricts de X. Ainsi, $\operatorname{ess}(X)\leq\varepsilon$ signifie que l'on peut trouver des points de hauteur $\leq\varepsilon$ dans tout ouvert de Zariski non vide de X. Donc X est petite si et seulement si sa hauteur essentielle est nulle. Le théorème suivant est la version géométrique, obtenue par Gubler, d'une inégalité découverte auparavant par Shouwu Zhang dans le cas des corps de nombres.

Theorem 3.1 (Gubler, Zhang)**.** *Si X est une sous-variété irréductible de $A_{\overline{K}}$ de dimension d_X alors*

$$\operatorname{ess}(X)\leq\frac{\hat{h}(X)}{\deg_L(X)}\leq(d_X+1)\operatorname{ess}(X).$$

Ici, $\deg_L(X)$ est le degré de X pour la polarisation L; c'est donc $X\cdot(L)^{d_X}$ (calculé dans A).

Preuve. Nous allons seulement démontrer l'inégalité

$$\hat{h}(X)\leq(d_X+1)\deg_L(X)\operatorname{ess}(X) \tag{3.2}$$

car c'est celle qui est utilisée pour démontrer le théorème 2.3. Quitte à effectuer un changement de base, nous pouvons supposer que X est définie sur K. Enfin, nous supposerons que B est une courbe et que le degré de $\mathcal{M}$ est égal à 1.

Travaillons tout d'abord avec la hauteur h associée au fibré L. Posons

$$a=-\frac{h(X)}{(d_X+1)\deg_L(X)}+\varepsilon \tag{3.3}$$

avec $\varepsilon>0$ rationnel.

Remark 3.2.

(1).– Puisque $\dim(B) = 1$, la hauteur de X est

$$h(X) = \tilde{X} \cdot c_1(\mathcal{L})^{d_X+1} \tag{3.4}$$
$$= \text{ degré de } \mathcal{L}_{|\tilde{X}} \tag{3.5}$$
$$= \int_{\tilde{X}^o} \alpha^{d_X+1}. \tag{3.6}$$

Pour calculer cette quantité on choisit $d_X + 1$ sections génériques de $\mathcal{L}$ et on note $D_1, \ldots, D_{d_X+1}$ leurs zéros. Alors

$$h(X) = \tilde{X} \cdot D_1 \cdot D_2 \cdots D_{d_X+1}. \tag{3.7}$$

On peut aussi choisir les sections de $\mathcal{L}$ au-dessus de $\tilde{X}$ et calculer l'intersection $D_1 \cdots D_{d_X+1}$ dans $\tilde{X}$, mais ceci nécessite de donner un sens à cette intersection lorsque $\tilde{X}$ est singulière.

(2).– Pour calculer $\deg_L(X)$, on doit calculer le produit d'intersection $X \cdot L^k$ dans la variété abélienne A. Ceci revient à calculer le nombre de points d'intersection de la courbe $C = D_1 \cap \ldots \cap D_{d_X} \cap \tilde{X}$ avec une fibre générale $\tilde{X}_b$, $b \in B^o$. Autrement dit, $\deg_L(X)$ est le degré du revêtement ramifié $\pi_{|C} \colon C \to B$.

(3).– Pour illustrer la différence entre ces deux quantités, on peut penser que $\tilde{X} = B \times V$ est le produit de deux courbes, et que $C = B + mV$ pour un certain entier $m > 0$. Alors $C^2 = 2m = h(X)$ tandis que $\deg_L(X) = 1$.

Revenons à la démonstration de l'inégalité de Gubler et Zhang. Considérons le $\mathbf{Q}$-fibré en droites

$$\mathcal{L}(a) = \mathcal{L} \otimes \pi^*(\mathcal{M})^{\otimes a}. \tag{3.8}$$

Le degré de $\mathcal{L}(a)$ sur $\tilde{X}$ est donné par la formule

$$\tilde{X} \cdot c_1(\mathcal{L}(a))^{d_X+1} = \tilde{X} \cdot \Big(c_1(\mathcal{L})^{d_X+1} + (d_X+1) a c_1(\mathcal{L})^{d_X} \cdot c_1(\pi * \mathcal{M}) \Big) \tag{3.9}$$
$$A = \tilde{X} \cdot c_1(\mathcal{L})^{d_X+1} + (d_X+1) a \tilde{X} \cdot c_1(\mathcal{L})^{d_X} c_1(\pi^* \mathcal{M}) \tag{3.10}$$
$$= h_L(X) + (d_X+1) a \deg_L(X) \tag{3.11}$$
$$= \varepsilon(d_X+1) \deg_L(X) \tag{3.12}$$
$$> 0. \tag{3.13}$$

D'autre part, $\mathcal{L}(a)$ est relativement ample le long de $\tilde{X}$. La formule de Riemann-Roch et des théorèmes d'annulation pour $R^i\pi_*\mathcal{L}(a)^{\otimes n}$, $i > 0$, donnent alors l'énoncé suivant : si $n >> 1$, l'espace des sections de $\mathcal{L}(a)^{\otimes n}$ au-dessus de $\tilde{X}$ est de dimension positive. Plus précisément, on a

- $R^i\pi_*(\mathcal{L}(a)^{\otimes n}) = 0$ si $i > 0$ et n est suffisamment grand;
- donc $H^i(\tilde{X}, \mathcal{L}(a)^{\otimes n}) = H^i(B, \pi_*\mathcal{L}(a)^{\otimes n})$ pour $i \geq 1$
- mais comme B est une courbe $H^i(B, \pi_*\mathcal{L}(a)^{\otimes n}) = 0$ dès que $i \geq 2$.

Asymptotiquement, on obtient donc

$$h^0(\tilde{X},\mathcal{L}(a)^{\otimes n})-h^1(\tilde{X},\mathcal{L}(a)^{\otimes n})=\frac{1}{(d_X+1)!}\tilde{X}\cdot c_1(\mathcal{L}(a)^{\otimes n})^{d_X+1}n^{d_X+1}+O(n^{d_X}) \tag{3.14}$$

ce qui implique $h^0(\tilde{X},\mathcal{L}(a)^{\otimes n})>0$ pour n grand.

Soient $Z\subset\tilde{X}$ le diviseur des zéros d'une telle section et $x\in X(\overline{K})$ un point hors de Z : $\tilde{x}$ correspond à une multisection σ de $\pi\colon\tilde{X}\to B$ dont l'image n'est pas contenue dans Z. Soit $[K(x):K]$ le degré du corps de définition de x, c'est-à-dire le degré de la multisection σ. Alors

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{[K(x):K]}\tilde{x}\cdot c_1(\mathcal{L}) && (3.15)\\ &= \frac{1}{[K(x):K]}\tilde{x}\cdot\left(c_1(\mathcal{L}(a))-c_1(\pi^*\mathcal{M})^{\otimes a}\right) && (3.16)\\ &= \frac{1}{[K(x):K]}\tilde{x}\cdot Z-a\frac{1}{[K(x):K]}\tilde{x}\cdot c_1(\pi^*\mathcal{M}) && (3.17)\end{aligned}$$

et le premier terme est positif car $\tilde{x}$ n'est pas contenu dans Z, tandis que le second terme est exactement égal à $-a$ car $\mathcal{M}$ est de degré 1. Nous obtenons donc

$$h(x)\geq -a=\frac{h(X)}{(d_X+1)\deg_L(X)}-\varepsilon. \tag{3.18}$$

Nous avons donc montré la propriété suivante : $\forall\varepsilon>0$, il existe un diviseur $Z\subset X$ tel que $h(x)\geq h(X)(d_X+1)^{-1}\deg_L(X)^{-1}-\varepsilon$ dès que x est hors de Z. Ceci montre que l'infimum de $h(x)$, pour x hors d'un fermé de Zariski $Y\subset X$ strict mais arbitraire est minoré par $h(X)(d_X+1)^{-1}\deg_L(X)^{-1}$. Ce que nous cherchons, c'est une version de cette inégalité dans laquelle la hauteur h est remplacée par la hauteur canonique.

Nous pouvons maintenant appliquer cette propriété aux variétés $[n]_*X$ en prenant $\varepsilon=n^{-1}$, ce qui donne une suite de diviseurs $Z_n\subset[n]_*X$ pour lesquels

$$h(x)\geq\frac{h([n]_*X)}{n^{2d_X}(d_X+1)\deg_L(X)}-\frac{1}{n} \tag{3.19}$$

car $\deg_L([n]_*X)=n^{2d_X}\deg_L(X)$.

D'autre part, comme nous l'avons vu dans le cas particulier de la hauteur canonique associée à un endomorphisme de l'espace projectif, la hauteur canonique $\hat{h}$ est uniformément approchée par les hauteurs $h_n(x)=n^{-2}h([n]_*x)$: pour tout $\eta>0$, il existe un entier n_0 tel que $-\eta\leq h_{n_0}(x)-h(x)\leq\eta$ pour tout $x\in X(\overline{K}$. Fixons donc η et $n\geq n_0$ de la sorte, puis choisissons $Z_n\subset[n]_*X$ pour que l'inégalité (3.19) soit satisfaite. Alors dès que $[n]x$ est hors de Z_n nous obtenons

$$\hat{h}(x) \geq \frac{h([n]_* X)}{n^{2d_X+2}(d_X+1)\deg_L(X)} - \frac{1}{n} - \eta \tag{3.20}$$

Ceci montre que le minimum essentiel de X est minorée par le membre de droite de cette inégalité. On peut ensuite faire tendre η vers 0 et simultanément n vers l'infini, et l'on obtient l'inégalité cherchée. $\square$

4. INTERMEZZO : FEUILLETAGE, HOLONOMIE, MONODROMIE

Lorsque X est petite, l'inégalité de Gubler et Zhang entraine que la hauteur canonique de X est nulle : $\hat{h}(X) = 0$. Comme expliqué dans [A], ceci force $\tilde{X}$ à être saturée par le feuilletage de Betti, et ceci force les fibres $\tilde{X}_b$ à être invariante par la monodromie de la famille de variétés abéliennes $\mathcal{A}_b$, $b \in B^o$. Je ne répèterai pas ici l'argument de géométrie différentielle qui conduit à ce résultat, car il est présenté en détails dans [A], et dans le cours que j'ai donné.

Précisons toutefois ce que signifie cette invariance. Soit $\pi_1(B^o; b)$ le groupe fondamental de B^o, basé en un point b. Identifions $H_1(\mathcal{A}_b; \mathbf{Z})$ à $\mathbf{Z}^{2g}$, où g est la dimension de A, via le choix d'une base de $H_1(\mathcal{A}_b; \mathbf{Z})$. Ceci fait, $\mathcal{A}_b$ est isomorphe à $M := \mathbf{R}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$ comme groupe de Lie réel, via un unique isomorphisme envoyant la base de $H_1(\mathcal{A}_b; \mathbf{Z})$ sur la base canonique de $\mathbf{Z}^{2g}$. La représentation de monodromie (pour la variation de variétés abéliennes $\mathcal{A}_b$, $b \in B^o$) fournit alors un homomorphisme

$$\pi_1(B^o; b) \to \mathsf{GL}_{2g}(\mathbf{Z}). \tag{4.1}$$

L'image $\Gamma \subset \mathsf{GL}_{2g}(\mathbf{Z})$ de cet homomorphisme est, par définition, le groupe de monodromie de $\mathcal{A}^o \to B^o$.

La variété abélienne complexe $\mathcal{A}_b$ est identifiée au tore $M := \mathbf{R}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$, et le groupe Γ agit sur ce tore (via l'holonomie du feuilletage de Betti); cette action est l'action évidente de $\Gamma \subset \mathsf{GL}_{2g}(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{R}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$: c'est l'action linéaire, passée au quotient sur le tore M. Maintenant, l'invariance de $\tilde{X}_b$ signifie que

$$\tilde{X}_b \subset \mathcal{A}_b \simeq M \tag{4.2}$$

est un sous-ensemble anaytique réel de M invariant sous l'action de Γ.

L'adhérence de Zariski de Γ dans GL_{2g} est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbf{Q}$ car Γ est contenu dans $GL_{2g}(\mathbf{Z})$; nous noterons

$$G = Zar(\Gamma)^{irr} \tag{4.3}$$

sa composante irréductible.

Le théorème de la partie fixe de Deligne, couplé à l'hypothèse suivant laquelle $\mathcal{A}$ n'a pas de partie isotriviale, montre le théorème suivant.

Theorem 4.1 (Deligne, Griffith's, Grothendieck)**.** *Le groupe G est semi-simple, et $\mathbf{R}^{2g} \simeq H_1(\mathcal{A}_b; \mathbf{R})$ ne contient aucun vecteur non-nul G-invariant: $\forall v \neq 0$ dans $\mathbf{R}^{2g}$, il existe $g \in G$ (resp. $\in \Gamma$) tel que $g(v) \neq v$.*

L'absence de vecteur invariant provient de l'absence de partie isotriviale dans A. Ainsi, lorsque l'on décompose la représentation de G sur $V := \mathbf{R}^{2g}$ en une somme de représentation irréductible, aucun facteur n'est trivial.

5. Théorème de Muchnik, et de Guivarc'h et Starkov

Rappelons que $X \subset A$ est supposée petite (et irréductible). Les paragraphes précédents montrent que

(1) $\tilde{X}_b$ est invariant par le groupe de monodromie Γ
(2) le groupe de monodromie est gros : son adhérence de Zariski est un groupe de Lie semi-simple $G \subset \mathsf{GL}_{2g}$, défini sur $\mathbf{Q}$, qui n'a pas de vecteur invariant dans $V = \mathbf{R}^{2g}$.

Nous voulons montrer que ceci impose des contraintes très fortes sur $\tilde{X}_b$.

5.1. Commençons par un exemple qui illustre quelques unes des propriétés dynamiques pouvant être employées. Notons $M = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et $f\colon M \to M$ la transformation linéaire

$$f(x,y) = (2x+y, x+y) \qquad \mod \mathbf{Z}^2. \tag{5.1}$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à 1, et sa trace est égale à 3, donc cette matrice a une valeur propre $\lambda = (3+\sqrt{5})/2 > 1$, l'autre étant $1/\lambda$. Les droites propres associées, et leurs parallèles dans $\mathbf{R}^2$, passent au quotient en deux feuilletages linéaires f invariant : les feuilles du premier sont dilatées sous l'action de f, les feuilles du second sont contractées (par les facteurs λ et λ^{-1} respectivement). Le premier est le feuilletage instable, le second est le feuilletage stable de f.

Proposition 5.1. *Soit F un sous-ensemble fermé de M qui est f-invariant. Si F contient une courbe $Y \subset M$ de classe $\mathcal{C}^1$ alors $F = M$.*

Proof. Supposons qu'il existe un point $q \in Y$ en lequel Y est transverse au feuilletage stable. Soit $z \in M$ un point de torsion. Il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k(z) = z$ car f permute les points de torsion de M en préservant l'ordre de torsion, et l'ensemble des points de torsion d'ordre égal à celui de z est fini (il s'agit de point contenus dans $(1/D)\mathbf{Z}^2/\mathbf{Z}^2$ où le dénominateur D est l'ordre de z). La feuille du feuilletage stable de f passant par z est dense dans M; elle passe donc dans des voisinages arbitrairement petits de q, si bien qu'elle intersecte Y transversalement en un point q'. Cette feuille est f^k-invariante, donc les points $f^{km}(q')$ pour $m > 0$ appartiennent à cette feuille. Puisque la feuille est contractée d'un facteur λ^{-k} par f^k et que z est fixé, la suite de points $f^{km}(q')$ converge ver z lorsque m tend vers $+\infty$. Ces points étant dans F (par invariance de F) et F étant fermé, nous déduisons que z appartient à F. Ainsi, tous les points de torsion sont dans F, et $F = M$ puisque F est fermé.

Supposons que Y n'est nulle part transverse au feuilletage stable; alors Y doit être transverse au feuilletage instable en au moins un point q. En changeant f

en f^{-1}, on peut alors reproduire le même argument pour déduire que $F = M$. □

5.2. Revenons à la preuve de la conjecture de Bogomolov, en ajoutant une hypothèse supplémentaire : nous supposerons ici que la représentation de G sur V est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Ceci revient à dire que la variété A est simple (sur $\overline{K}$). On peut alors décomposer la représentation de G sur V en une somme de représentations irréductibles sur $\mathbf{R}$:

$$V = V_1 \oplus V_2 \cdots \oplus V_m. \tag{5.2}$$

Notons G_i l'image de $G(\mathbf{R})$ dans $\mathsf{GL}(V_i)$ obtenue en restreignant l'action de G au facteur V_i, puis notons $V_c = \oplus_j V_j$ la somme des facteurs pour lesquels G_j est compact, et $V_{nc} = \oplus_i V_i$ la somme des facteurs pour lesquels G_i n'est pas compact.

Theorem 5.2 (Muchnik; Guivarc'h et Starkov)**.** *Si la représentation de $G = Zar(\Gamma)^irr$ sur V est $\mathbf{Q}$-irréductible, la dichotomie suivante est satisfaite par tout point x de M: ou bien l'orbite de x sous l'action de Γ est dense dans M, ou bien $x = a + v$ où a est un point de torsion de M et v est la projection (dans M) d'un vecteur de V_c.*

Ce théorème est remarquable, car Γ est seulement Zariski dense dans G ; il peut être très fin (et notamment d'indice infini) dans $G(\mathbf{Z})$.

5.3. Nous pouvons maintenant esquisser la preuve de la conjecture de Bogomolov dans le cadre géométrique dans le cas particulier de variétés abéliennes (géométriquement) simples : cette hypothèse de simplicité inclu les deux hypothèses faites jusqu'ici, à savoir l'absence de partie isotriviale dans $\mathcal{A}$, et l'irréductibilité, sur $\mathbf{Q}$, de la représentation de G sur V. Dans ce cadre, la conjecture de Bogomolov stipule que X est un point (car les variétés spéciales sont alors des translatés de torsion et les sous-variétés abéliennes de A sont réduites à des points).

La variété irréductibe et petite X fournit alors une sous-variété analytique complexe $\tilde{X}_b$ de $\mathcal{A}_b$ qui est Γ-invariante. Notons

$$\tau\colon V = \mathbf{R}^{2g} \simeq \mathbf{C}^g \to M = \mathbf{R}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g} \simeq \mathcal{A}_b = \mathbf{C}^{2g}/\Lambda_b$$

la projection, où Λ_b est le réseau $\mathbf{Z}^{2g}$, mais vu dans $\mathbf{C}^{2g}$. Nous penserons tout d'abord à $s\tilde{X}_b$ comme à un sous-ensemble analytique réel de M qui est Γ-invariant. C'est un ensemble connexe, et même connexe par arcs (même si $\tilde{X}_b$ est singulier). Puisque $\tilde{X}_b$ est distinct de M, tous les points de $\tilde{X}_b$ sont de la forme $a + v$ pour un point de torsion a et un point v de V_c. Comme l'ensemble des points de torsion est dénombrable, on déduit facilement que $\tilde{X}_b$ est localement contenu dans un translaté de $\tau(V_c)$ (plus précisément, dans une composante connexe local d'un translaté de $\tau(V_c)$). Comme $\tilde{X}_b$ est connexe, $\tilde{X}_b$ est contenu dans un translaté de $a+\tau(V_c)$, pour un point de torsion a de M.

Puisque la représentation de G sur V est $\mathbf{Q}$-irréductible, V_c ne contient aucun vecteur rationnel $w \in \mathbf{Q}^{2g}$, le vecteur nul mis à part. En effet, s'il existait un tel vecteur, son orbite sous Γ engendrerait un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel non trivial de V_c qui serait G-invariant, et la représentation de G serai réductible sur $\mathbf{Q}$ (notez que V_c est un sous-espace strict de V, car sinon Γ serait contenu dans un groupe compact, donc Γ serait fini, et G serait trivial). Puisque $V_c \cap \mathbf{Q}^{2g} = 0$, $V_c \cap \mathbf{Z}^{2g} = 0$, et la projection τ est injective en restriction à V_c. Ainsi, $v \in V_c \mapsto a+\tau(v) \in M$ est injective.

On peut donc relever la variété compacte connexe $\tilde{X}_b \subset a+\tau(V_c) \subset \mathcal{A}_b$ en un sous-ensemble complexe analytique et compact de $\mathbf{C}^{2g}$. Un tel ensemble étant réduit à un point, $\tilde{X}_b$ est un point, et X est donc un point de torsion. Ceci conclut la démonstration.

Remark 5.3. Nous avons passé sous silence quelques détails techniques lorsque nous avons affirmé (i) que $\tilde{X}_b$ est contenue dans un translaté $a+\tau(V_c)$ et (ii) que l'on pouvait relever $\tilde{X}_b$ dans $\mathbf{C}^{2g}$ en un sous-ensemble analytique complexe compact. Le lecteur trouvera les détails dans [A].

Remark 5.4. Lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse d'irréductibilité (sur $\mathbf{Q}$) de la représentation V de G, la différence principale avec l'esquisse de preuve que nous venons de donner réside dans l'usage du théorème de Muchnik, Guivarc'h et Starkov. Il peut alors exister des sous-ensembles analytiques complexes Γ invariants et il faut démontrer que les seuls candidats sont bien des variétés spéciales. Ceci occupe une part importante de [A] (voir la section 4 de cet article).

Merci à tous les participants de l'édition numéro XXVII de Gael !

FIN

Serge Cantat, IRMAR, Campus de Beaulieu, bâtiments 22-23 263 avenue du Général Leclerc, CS 74205 35042 RENNES Cédex
E-mail address: serge.cantat@univ-rennes1.fr