

DÉCOUPLER LES ANGLES

SERGE CANTAT

Chapeau.— Ce texte est une promenade circulaire, qui part d'un point du cercle d'angle θ et bondit au point d'angle 10θ (modulo 2π), puis à celui d'angle 100θ , etc. Au détour de notre ballade apparaîtront nombres rationnels, développement décimal et approximations rationnelles des nombres réels puis, en fin de parcours, quelques déformations irrégulières du cercle initial pointeront leur nez.

1. LE CERCLE

Le cercle centré à l'origine du plan et de rayon 1 sera noté \mathbf{S} : un point d'abscisse x et d'ordonnée y est donc situé sur le cercle \mathbf{S} si $x^2 + y^2 = 1$; il existe alors un unique nombre réel t compris entre 0 et 1 tel que $x = \cos(2\pi t)$ et $y = \sin(2\pi t)$. L'angle t est donc ici compté en *nombres de tour*, ou encore en *proportion d'un tour complet*, ceci en partant du point $(1, 0)$ et en tournant dans le sens direct (l'inverse du sens des aiguilles d'une montre). Ainsi, lorsque $t = 1/3$, le point (x, y) est situé dans le deuxième quadrans.

2. LE DÉCUPLEMENT DE L'ANGLE

Le **décuplement de l'angle** est l'application $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ qui, au point

$$(x, y) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

associe le point image $f(x, y)$ dont l'angle est dix fois plus grand ; on change donc t en $10t$, si bien que

$$f(x, y) = (\cos(20\pi t), \sin(20\pi t)).$$

Le doublement de l'angle pourrait être défini de manière similaire en changeant t en $2t$. Nous pourrions aussi définir le triplement de l'angle, et plus généralement la multiplication de l'angle par n'importe quel entier k . Les propriétés que nous allons décrire dans la suite dépendraient de k , mais les phénomènes essentiels apparaissent pour n'importe quel entier distinct de -1 , 0 et 1 .

Si l'on utilise des nombres complexes $z = x + iy$, avec $i^2 = -1$, les points du cercle sont de la forme $z = \exp(2i\pi t)$ et f est l'application qui transforme z en $f(z) = z^{10}$.

Date: Juin 2018.

3. TRAJECTOIRES

Nous allons étudier la transformation $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ comme un processus régissant l'évolution temporelle des points du cercle \mathbf{S} ; en sciences physiques, on dirait que \mathbf{S} est l'espace des phases et que f est la loi d'évolution du système. Mais ici le temps s'écoule discontinument : le système évolue par à-coups, son angle étant décuplé à chaque seconde. Ainsi, un point initial (x, y) du cercle passe en $(x_1, y_1) = f(x, y)$ à la première seconde, puis en $(x_2, y_2) = f(x_1, y_1) = f(f(x, y))$ à la deuxième seconde, et ainsi de suite. L'indice n dans la notation (x_n, y_n) correspond au temps écoulé, donc au nombre d'applications de la transformation f . Le point de départ sera donc souvent noté (x_0, y_0) , l'indice 0 correspondant à l'instant initial.

Par définition, la **trajectoire** – ou **orbite**– du point (x, y) est la succession des points (x_n, y_n) ; il s'agit donc d'une suite de points situés sur le cercle, l'angle du $(n + 1)$ -ème étant dix fois celui du n -ème. Cette dernière affirmation doit être précisée, car nous avons supposé que l'angle était compris entre 0 et 1. L'orbite (x_n, y_n) d'un point correspond donc à une succession d'angles t_n tels que

$$t_{n+1} = 10t_n \quad (\text{modulo } 1).$$

Par exemple, si l'angle initial t_0 est égal à $1/7$, alors $10t_0$ vaut $10/7 = 1 + 3/7$ ce qui correspond à l'angle $3/7$ si on le rapporte entre 0 et 1 ; ainsi, le point d'angle $t_0 = 1/7$ se trouve transporté en le point d'angle $t_1 = 3/7$ par f . Le point suivant de la trajectoire correspond à $10t_1 = 30/7 = 4 + 2/7$, soit un angle $t_2 = 2/7$. Et ainsi de suite. La suite (t_n) des angles obtenus en partant de la position initiale $t_0 = 1/7$ devient

$$t_0 = 1/7, t_1 = 3/7, t_2 = 2/7, t_3 = 6/7, t_4 = 4/7, t_5 = 5/7, \\ \text{puis } t_6 = 1/7 = t_0, t_7 = 3/7 = t_1, \text{ etc}$$

si bien que la suite des angles est **périodique**: elle passe et repasse successivement par les valeurs t_0 à t_5 . Puisque les angles déterminent les points (x_n, y_n) , la trajectoire de $(x_0, y_0) = (\cos(2\pi/7), \sin(2\pi/7))$ est elle-même périodique.

Lorsque l'angle initial est un nombre rationnel $t_0 = p/q$, les angles t_n sont de la forme p_n/q où p_n est l'entier compris entre 0 et $q - 1$ qui est égal à $10^n p$ modulo q . Ainsi, $p_{n+1} \equiv 10p_n \pmod{q}$. En partant de $t_0 = 3/13$, nous obtenons $p_1 = 30 \pmod{13}$, ce qui donne $p_1 = 4$ et un angle t_1 égal à $4/13$. Ensuite, la suite des entiers $p_n \pmod{13}$ est

$$p_2 = 1, p_3 = 10, p_4 = 9, p_5 = 12, p_6 = 3, p_7 = 1 = p_2, \dots$$

En fait, il n'y a que trois trajectoires avec des angles de la forme $p/13$; elles sont représentées sur la figure suivante.

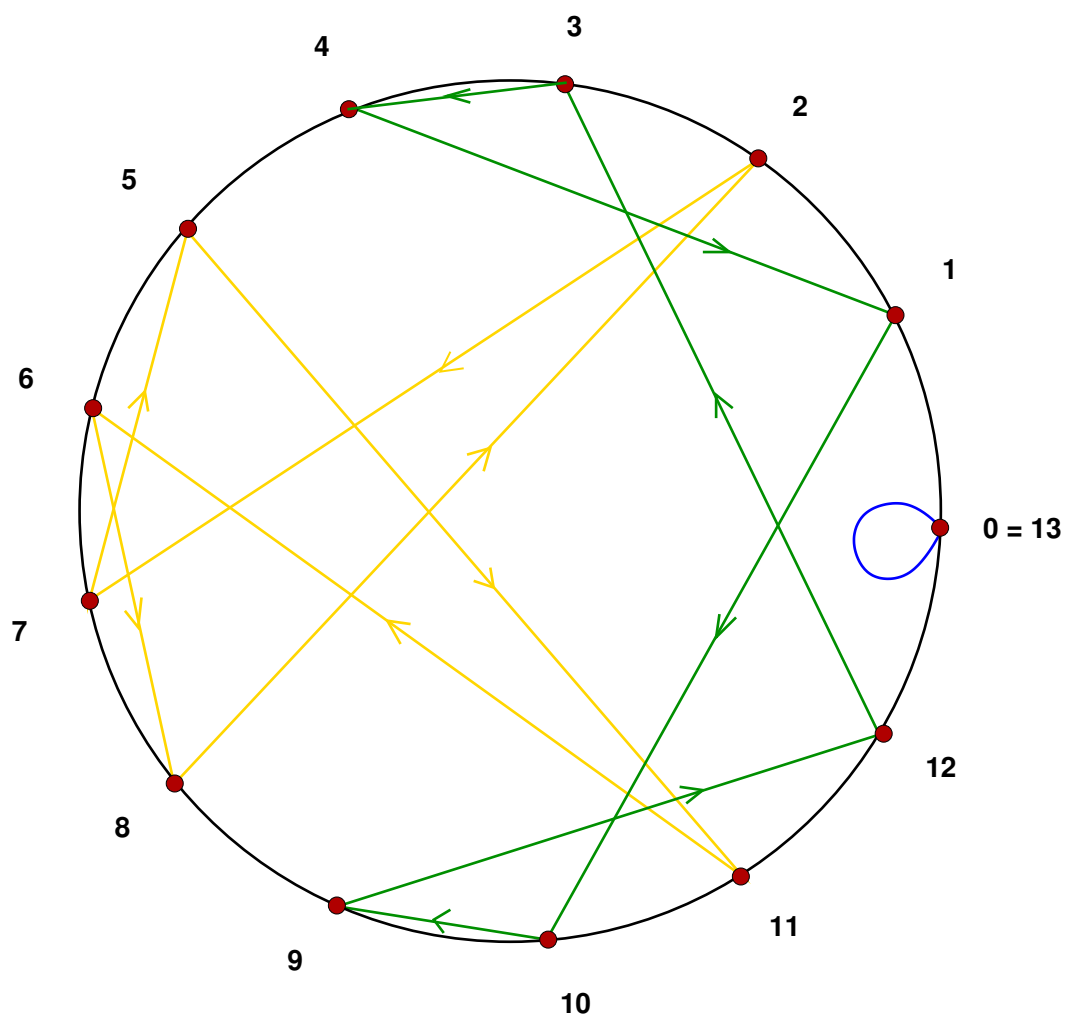


FIGURE 1. Les angles indiqués sont des treizièmes de tour : l'entier 7 correspond donc à $7/13$ de tour, soit $14\pi/13$ radians ou $193,85$ degrés. Les flèches joignent deux points lorsque le second est l'image du premier par le décuplement de l'angle.

Le lecteur intéressé par ces figures pourra visionner la vidéo de Mickael Launay sur les tables de multiplication [ML].

4. TRAJECTOIRES FINIES

4.1. Deux types de trajectoires peuvent être distingués. Les premières sont les **trajectoires finies**: les points successifs (x_n, y_n) n'occupent qu'un nombre fini de positions. Nous avons vu deux exemples de telles trajectoires en partant des points initiaux associés aux angles rationnels $1/7$ et $3/13$; les trajectoires correspondantes sont même périodiques, puisqu'elles repassent indéfiniment par le point de départ (x_0, y_0) . Un exemple encore plus simple est fourni par l'angle $t_0 = 0$, qui correspond au point $(1, 0)$; ce point est fixé par la transformation f donc $(x_n, y_n) = (1, 0)$ pour tout n et la trajectoire est réduite au singleton $\{(1, 0)\}$. Il n'y a que neuf trajectoires qui soient réduites à un singleton : ce sont celles des points fixés par f , il s'agit donc de résoudre l'équation $10t \equiv t \pmod{1}$, et ces points correspondent donc aux angles $p/9 \pmod{1}$, avec $0 \leq p < 8$.

Si l'on démarre avec l'angle $t_0 = 2/25$, alors $t_1 = 4/5$ puis $t_2 = 0$ correspond au point fixe $(1, 0)$, si bien qu'ensuite la trajectoire reste perpétuellement au point $(1, 0)$. Il s'agit donc d'une trajectoire finie, mais qui n'est pas périodique (elle ne repasse jamais par son point de départ) ; on dit parfois qu'elle est **pré-périodique**.

4.2. Toutes les trajectoires finies que nous avons décrites pour l'instant sont associées à des angles rationnels. C'est qu'il n'y en a pas d'autres:

Theorem 4.1. *Les trajectoires périodiques correspondent aux angles de la forme $\frac{k}{10^m - 1} \pmod{1}$, pour $m \geq 1$ et k entier. Les trajectoires finies sont exactement celles qui correspondent à des angles rationnels $t_0 \in \mathbf{Q} \pmod{1}$. L'union de toutes les trajectoires périodiques forme donc un sous-ensemble dénombrable et dense du cercle.*

Démontrons la première assertion. Une trajectoire périodique repasse périodiquement par sa position initiale. Supposons qu'elle revienne après N secondes, alors l'angle t_0 du point de départ vérifie l'équation $10^N t_0 \equiv t_0 \pmod{1}$, car pour passer de t_0 à t_N on décuple l'angle N fois ; il existe donc un entier k tel que $10^N t_0 = t_0 + k$, si bien que

$$t_0 = \frac{k}{10^N - 1} \pmod{1}.$$

Réciproquement, un angle de ce type correspond bien à un point périodique car $10^N t_0 \equiv t_0 \pmod{1}$.

Considérons maintenant un point d'angle t_0 dont la trajectoire est finie. Notons T l'ensemble fini des angles ainsi obtenus ; puisque les angles t_n de la trajectoire appartiennent tous à T , il existe forcément deux temps distincts $m < n$ pour lesquels

$t_n = t_m$. La trajectoire de t_m repasse donc au même point après $n - m$ itérations. Il existe donc un entier k tel que $t_m = \frac{k}{10^{n-m-1}}$. Puisque t_0 vérifie $10^m t_0 = t_m$ (modulo 1), on voit que t_0 aussi est rationnel. Réciproquement, supposons t_0 rationnel, et écrivons $t_0 = p/q$ avec p et q entiers et $0 \leq p < q$. Nous avons vu ci-dessus que la suite des angles t_n est formée de quotients p_n/q avec $p_{n+1} = 10p_n$ (modulo q). Il y a seulement q possibilités pour les angles t_n , donc la trajectoire du point d'angle $t_0 = p/q$ comporte au plus q éléments. Ceci démontre la seconde assertion.

La dernière assertion résulte de la remarque suivante : tout angle t_0 est arbitrairement proche d'un nombre rationnel t'_0 de la forme $t'_0 = \frac{k}{10^{N-1}}$ (modulo 1). Ainsi, toute position initiale (x_0, y_0) est arbitrairement proche de positions initiales dont les trajectoires sont finies. □

5. TRAJECTOIRES INFINIES

5.1. Les **trajectoires infinies** sont plus difficiles à analyser. Si t est un nombre réel entre 0 et 1, on peut écrire t sous forme décimale

$$t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots,$$

chacun des a_i étant un entier compris entre 0 et 9. La multiplication par 10 décale simplement cette écriture décimale d'un cran: $10t = a_1, a_2 a_3 \dots a_k \dots$. La partie entière a_1 doit alors être retranchée pour rapporter $10t$ dans l'intervalle $[0, 1[$, si bien que

$$10t = 0, a_2 a_3 \dots a_k \dots \quad (\text{modulo } 1).$$

Ainsi, décupler l'angle consiste à décaler la suite $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots)$ d'un cran vers la gauche en oubliant le premier terme. D'un point de vue combinatoire, l'opération est donc très simple, et ce point de vue peut être employé pour obtenir des trajectoires aux propriétés spécifiques.

5.2. Commençons par exemple avec un angle t_0 dont le développement décimal vérifie les propriétés suivantes:

- les a_i valent 0 ou 1 ;
- il y a une infinité de coefficients égaux à 1 ;
- le nombre de 0 entre deux 1 successifs croît indéfiniment.

Le développement décimal de t_0 ressemble donc à ceci:

$$t_0 = 0, 01001000001000000000100000000001000\dots$$

Lorsqu'on multiplie t_0 par 10, puis 100, puis 1000, on décale le développement vers la gauche. Choisissons un grand indice j pour lequel $a_j = 1$. Après $j - 1$ décalage

successifs, on obtient alors $10^{j-1}t_0 = 0,100\dots$ (modulo 1) avec de nombreux 0 qui suivent le premier coefficient 1 (au moins j coefficients égaux à 0). Ainsi, $10^{j-1}t_0$ est très, très proche de $0,1 = 1/10$. Ainsi, au sein de la trajectoire on peut trouver une suite de points qui converge vers le point d'angle $1/10$. De même, t_{j-2} est très très proche de $0,01 = 1/100$ lorsque $a_j = 1$. Et t_{j-3} est très proche de $1/1000$, etc. On pourrait alors démontrer que

- *la trajectoire du point d'angle t_0 est infinie ;*
- *tous les angles rationnels de la forme 10^{-k} sont approchés de manière arbitrairement précise par des angles de cette trajectoire ;*
- *si un point est approché par cette trajectoire sans être situé sur cette dernière, alors son angle est de la forme 10^{-k} pour un certain $k > 0$.*

5.3. Voici un second exemple. On commence par lister les suites de chiffres $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ qui sont de longueurs 1, puis 2, puis 3, etc. Pour former cette liste, nous pouvons utiliser l'ordre lexicographique, comme dans un dictionnaire mais avec les lettres remplacées par les chiffres. Pour les mots de longueurs 1 nous obtenons donc la liste 0, 1, 2, ..., 9. Pour les mots de longueurs 2 nous obtenons cent possibilités, rangées ainsi:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, ..., 37, ..., 85, ... 99.

L'ordre lexicographique est donc équivalent à l'ordre usuel des nombres que l'on écrit. Mais l'on notera que le nombre 7 apparaît déjà deux fois dans nos listes : il apparaît dans les mots 7 et 07, de longueur respectives 1 et 2. Ensuite, on continue en listant les suites de 3 chiffres, puis de 4 chiffres, etc. Nos suites de chiffres sont donc ordonnées par longueur, puis par ordre lexicographique pour les suites de longueur fixée.

Maintenant, définissons t_0 par son développement décimal en juxtaposant les suites de chiffres que nous venons d'ordonner. Ainsi

$t_0 = 0,0123456789 \quad 0001020304\dots37\dots85\dots99 \quad 000001002\dots999 \quad 00000001\dots$

où les espaces sont simplement là pour faciliter la lecture. Alors *la trajectoire du point (x_0, y_0) d'angle t_0 est dense dans le cercle \mathbf{S}* . Autrement dit, pour tout angle s et toute précision $\varepsilon > 0$, il existe un temps n tel que le point (x_n, y_n) de la trajectoire ait un angle t_n qui soit ε -proche de s : $|t_n - s| < \varepsilon$. Pour le voir, on écrit le développement décimal $s = 0, b_1 b_2 \dots b_\ell \dots$. On choisit d tel que 10^{-d} soit plus petit que ε . La suite $b_1 \dots b_d$ des coefficients de s entre le premier et le d -ème terme apparaît forcément au sein du développement de t_0 , car ce dernier contient toutes les suites finies de chiffres. Disons que cette suite apparaît entre le coefficient a_{m+1} et le coefficient

a_{m+d} de $t_0 = 0, a_1 a_2 \dots$, ce qui signifie que $a_{m+1} = b_1$, puis $a_{m+2} = b_2$, jusqu'à $a_{m+d} = b_d$. Le développement décimal de l'angle $t_m = 10^m t_0$ (modulo 1) étant celui de t_0 décalé de m places, il commence par a_{m+1}, a_{m+2} , etc. Il coïncide donc avec celui de s jusqu'au d -ème terme. Puisque $10^{-d} < \varepsilon$, c'est que t_m et s sont ε -proches.

5.4. En fait, la dynamique du décuplement de l'angle, c'est-à-dire l'agencement des trajectoires obtenues par le processus d'évolution défini par f , est très complexe. Nous avons vu des trajectoires finies, dont la taille dépend de l'angle rationnel initial p/q , des trajectoires infinies mais dont les accumulations sont simplement de la forme 10^{-k} (modulo 1), et une trajectoire dense. Il existe aussi des trajectoires qui sont confinées dans un sous-ensemble de Cantor de \mathbf{S} et sont denses dans ce Cantor (voir [YC]) ; pour cela on peut prendre des développements décimaux qui n'utilisent pas certains chiffres.

La dynamique est donc chaotique, au sens suivant : partant d'un point initial (x_0, y_0) d'angle t_0 , il existe des perturbations arbitrairement petites (x'_0, y'_0) (correspondant à des angles t'_0 arbitrairement proches de t_0) qui satisfont – au choix – l'une des propriétés suivantes : la trajectoire de (x'_0, y'_0) est finie, ou est dense, ou est confinée dans un ensemble de Cantor. Par conséquent, si l'on ne connaît qu'une approximation, aussi bonne soit-elle, de (x_0, y_0) ou de son angle t_0 on ne peut savoir à l'avance quel sera le comportement de sa trajectoire.

Il est toutefois possible d'extraire un peu de structure de ces comportements chaotiques. Par exemple, les mathématiciens qui étudient les systèmes dynamiques ou le développement décimal des nombres réels savent donner un sens précis aux affirmations suivantes, et les démontrer : *presque toute trajectoire est dense dans le cercle \mathbf{S}* ; *presque toute trajectoire est uniformément répartie*. Ils utilisent pour cela les méthodes de la dynamique topologique ou de la théorie ergodique. C'est un sujet trop avancé pour être décrit ici, mais les personnes intéressées peuvent consulter [YC].

6. QUASI-CERCLES

Au début de ce texte, nous avons déjà évoqué le fait que l'application f peut-être définie par la formule $f(z) = z^{10}$, z étant ici un nombre complexe situé sur le cercle unité \mathbf{S} que l'on écrit $z = \exp(2i\pi t)$.

Au lieu de restreindre l'étude au cercle unité, on peut alors regarder les trajectoires de nombres complexes quelconques. Si l'on amorce la trajectoire en un point z_0 , on obtient ainsi une suite de nombres complexes $z_1 = z_0^{10}$, $z_2 = z_1^{10} = z_0^{100}$, etc. Lorsque z_0 est un nombre complexe qui n'est pas sur le cercle, son module est soit < 1 soit > 1 . La suite des points z_n vérifie $|z_n| = |z_0|^{10^n}$; ainsi, lorsque $|z_0| < 1$ le module de



FIGURE 2. Un quasi-disque, en noir, bordé par un quasi-cercle. Cette figure correspond à la transformation $h(z) = z^2 + i/2$. Les points à l'intérieur de la zone noire ont une trajectoire simple, qui converge rapidement vers le nombre complexe $(1 - \sqrt{2i-1})/2$. Au bord, la dynamique est semblable à celle du doublement de l'angle sur le cercle \mathbf{S} .

z_n tend extrêmement vite vers 0 et z_n tend vers l'origine du plan complexe ⁽¹⁾. De même, z_n part rapidement à l'infini lorsque $|z_0| > 1$.

Il y a donc deux régions dans lesquelles la dynamique est prévisible, puisque les trajectoires y tendent respectivement vers 0 ou l'infini. Le cercle unité réalise une frontière entre ces deux régions ; d'un côté du cercle les trajectoires vont vers 0, de l'autre elles partent à l'infini, et sur la frontière \mathbf{S} la dynamique est riche, chaotique.

Maintenant, que se passe-t-il si la transformation $f(z) = z^{10}$ est légèrement perturbée ? Par exemple, que se passe-t-il si, en fait, la règle d'évolution n'était pas

¹Son logarithme vaut $\log(|z_0|)10^n$, et $\log(|z_0|)$ est strictement négatif.

édiciée par f mais par la transformation

$$g_c(z) = z^{10} + c$$

où c est un petit nombre complexe non nul ? Eh bien le même comportement subsiste, du moins si c est suffisamment petit. Le cercle \mathbf{S} doit être remplacé par une courbe $\mathbf{S}(c)$ qui dépend de c . Cette courbe $\mathbf{S}(c)$ est invariante par la transformation g_c , et les trajectoires de g_c situées sur cette courbe sont similaires à celles de f sur le cercle \mathbf{S} . Cette courbe $\mathbf{S}(c)$ sépare le plan complexe en deux zones sur lesquelles les trajectoires de g_c sont similaires à celles de f hors de \mathbf{S} . Mais $\mathbf{S}(c)$ est seulement continue ; c'est un objet à l'aspect fractal lorsque $c \neq 0$. Dans le jargon mathématique, $\mathbf{S}(c)$ est un quasi-cercle.

Ces quasi-cercles sont des exemples d'ensemble de Julia (voir [CG]). Ils apparaissent aussi dans la théorie des groupes Kleinien, de la géométrie des espaces de petite dimension, en analyse complexe...

7. RÉFÉRENCES

- [ML] Mickael Launay.– *La face cachée des tables de multiplication*, 12 minutes 7 secondes, MicMaths, <https://www.youtube.com/watch?v=-X49VQgi86E>
- [CG] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin.– *Complex Dynamics*, ix + 175 pages, Universitext, Springer Verlag.
- [YC] Yves Coudène.– *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*, 205 pages, EDP Sciences.

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
E-mail address: serge.cantat@univ-rennes1.fr