DYNAMIQUE DES AUTOMORPHISMES DES SURFACES K3

SERGE CANTAT

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université Rennes I, Campus de Beaulieu, Bâtiments 22-23, 35042 Rennes cedex, France. e-mail: cantat@maths.univ-rennes1.fr

---

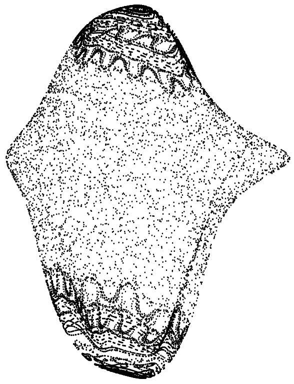
Résumé. Nous étudions la dynamique des difféomorphismes holomorphes des surfaces complexes compactes, notamment lorsque celle-ci est une surface K3 projective. Lorsque l'entropie topologique du difféomorphisme est strictement positive, nous montrons qu'il existe une unique mesure de probabilité invariante qui est d'entropie maximale. Cette mesure est uniquement déterminée par l'existence de la structure complexe invariante ; elle est Bernoulli et décrit la répartition des points périodiques de l'automorphisme. Au passage, nous obtenons un résultat de rigidité pour certains automorphismes des surfaces de Kummer.

Introduction

Soit X une variété complexe compacte, par exemple une variété projective, et $\mathrm{Aut}(X)$ son groupe d'automorphismes, c'est-à-dire le groupe de ses difféomorphismes holomorphes. Il s'agit d'un groupe de Lie complexe de dimension finie dont l'étude s'avère extrêmement intéressante.

Lorsque X est une courbe, $\mathrm{Aut}(X)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et la dynamique des automorphismes est très pauvre car chacun d'entre eux admet un itéré qui est l'identité, une translation (si X est une courbe elliptique) ou une homographie (si X est la sphère de Riemann). Ces propriétés sont propres aux courbes et tombent simultanément en défaut dès la dimension 2 ; il existe en effet sur certaines surfaces complexes compactes des automorphismes dont aucun itéré n'est isotope à l'identité et dont la dynamique est très riche.

La figure suivante représente quelques orbites d'un automorphisme de ce type. Dans cet exemple, la surface est une variété projective donnée par une équation à coefficients réels et l'automorphisme est lui-même défini sur le corps des nombres réels : c'est ce qui permet d'obtenir une figure dans $\mathbb{R}^3$.



Orbites d'un automorphisme.

Vue de dessus : zone elliptique.

Le but de cet article est d'étudier de manière systématique la dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes. En fait, nous nous contenterons d'étudier les automorphismes des surfaces K3, c'est-à-dire des surfaces simplement connexes qui sont munies d'une 2-forme holomorphe partout non nulle. Ce choix légèrement restrictif est justifié par les remarques suivantes.

Tout d'abord, lorsque la surface X n'est pas kählérienne, l'entropie topologique de tout automorphisme est nulle [7]. A priori, la dynamique développée par ces automorphismes est donc pauvre et, conjecturalement, ce que nous allons expliquer pour les surfaces kählériennes devrait encore s'appliquer. Nous supposerons donc désormais que la surface ambiante X est *une surface complexe compacte kählérienne.*

Lorsque l'entropie topologique d'un automorphisme $\phi : X \to X$ est nulle, seuls deux cas peuvent se produire (voir [6] et le §1.4). Dans le premier, l'un des itérés de ϕ est holomorphiquement isotope à l'identité, autrement dit, il existe un entier $k \geq 1$ tel que ϕ^k soit le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs holomorphe. La dynamique est alors simple et parfaitement comprise (voir [14] et [11]). Dans le second cas, l'un des itérés de ϕ préserve une fibration elliptique en agissant par translation le long des fibres. La dynamique est donc, là encore, particulièrement simple.

Tout ceci montre qu'il suffit d'étudier les automorphismes des surfaces kählériennes dont l'entropie topologique est strictement positive. L'existence d'une telle transformation impose des conditions drastiques à la surface X, mais il existe tout de même de nombreux exemples :

Sur les tores.– Certains tores possèdent des automorphismes dont l'entropie est strictement positive. C'est toutefois un exemple relativement peu intéressant car les automorphismes sont tous induits par des transformations affines de $\mathbb{C}^2$ et leur dynamique est complètement comprise [23].

Sur les surfaces K3.— Certaines surfaces K3 admettent également des automorphismes dont l'entropie topologique est non nulle : c'est le cas le plus intéressant et les deux figures présentées à la page précédente proviennent d'un exemple de ce type.

Sur les quotients des surfaces K3.— Lorsqu'une surface K3 est munie simultanément d'une involution holomorphe σ et d'automorphismes qui commutent avec σ, on obtient des automorphismes sur la variété quotient. Lorsque σ est sans point fixe, le quotient est ce qu'on appelle une surface d'Enriques. Sinon, il s'agit d'une surface rationnelle. La surface de Coble, obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2$ aux points doubles d'une sextique qui en possède 10, est un exemple de ce type.

Soit $\phi : Y \to Y$ un automorphisme d'une surface complexe compacte dont l'entropie est strictement positive et soit X la surface obtenue à partir de Y en contractant les courbes exceptionnelles de première espèce qui ont une orbite finie sous l'action de ϕ. Deux cas se présentent alors [7] : ou bien X est minimale et le couple (X, ϕ) appartient à la liste que l'on vient d'établir, ou bien X est une surface rationnelle non minimale. Dans ce deuxième cas, nous n'avons aucun théorème général, mais les seuls exemples connus actuellement font également partie de cette liste. Les résultats que nous allons obtenir pour les surfaces K3 s'appliqueront donc *in extenso à tous les exemples d'automorphismes connus actuellement sur les surfaces complexes compactes.*

La majeure partie de ce texte (parties 2 à 6) est consacrée aux propriétés ergodiques de la dynamique. Nous verrons que le couple formé par le difféomorphisme $\phi : X \to X$ et la structure complexe ϕ-invariante détermine "naturellement" une mesure de probabilité ϕ-invariante μ. Nous montrerons ensuite que cette mesure coïncide avec l'unique mesure d'entropie maximale et qu'elle vérifie donc les propriétés énoncées dans le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie topologique est strictement positive. Il existe alors une unique mesure de probabilité μ qui est ϕ-invariante et d'entropie maximale. Il se trouve en outre que les points périodiques de ϕ sont équirépartis pour cette mesure et que le système ergodique (X, μ, ϕ) est mesurablement conjugué à un décalage de Bernoulli.*

En d'autres termes, *la dynamique de ϕ est semblable à un jeu de pîle ou face* si on l'observe à l'aide de la mesure qui lui est naturellement associée.

Remarque 0.1. 1.— L'hypothèse de projectivité faite sur X est une hypothèse technique qui nous semble hors sujet. Nous l'utilisons malheureusement à plusieurs reprises.

2.— La stratégie de démonstration est la même que pour les automorphismes polynomiaux du plan affine complexe. En fait, le cœur de ce texte montre que les techniques développées dans [3] et [37] pour étudier les propriétés ergodiques de l'application de Hénon sont toutes valables sur les surfaces K3. Mieux, certaines constructions cruciales sont en fait valables pour n'importe quel automorphisme d'une variété projective.

Les techniques d'hyperbolicité uniforme s'avèrent insuffisantes pour établir le théorème précédent. Il nous a donc fallu utiliser la théorie de Pesin dans toute sa force. Le second leitmotiv de ce texte est d'ailleurs de montrer que la dynamique ne satisfait aucune propriété classique d'hyperbolicité. Nous verrons ainsi qu'aucun automorphisme d'une surface K3 n'est un difféomorphisme Axiome A (voir [15] et le §7.1). L'exemple suivant présente toutefois des caractéristiques très proches du cas Anosov et jouera un rôle central tout au long du texte.

Exemple 0.1. Soit $A = \mathbb{C}^2/\Gamma$ un tore de dimension 2, et σ l'involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Les points fixes de σ sont exactement les 16 points d'ordre 2 du groupe A. Soit A' l'éclaté de A en ces 16 points. L'involution σ s'y étend en une involution σ' qui est l'identité en restriction à chacun des diviseurs exceptionnels, n'a pas d'autre point fixe, et agit comme $z \mapsto -z$ transversalement à ces diviseurs. Le quotient $X_A = A'/\sigma'$ est donc une variété compacte lisse qui, par définition, est la surface de Kummer associée à A. C'est une surface K3.

Supposons que A est le produit de deux courbes elliptiques identiques, $A = \mathbb{C}/\Lambda \times \mathbb{C}/\Lambda$. Puisque le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ agit linéairement sur $\mathbb{C}^2$ en préservant le réseau $\Lambda \times \Lambda$, il se plonge dans $\mathrm{Aut}(A)$. Chacun des automorphismes ainsi obtenus commute avec σ et détermine donc un automorphisme de la surface X_A. Par exemple, en partant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on munit X_A d'un automorphisme ϕ dont l'entropie est strictement positive et dont la dynamique est de type "pseudo-Anosov" : les deux feuilletages holomorphes de A qui sont préservés par l'automorphisme linéaire déterminent sur X_A des feuilletages à singularités isolées qui sont dilatés et contractés par ϕ.

Au paragraphe 7.2, nous étenderons la notion de difféomorphisme pseudo-Anosov au cas des automorphismes des surfaces complexes et classifierons complètement les automorphismes de ce type, généralisant ainsi un théorème antérieur de Ghys [15]. Au passage, nous établirons le résultat de rigidité suivant :

Théorème 0.2. *Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'ordre infini sur une surface K3. Si ϕ préserve deux feuilletages holomorphes, la surface est une surface de Kummer et l'automorphisme est induit par une transformation linéaire du tore associé.*

La partie 7 est quasiment indépendante des parties 2 à 6, et peut donc être lue dans la continuité de la première partie. Le lecteur intéressé par le théorème 0.2 peut donc se contenter de lire la première et la dernière partie.

Remerciements : Je remercie Étienne Ghys pour m'avoir suggéré cette étude et pour avoir encadré avec enthousiasme mes travaux. Mes remerciements vont également à Laurent Bonavero, Jean-Pierre Demailly, Richard Kenyon, Bruno Sevennec et Jean-Christophe Yoccoz pour les discussions fructueuses que nous avons eues, et au referee pour ses suggestions avisées. Ce texte a été rédigé lors de mon séjour à l'université de Bochum : merci à Alan Huckleberry, Gerhard Knieper, Norbert Peyerimhoff et Karl Friedrich Siburg pour leur accueil chaleureux.

1. Automorphismes des surfaces K3

Dans cette première partie, nous résumons les propriétés essentielles des surfaces K3 et les appliquons à la description du groupe d'automorphismes. Les démonstrations des résultats énoncés ici se trouvent dans [1], [35] et [33].

1.1. Surfaces K3.

Définition 1.1. Une surface K3 est une surface complexe compacte dont le premier nombre de Betti est nul et dont le fibré canonique est trivial.

La trivialité du fibré canonique signifie qu'il existe sur X une 2-forme holomorphe partout non nulle. Si Ω est une telle forme, normalisée par la condition

$$\int_X \Omega \wedge \overline{\Omega} = 1, \tag{1}$$

la forme volume $\omega_X = \Omega \wedge \overline{\Omega}$ est alors uniquement déterminée par la structure complexe de X. Supposons en effet que Ω' est une autre 2-forme holomorphe vérifiant la condition (1). Puisque Ω ne s'annule pas, Ω' est égale au produit de Ω par une fonction f qui est holomorphe, donc constante. La normalisation (1) entraîne $f\overline{f} = 1$ et donc $\Omega' \wedge \overline{\Omega'} = \omega_X$. *Étant canoniquement associé à la structure complexe de X, ce volume ω_X est invariant par le groupe d'automorphismes.*

Le deuxième groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ d'une surface K3 est de rang 22 et sa forme d'intersection, q_X, est de signature $(3, 18)$. La décomposition de Hodge

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X, \mathbb{C})$$

est q_X-orthogonale et, puisque K_X est trivial, les espaces de cohomologie de type $(2, 0)$ et $(0, 2)$ sont de dimension 1 ; sur $\mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$, q_X est donc une forme quadratique lorentzienne, c'est-à-dire qu'elle est non dégénérée et de signature $(1, 19)$.

Soit S_X le sous-groupe de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ déterminé par les classes de Chern des fibrés en droites holomorphes de X. Puisque le premier nombre de Betti d'une surface K3 est nul, un fibré en droites holomorphe est uniquement déterminé par sa classe de Chern. Le groupe S_X s'identifie donc au groupe de Picard de la surface, c'est-à-dire au groupe des fibrés en droites holomorphes muni de l'opération produit tensoriel.

D'après le théorème de Lefschetz, S_X coïncide avec le réseau $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$; d'après celui de Hodge, la restriction de q_X à S_X reste de signature $(+, -, ..., -)$ lorsque X est projective. Si l'on se déplace dans l'espace des modules des surfaces K3, le $\mathbb{Z}$-module quadratique (S_X, q_X) varie. Nous noterons n_X son rang : c'est un entier compris entre 0 et 20.

Notations : si $[c]$ est une classe de cohomologie et $[h]$ une classe d'homologie, nous noterons $\langle [h] \mid [c] \rangle$ le produit entre ces deux classes (dualité de Poincaré). L'auto-intersection de $[h]$ sera notée $[h]^2$ ou encore $q_X([h])$. Ceci étant, nous identifierons bien souvent l'homologie et la cohomologie de X.

1.2. **Le cône de Kähler.**

Toute surface K3 est kählérienne. Le cône formé des classes de cohomologie des formes kählériennes est donc une partie non vide de $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$. Nous la noterons $\mathcal{C}_K(X)$ tandis que $\mathcal{C}_K^a(X)$ désignera son intersection avec S_X . L'ensemble des classes d'homologie des courants positifs fermés détermine de la même façon un cône $\mathcal{C}_+(X)$ de trace $\mathcal{C}_+^a(X)$ sur l'homologie entière. Le cône $\mathcal{C}_+(X)$ est fermé et $\mathcal{C}_K(X)$ est ouvert.

La formule du genre montre que toute courbe d'auto-intersection négative sur X est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2. Une telle courbe s'appelle une courbe nodale et leur ensemble sera noté $\mathrm{Nod}(X)$. Pour qu'une classe de cohomologie (ou son inverse) appartienne à $\mathcal{C}_K(X)$ il faut et il suffit que son auto-intersection soit strictement positive et qu'elle coupe chaque élément de $\mathrm{Nod}(X)$ strictement positivement [25].

L'ensemble $\mathcal{C}_+(X)$ est égal à l'adhérence des combinaisons convexes d'élements de $\mathcal{C}_K(X)$ et $\mathrm{Nod}(X)$ [25]. Une classe d' homologie appartient donc à $\mathcal{C}_+(X)$ si et seulement si elle coupe chaque point de $\mathcal{C}_K(X)$ positivement.

Exemple 1.1. Reprenons l'exemple 0.1 concernant la surface de Kummer associée au produit de deux courbes elliptiques identiques $A = \mathbb{C}/\Lambda \times \mathbb{C}/\Lambda$. Cette surface est donc munie d'un automorphisme ϕ explicite qui est d'ordre infini. La courbe $\{0\} \times \mathbb{C}/\Lambda$ détermine une courbe nodale sur X_A dont l'orbite par ϕ est infinie. Une surface K3 peut donc supporter une infinité de courbes nodales.

1.3. **Le théorème de Torelli.**

Tout automorphisme ϕ de X agit sur la cohomologie de rang 2 en préservant la structure entière, la forme d'intersection, la décomposition de Hodge et le cône de Kähler. On obtient ansi deux représentations de $\mathrm{Aut}(X)$, l'une dans le groupe des isométries de $(\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}), q_X)$, l'autre dans celui du $\mathbb{Z}$-module quadratique (S_X , q_X).

Théorème 1.1 (dit "de Torelli"). *Soit X une surface $K3$, alors :*

(i) La représentation de Aut(X) dans Isom($H^{1,1}(X,\mathbb{R}), q_X$) est un isomorphisme sur son image ; celle-ci coïncide avec l'ensemble des isométries à coefficients entiers qui préservent le cône de Kähler.

(ii) Lorsque X est algébrique la représentation dans Isom(S_X , q_X) a un noyau fini et son image est d'indice fini dans le groupe des isométries entières qui préservent $\mathcal{C}_K^a(X)$.

1.4. **Classification homologique des automorphismes.**

Seule l'une des deux nappes de l'ensemble $\{[c] \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) : q_X([c]) = 1\}$ peut contenir des classes de formes de Kähler, ce qui détermine une nappe $\mathbb{H}_X$ de cet hyperboloïde qui est préservée par tout automorphisme. La restriction de q_X à $\mathbb{H}_X$ munit celle-ci d'une métrique à courbure négative constante : on est donc en présence d'un modèle de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{19}$. Tout automorphisme de X y agit par isométrie, ce qui permet de distinguer trois cas suivant que l'isométrie est elliptique, parabolique ou hyperbolique :

• Dans le premier cas, $\phi^* : \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ préserve une droite intérieure au cône où q_X est positive et agit comme une rotation autour de cet axe. Puisque ϕ^* permute les points entiers de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$, cette rotation est périodique.

• Dans le cas parabolique, ϕ^* admet une seule droite propre dans le cône positif et cette droite, notée D^0, est contenue dans le cône de lumière de q_X. La valeur propre qui lui est associée est égale à 1 et toutes les valeurs propres de ϕ^* sont de module 1.

• Dans le dernier cas, il existe un nombre réel $\lambda > 1$ tel que $\{\lambda, 1/\lambda\}$ soit l'ensemble des valeurs propres de ϕ^* de module différent de 1. L'espace propre associé à λ sera noté D^+ : c'est une droite contenue dans $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ et dans le cône de lumière de q_X. La droite propre associèe à $1/\lambda$ sera notée D^-.

Définition 1.2. Un automorphisme ϕ est dit de type périodique, parabolique ou hyperbolique suivant que ϕ^* est périodique, parabolique ou hyperbolique.

Remarque 1.1. Lorsque ϕ est de type parabolique, la droite D^0 qui lui est associée est définie sur $\mathbb{Q}$ et contient donc des points de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$. Par contre, les droites D^+ et D^- associées à un automorphisme de type hyperbolique ne sont jamais définies sur $\mathbb{Q}$. Si le 2-plan qu'elles engendrent l'est, le théorème de plongement de Kodaira entraîne que la surface est projective ; réciproquement, lorsque X est algébrique, l'invariance de S_X par ϕ^* montre que les droites D^+ et D^- sont contenues dans $S_X \otimes \mathbb{R}$.

Les deux lemmes qui suivent sont élémentaires et résultent sans difficulté de l'invariance des cônes $\mathcal{C}_K(X)$ et $\mathcal{C}_+(X)$ par ϕ. Les preuves sont donc ici laissées au lecteur (voir aussi [6]).

Lemme 1.2. *Les directions propres D^+ et D^- (resp. D^0) d'un automorphisme de type hyperbolique (resp. parabolique) intersectent l'adhérence de $\mathcal{C}_K(X)$.*

Lemme 1.3. *Les directions propres D^+ et D^- d'un automorphime hyperbolique sont extrémales dans le cône $\mathcal{C}_+(X)$ et dans l'adhérence de $\mathcal{C}_K(X)$.*

L'extrémalité signifie qu'aucun élément de D^+ (resp. D^-) n'est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{C}_+(X)$ ou de l'adhérence de $\mathcal{C}_K(X)$ n'appartenant pas à D^+ (resp. D^-).

On dira qu'un automorphisme d'une surface K3 est un *twist de Dehn* si l'une de ses puissances est une translation d'ordre infini le long d'une fibration elliptique.

Proposition 1.4. *Soit X une surface $K3$, alors :*
(i) Les automorphismes de type elliptique sont d'ordre fini.
(ii) Les automorphismes de type parabolique sont les twists de Dehn.

Remarque 1.2. Cette proposition reste valable sur n'importe quelle surface complexe compacte kählérienne à condition de remplacer (i) par “les automorphismes de type elliptique admettent un itéré qui est holomorphiquement isotope à l'identité”. Pour les surfaces non kählériennes, le seul cas qui reste à traiter est celui des surfaces VII_0.

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe du théorème de Torelli. Pour le second, il suffit de remarquer que la droite D^0 contient un point entier de longueur minimale (remarque 1.1), d'auto-intersection nulle et adhérent au cône de Kähler (lemme 1.2). Le paragraphe 3 de [36] montre alors que le fibré en droites associé à cette classe de cohomologie admet un unique pinceau de sections dont les zéros forment une fibration elliptique $\pi : X \to \mathbb{P}^1$; cette fibration est nécessairement invariante par l'automorphisme.

Il est facile de montrer qu'une fibration elliptique d'une surface K3 admet au moins trois fibres singulières [8]. Puisque l'action induite sur $\mathbb{P}^1$ par l'automorphisme doit permuter les valeurs critiques de π, elle est donc périodique. L'un des itérés de l'automorphisme fixe donc chacune des fibres et, en itérant encore, on peut supposer que l'action sur chaque fibre est une translation. □

Tout ceci montre que les seuls automorphismes qui peuvent être intéressants d'un point de vue dynamique sont ceux de type hyperbolique.

1.5. **L'exemple fondamental.**

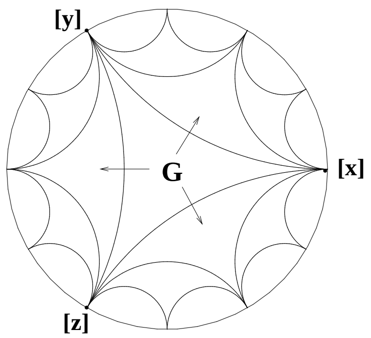
L'exemple le plus simple de surface K3 avec de nombreux automorphismes, à part la surface de Kummer décrite dans l'exemple 0.1, est celui proposé dans [30] par Mazur. Il s'agit des surfaces K3 plongées dans le produit de trois droites projectives.

Soit X une telle surface et (x, y, z) les coordonnées de la partie affine $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Dans ces coordonnées, X coïncide nécessairement avec le lieu des zéros d'un polynôme $P(x, y, z)$ dont le degré par rapport à chaque variable est égal à 2. Autrement dit, la projection de X sur (x, y) (resp. (y, z) ou (z, x)) est un revêtement double ramifié de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'involution qui permute les deux feuillets de ce revêtement sera notée σ_z (resp. σ_x ou σ_y) et le groupe engendré par les trois involutions ainsi définies sera noté G. Comme l'a remarqué L. Wang [41], G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$ qui est isomorphe au produit libre de trois groupes d'ordre 2.

Cette propriété peut être établie de la manière suivante. Soit $[x]$ (resp. $[y]$ et $[z]$) la classe d'homologie de la courbe $x = c^{ste}$ (resp. $y = c^{ste}$ et $z = c^{ste}$); c'est un élément de S_X situé sur le cône de lumière de q_X. L'involution σ_x agit sur l'espace S_X en fixant les classes $[y]$ et $[z]$ mais en perturbant $[x]$, car la fibration $x = c^{ste}$ n'est pas invariante par σ_x. Plus précisément, on établit sans peine la formule

$$(\sigma_x)_*[x] = -[x] + 2[y] + 2[z],$$

ce qui montre au passage que les classes $[x]$, $[y]$ et $[z]$ engendrent un sous-groupe N de S_X qui est invariant par l'action de G. L'espace $\mathbb{H}_X$ intersecte N sur un disque de Poincaré et les classes de Chern $[x]$, $[y]$ et $[z]$ des trois fibrations y déterminent les sommets d'un triangle idéal. Puisqu'aucune des trois transformations $(\sigma_x)_*$, $(\sigma_y)_*$ et $(\sigma_z)_*$ n'est l'identité, le



Pavage par triangles ideaux.

groupe G coïncide avec le groupe de symétrie du pavage associé à ce triangle. Il en résulte sans difficulté que $G \equiv \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.

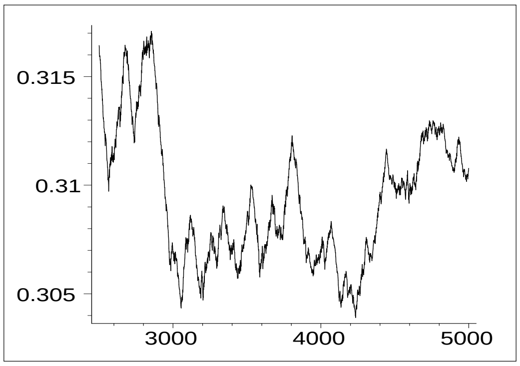
Les trois automorphismes obtenus en composant deux des involutions sont des twists de Dehn ; par exemple $\sigma_x \circ \sigma_y$ préserve la fibration $z = c^{ste}$. L'automorphisme $\phi = \sigma_x \circ \sigma_y \circ \sigma_z$ est de type hyperbolique et sa valeur propre de module supérieur à 1 vaut $\lambda = 9 + 4\sqrt{5}$. Nous verrons dès le paragraphe suivant que ceci entraîne la formule $\mathrm{h}_{top}(\phi) = \log(\lambda) \simeq 2.88$, où $\mathrm{h}_{top}(\phi)$ est l'entropie topologique de ϕ.

Nous avons déjà présenté quelques orbites de ϕ dans l'introduction lorsque X correspond à l'équation polynomiale

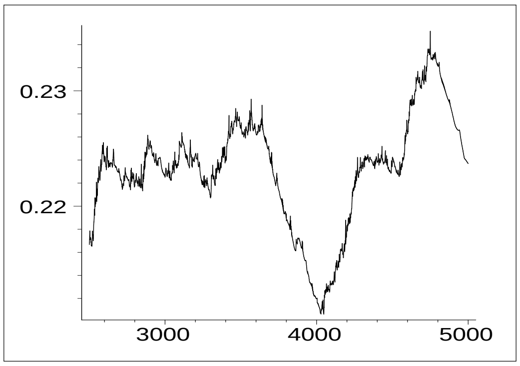
$$x^2y^2z^2 + (1/200)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + x^2 + y^2 + z^2 + xy + z - y = 6.$$

Ces figures montrent que la dynamique est chaotique sans être uniformément hyperbolique. Par exemple, il existe des points fixes elliptiques autour desquels se développent des régions invariantes de type Kolmogorov-Arnold-Moser. En particulier, la restriction de la dynamique à la partie réelle de la surface n'est pas topologiquement transitive. Signalons cependant que les simulation numériques que nous avons effectuées (non présentées ici) semblent indiquer que le volume canonique ω_X est ergodique.

Exposants de Lyapunov pour la surface de B. Mazur.



Exposant positif = 0.31 environ.



Exposant positif = 0.22 environ.

Il est également possible de calculer numériquement les exposants de Lyapunov de ϕ. Les deux graphiques ci-dessus sont des évaluations numériques de l'exposant positif de deux points distincts. En abscisse est indiqué le nombre d'itérations (entre 2500 et 5000) et en ordonnée la valeur approximative obtenue. Les fluctuations au cours des 2500 dernières itérations sont inférieures d'un ordre de grandeur à la valeur approximative de l'exposant. Un point "pris au hasard" a donc un exposant de Lyapunov strictement positif.

Remarque 1.3. Les chutes rapides de la valeur de l'exposant positif durant certains intervalles d'itérations correspondent à des séjours prolongés de l'orbite dans le voisinage d'un point fixe elliptique.

2. Entropie et courants dilatés

Dans cette partie, $\phi : X \to X$ désigne un automorphisme d'une surface K3 qui, dès la section 2.2, sera de type hyperbolique.

2.1. **Entropie et homologie.**

Lorsque ϕ est une transformation $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété compacte, le théorème de Yomdin [43] affirme que son entropie est minorée par le logarithme du rayon spectral de $\phi_* : H_*(X, \mathbb{R}) \to H_*(X, \mathbb{R})$ (action sur toute l'homologie). Dans notre cadre, on peut combiner le théorème de Yomdin et celui de Gromov concernant l'entropie topologique des transformations holomorphes des variétés kählériennes compactes [19], ce qui fournit sans peine la formule suivante :

Théorème 2.1 (Gromov, Yomdin). *Soit ϕ un automorphisme d'une surface $K3$ et λ le rayon spectral de $\phi^* : H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \to H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. L'entropie topologique de ϕ vaut alors $h_{top}(\phi) = \log(\lambda)$.*

Cette formule s'avère en fait valable sur n'importe quelle surface complexe compacte [7]. Elle montre que l'entropie topologique est invariante par déformation du couple (X, ϕ) et que les automorphismes minimisent l'entropie au sein de leur classe d'isotopie.

Corollaire 2.2. *Tout automorphisme ϕ d'une surface $K3$ vérifie une et une seule des trois propriétés suivantes :*

(i) ϕ est périodique.

(ii) ϕ est d'ordre infini et préserve une fibration elliptique (singulière).

(iii) l'entropie topologique de ϕ est strictement positive.

Démonstration. Il suffit de juxtaposer le théorème 2.1 à la proposition 1.4. □

Remarque 2.1. Ce résultat reste valable sur toute surface complexe compacte kählérienne en remplaçant (i) par "l'un des itérés de ϕ est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs holomorphe."

2.2. **Courants dilatés et contractés.**

Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie topologique est strictement positive, c'est-à-dire, avec la terminologie du paragraphe 1.4, un automorphisme de type hyperbolique. Il existe alors une unique droite D^+ contenue dans $H_2(X, \mathbb{R})$ qui est dilatée par ϕ_*. Cette droite est d'ailleurs contenue dans $\mathrm{H}_{1,1}(X, \mathbb{R})$ et le facteur de dilatation, noté λ, vérifie :

$$h_{top}(\phi) = \log(\lambda).$$

Cette formule suggère que l'entropie provient entièrement de l'existence de la droite propre D^+. À partir de maintenant et jusqu'à la partie 6, le but est de donner un sens précis à cette idée en étudiant l'action de ϕ sur l'espace des courants positifs fermés de X.

• **Courants positifs fermés.** L'ensemble des $(1,1)$-formes continues sur X sera muni de la topologie de la convergence uniforme. Par définition, un courant est une forme linéaire continue sur cet espace : il s'agit donc ici de courant d'ordre 0 et de bidegré $(1,1)$. Un tel courant est fermé s'il est nul sur les formes exactes et est positif s'il prend des valeurs positives sur les formes α qui satisfont :

$$\forall v \in TX, \quad \alpha(v, \sqrt{-1}\, v) \geq 0.$$

Si T est un courant et α une forme, nous noterons $\langle T \mid \alpha \rangle$ l'évaluation de T sur α. Lorsque T est fermé, sa classe d'homologie sera notée $[T]$; si α est également fermée on a donc $\langle T \mid \alpha \rangle = \langle [T] \mid [\alpha] \rangle$.

Aires, volumes et normes seront évalués à l'aide d'une métrique hermitienne h fixée une fois pour toutes. Si κ désigne la forme fondamentale de h, la norme (ou "masse") de tout courant positif T se trouve être égale à $\langle T \mid \kappa \rangle$; en particulier, lorsque h est kählérienne, ce que nous supposerons désormais, *la norme d'un courant positif fermé ne dépend que de sa classe d'homologie.*

À toute classe d'homologie $[t] \in \mathrm{H}_{1,1}(X, \mathbb{R})$, nous associerons l'ensemble $\Gamma_{[t]}$ des courants fermés dont la classe d'homologie coïncide avec $[t]$ et noterons $\Gamma_{[t]}^{+}$ le sous-ensemble convexe de $\Gamma_{[t]}$ dont les éléments sont des courants positifs. Puisque h est kählérienne, tous les éléments de $\Gamma_{[t]}^{+}$ ont la même norme, à savoir $\langle [t] \mid [\kappa] \rangle$; s'il est non vide, $\Gamma_{[t]}^{+}$ est donc compact pour la topologie faible.

Soit T un courant fermé et J un élément de $\Gamma_{[T]}$. Puisque le premier nombre de Betti de X est nul, on peut écrire

$$J = T + \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial \overline{\partial} f_J, \tag{2}$$

où f_J est mesurable, intégrable mais n'est bien définie qu'à une constante additive près. Si ω_X désigne le volume canonique de X (cf. §1.1), f_J peut être normalisée en imposant la relation

$$\int_X f_J \, \omega_X = 0,$$

ce qui détermine une unique solution de l'équation (2).

Lemme 2.3. *Avec cette normalisation, l'application* $L : J \mapsto \int_X |f_J| \omega_X$ *est convexe et bornée sur* $\Gamma_{[T]}^{+}$.

Démonstration. La seule difficulté est de borner L. Si J appartient à $\Gamma_{[T]}^{+}$, sa norme est égale à celle de T car J et T sont deux courants positifs fermés ayant la même classe d'homologie. En particulier,

$$\| J - T \| \leq 2 \, \| T \| .$$

Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la norme de f_J dans l'espace $L^1(\omega_X)$ est majorée par $\| J - T \|$, à une constante multiplicative près qui ne dépend que du couple (X, h) [18]. □

• **Action de ϕ sur les courants.** L'automorphisme ϕ agit linéairement sur l'espace des courants en préservant le cône des courants positifs fermés. Nous dirons qu'il dilate (resp. préserve ou contracte) le courant T s'il existe un scalaire s tel que $|s| > 1$ (resp. $|s| = 1$ ou $|s| < 1$) et

$$\phi_* T = sT.$$

D'après [38], tout automorphisme d'une variété complexe compacte préserve, dilate ou contracte au moins un $(1,1)$-courant positif fermé. Le théorème suivant est donc avant tout un résultat d'unicité :

Théorème 2.4. *Soit X une surface K3 munie d'une métrique hermitienne h et d'un automorphisme ϕ dont l'entropie topologique $h_{top}(\phi) = \log(\lambda)$ est strictement positive. Il existe alors un unique courant positif fermé de masse 1 qui est dilaté par ϕ. Le facteur de dilatation vaut λ et ce courant, noté T^+, vérifie les trois propriétés suivantes :*

(i) Tout courant positif fermé dont la classe d'homologie coïncide avec celle de T^+ est égal à T^+.

(ii) T^+ est extrémal parmi les courants positifs fermés.

(iii) Si J est un courant fermé dilaté par ϕ alors J est un multiple de T^+.

Remarque 2.2. 1.– En remplaçant ϕ par son inverse, ce résultat assure également l'existence et l'unicité d'un courant positif fermé contracté. Nous le noterons T^-.

2.– Les courants T^+ et T^- ne dépendent de h que par un facteur multiplicatif. Quitte à changer h, on peut donc supposer que T^+ et T^- sont tous deux de masse 1 et que leur intersection, $[T^+].[T^-]$, est égale à 1. C'est ce que nous ferons.

Démonstration du théorème 2.4. La classe d'homologie de tout courant positif fermé dilaté appartient nécessairement à D^+ et le facteur de dilatation est donc égal à λ. Puisque D^+ est adhérente au cône de Kähler de X, il existe au moins un courant positif fermé C dont la classe d'homologie appartient à $D^+ \setminus \{0\}$. La suite de courants positifs fermés

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^k} \phi_*^k(C)$$

vérifie alors $[C_n] = [C]$ quelque soit n ; leur norme est donc constante et l'on peut en extraire une sous-suite convergente dont la limite, notée T^+, satisfait

$$\phi_* T^+ = \lambda T^+.$$

Quitte à multiplier ce courant par une constante strictement positive, on peut supposer que sa norme est égale à 1. L'existence du courant T^+ est donc établie.

Il reste à obtenir les résultats d'unicité et d'extrémalité énoncés. La propriété (i) entraîne évidemment l'unicité de T^+ mais également (ii) car la classe d'homologie de T^+ est extrémale parmi celles des courants positifs fermés (lemme 1.3). Il suffit donc d'établir (i) et (iii).

Commençons par (i). Tout élément J de $\Gamma^+_{[T+]}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$J = T^+ + \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\overline{\partial} f_J,$$

avec f_J de moyenne nulle pour la mesure ω_X. La fonction L qui à J associe $\int_X |f_J| \omega_X$ est donc bien définie, convexe et bornée sur $\Gamma^+_{[T+]}$ (cf. lemme 2.3).

La transformation linéaire $(1/\lambda)\phi_*$ préserve T^+ et la forme volume ω_X est ϕ-invariante, donc
$$f_{\frac{1}{\lambda}\phi_* J} = \frac{1}{\lambda} f_J \circ \phi.$$
En utilisant à nouveau que ϕ préserve ω_X on obtient alors
$$L\left(\frac{1}{\lambda}\phi_* J\right) = \frac{1}{\lambda} L(J),$$
ce qui signifie que la fonction L est contractée par la bijection $(1/\lambda)\phi_*$. Puisque L est bornée, elle est donc identiquement nulle, ce qui montre que $\Gamma^+_{[T^+]}$ est réduit au singleton $\{T^+\}$ et achève la preuve de (i).

Pour la troisième propriété, on utilise un argument analogue. Si $\phi_* J = sJ$ et $|s| > 1$, alors $s = \lambda$ ou $[J] = 0$. Dans les deux cas, $[J]$ est proportionnel à $[T^+]$. Il existe donc un scalaire β et une fonction f_J de moyenne nulle telle que
$$J = \beta T^+ + \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\overline{\partial} f_J.$$
Mais alors $f_J \circ \phi = \lambda f_J$ et $(1 - |s|) \parallel f_J \parallel_{L^1(\Omega_X)} = 0$, ce qui montre que f_J est nulle et que J coïncide avec βT^+. □

Remarque 2.3. Si $f : A \to A$ est un automorphisme d'Anosov d'un tore, il existe également un courant T^+ dilaté par f et satisfaisant les propriétés énoncées dans le théorème précédent. Ce courant T^+ coïncide bien sûr avec le courant d'intégration sur le feuilletage instable de f : si $\zeta(x, y) = 0$ est l'équation de ce feuilletage, T^+ est proportionnel au courant
$$\alpha \mapsto \int_A \zeta \wedge \overline{\zeta} \wedge \alpha.$$
En particulier, T^+ est un courant positif fermé extrémal et lisse. C'est, je crois, *le premier exemple de courant extrémal lisse* (voir [9], [29]).

2.3. **Deux constructions du courant T^+.**

• **Construction par image directe.** Pour construire T^+ de manière explicite, il suffit de prendre un courant positif fermé C tel que :
$$\exists \beta > 0, \quad \frac{1}{\lambda^n} \phi_*^n [C] \to \beta [T^+].$$
Le théorème 2.4 montre alors que toute sous-suite de $(1/(\beta\lambda^n))\phi_*^n(C)$ qui converge tend vers T^+. On peut, par exemple, considérer les courants d'intégration sur les courbes algébriques qui ne sont fixées par aucun itéré de ϕ, ou alors les courants du type
$$T_\kappa : \alpha \mapsto \int_X \alpha \wedge \kappa,$$
où κ est une forme de Kähler. Ces courants associés aux formes de Kähler de X seront utilisés à plusieurs reprises. Nous les noterons toujours T_κ.

• **Construction par variété instable.** Nous allons maintenant construire T^+ à l'aide des variétés instables de l'automorphisme ϕ. Rappelons tout d'abord que le principe variationnel pour l'entropie assure l'existence d'une mesure de probabilité ν qui est invariante, ergodique et d'entropie strictement positive. Puisque ϕ est holomorphe, les espaces stables et instables de ϕ sont invariants par multiplication par $\sqrt{-1}$. L'inégalité de Ruelle montre donc que ν admet exactement deux exposants de Lyapunov, l'un strictement positif, l'autre strictement négatif, tous deux de multiplicité réelle égale à 2. Ceci signifie que la mesure ν est *hyperbolique au sens de Katok* et permet d'exhiber une infinité de points ϕ-périodiques hyperboliques [22], [23].

Soit x_0 l'un de ces points périodiques et k sa période. Puisque les espaces instables sont invariants par multiplication par $\sqrt{-1}$, la variété instable de x_0 est une surface de Riemann. Par construction, cette surface est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et, puisqu'elle est dilatée par l'automorphisme ϕ^k, elle est nécessairement biholomorphe à $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{C} \to X$ un paramétrage de cette variété vérifiant $f(0) = x_0$. Il existe alors un nombre complexe χ_{x_0} de module strictement plus grand que 1, tel que $f^{-1} \circ \phi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ soit l'homothétie de rapport χ_{x_0}. En particulier, ϕ^k dilate uniformément la variété instable dans les coordonnées fournies par le paramétrage f.

Notons $A(r, f)$ l'aire de $f(\mathbb{D}_r)$ pour la métrique h fixée sur X et $T(r, f)$ l'intégrale logarithmique de A, à savoir

$$T(r, f) = \int_0^r A(t, f)\,\frac{dt}{t}.$$

La suite des courants de Nevanlinna de f est alors définie par la formule

$$N(r, f) : \alpha \mapsto \frac{1}{T(r, f)} \int_0^r \int_{f(\mathbb{D}_r)} \alpha\,\frac{dt}{t}.$$

Le but du reste de cette partie est de montrer qu'il existe des sous-suites $N(r_i, f)$ qui convergent vers T^+. Pour cela, nous allons commencer par rappeler quelques propriétés élémentaires de ce type de courants qui sont indépendantes de toute dynamique.

Le premier lemme, dû pour l'essentiel à Ahlfors et pour lequel on renvoie à [6] et [5], montre que les courants $N(r, f)$ ont des valeurs d'adhérence fermées :

Lemme 2.5 (Ahlfors). *Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière tracée sur une surface complexe compacte. Il existe alors des suites de rayons r_i tendant vers l'infini telles que $N(r_i, f)$ tende vers un courant positif fermé.*

On peut en outre appliquer la formule de Jensen aux courants $N(r, f)$, ce qui permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.6. *Si f n'est contenue dans aucune courbe compacte de X, tout courant fermé C adhérent à la suite $N(r, f)$ vérifie $[C]^2 \geq 0$.*

Démonstration. Soit E une courbe compacte qui ne contient pas f, C un courant fermé adhérent à $N(r, f)$ et g une métrique hermitienne quelconque sur $\mathcal{O}(E)$ dont la courbure sera notée Θ_g. La formule de Jensen entraîne alors $\langle C \mid \Theta_g \rangle \geq 0$ (cf. [10], page 12).

Lorsque C est fermé, cette inégalité est valable au niveau des classes d'homologie : $[C].[E] \geq 0$ pour toute courbe. Le critère de Nakaï-Moishezon [25] entraîne alors $[C]^2 \geq 0$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 2.4. Gardons les hypothèses du lemme 2.6, supposons que la surface X contienne une courbe exceptionnelle de première espèce E et notons $\epsilon : X \to X'$ la contraction de cette courbe. Si C est un courant adhérent à $N(r, f)$, il existe alors au moins une forme positive α sur X' vérifiant $\langle C \mid \pi^*\alpha \rangle > 0$. Dans le cas contraire, C serait en effet égal au produit du courant d'intégration sur E par une fonction positive ; puisque E est d'auto-intersection strictement négative, la contradiction cherchée provient alors de l'existence d'une métrique g sur le fibré en droites $\mathcal{O}(E)$ dont la courbure est négative en restriction à E : on aurait alors $\langle C \mid \Theta_g \rangle < 0$, ce qui est impossible.

Lemme 2.7. *Soit ϕ un automorphisme de type hyperbolique d'une surface $K3$. Il existe alors au moins un point ϕ-périodique hyperbolique dont la feuille instable n'est pas contenue dans une courbe compacte.*

Démonstration. Si x_0 est un point périodique de période k dont la variété instable est contenue dans une courbe compacte irréductible E, alors $\phi^k(E) = E$. La classe d'homologie de E est donc contenue dans l'orthogonal de $D^+ \oplus D^-$. En particulier, $[E]^2 < 0$ et E est donc une courbe nodale de X, d'auto-intersection -2. Étant d'auto-intersection négative, ces courbes sont déterminées par leur classe d'homologie. Puisque l'hyperboloïde $\{q_X = -2\}$ ne peut couper l'orthogonal de $D^+ \oplus D^-$ que sur un nombre fini de points entiers, ces courbes invariantes sont en nombre fini. Comme ϕ admet une infinité de points périodiques hyperboliques, et comme chacune de ces courbes contient au plus deux points ϕ-périodiques hyperboliques, le lemme est démontré. $\square$

Proposition 2.8. *Soit x_0 un point périodique hyperbolique dont la feuille instable $f_{x_0} : \mathbb{C} \to X$ n'est pas contenue dans une courbe compacte. Tout courant fermé adhérent à la suite des courants de Nevanlinna de f_{x_0} coïncide alors avec le courant T^+.*

Démonstration. Soit k la période de x_0 et C un courant fermé adhérent à la suite $N(r, f_{x_0})$. D'après le lemme 2.6, $[C]^2 \geq 0$.

Puisque ϕ^k dilate la variété instable, $\phi_*^{kn} C \geq C$ quelque soit n. Appliquée à la forme positive $\lambda^{-kn}\phi_*^{kn}(\kappa)$, cette inégalité fournit :

$$\langle \phi_*^{kn} C \mid \frac{1}{\lambda^{kn}} \phi_*^{kn} \kappa \rangle \geq \frac{1}{\lambda^{kn}} \langle C \mid \phi_*^{kn} \kappa \rangle.$$

Le membre de gauche est égal au quotient de $\langle C \mid \kappa \rangle$ par λ^{kn} et tend donc vers 0. Soit $[\kappa]^*$ la classe d'homologie duale de $[\kappa]$. La suite $\lambda^{-kn}\phi_*^{kn}([\kappa]^*)$ converge vers $[T^+]$, donc le membre de droite de l'inégalité précédente converge vers $[C].[T^+]$. En corollaire, nous obtenons $[C].[T^+] \leq 0$.

Comme $[C]^2 \geq 0$ on en déduit que $[C]$ est proportionnel à $[T^+]$ et la proposition résulte des propriétés d'extrémalité vérifiées par T^+. $\square$

En conclusion, on peut affirmer qu'il existe au moins une variété instable de ϕ qui est paramétrée par une courbe entière injective $f : \mathbb{C} \to X$ pour laquelle au moins une sous-suite de $N(r, f)$ converge vers T^+.

3. Potentiels continus pour T^+ et T^-

Dans la partie précédente, nous avons montré qu'il existe un courant positif fermé T^+ de masse 1 vérifiant $\phi_* T^+ = \lambda T^+$, que ce courant est unique et qu'il s'obtient à l'aide de variétés instables. Le but de cette partie est de montrer que T^+ admet des potentiels locaux continus :

Théorème 3.1. *Soit X une surface K3 projective et ϕ un automorphisme de X dont l'entropie est strictement positive. Pour tout point x de X, il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de x et une fonction continue $u^+ : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$T^+_{|\mathcal{U}} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\overline{\partial} u^+.$$

Pour obtenir ces potentiels, nous allons adapter la construction de Hubbard et Papadopol concernant les endomorphismes de $\mathbb{P}^n$ [20], [37]. Rappelons en tout d'abord les étapes principales.

Soit $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection canonique et $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ un endomorphisme de degré d. Il existe alors une application holomorphe $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ qui est homogène de degré d et vérifie $\pi \circ F = f$. Puisque f n'a aucun point d'indétermination, F ne s'annule pas sur la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ et l'homogénéité de F entraîne l'existence d'une constante $\epsilon > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \epsilon \parallel x \parallel^d \leq \parallel F(x) \parallel \leq \frac{1}{\epsilon} \parallel x \parallel^d .$$

On en déduit sans peine que la suite de fonctions $G_n(x) = (1/d)^n \log(\parallel F^n(x) \parallel)$ converge vers une fonction plurisousharmonique continue G^+. Le courant positif fermé $(i/\pi)\partial\overline{\partial} G^+$ peut ensuite être projeté sur $\mathbb{P}^n$ de la manière suivante : si x est un point de $\mathbb{P}^n$, et $s : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^{n+1}$ une section locale de π au voisinage de x, on pose

$$\mu^+_{|\mathcal{U}} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\overline{\partial} \left(G^+ \circ s \right).$$

Cette formule ne dépend pas de s et permet donc de définir μ^+ sur tout $\mathbb{P}^n$. C'est un courant positif fermé dilaté par f qui joue un rôle analogue à celui que jouera T^+ pour les automorphismes des surfaces K3.

Adaptons maintenant cette stratégie au cas des automorphismes des surfaces K3. Ici, nous savons déjà construire T^+ et nous cherchons l'analogue de G^+.

3.1. Extension de la dynamique à un fibré principal.

Choisissons n_X fibrés en droites $L_1, ..., L_{n_X}$ dont les classes de Chern $c_1, ..., c_{n_X}$ forment une base de S_X. La matrice de ϕ^* dans cette base sera notée $A_\phi = [a_{ij}]$. À chaque fibré L_i est associé un $\mathbb{C}^*$-fibré principal dont l'espace total peut être identifié au complémentaire de la section nulle dans L_i. En faisant le produit de ces

n_X fibrés principaux, on obtient un $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$-fibré principal noté E. La projection de E sur X sera notée π_E et les fibres $\pi_E^{-1}\{x\}$ seront notées E_x.

Proposition 3.2. *Il existe un difféomorphisme holomorphe Φ_E sur l'espace total du fibré E vérifiant :*

(i) $\pi_E \circ \Phi_E = \phi \circ \pi_E$ (on dira que Φ_E est "au-dessus" de ϕ) ;

(ii) en restriction aux fibres, Φ_E est un automorphisme algébrique de $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$.

Remarque 3.1. Dans le cas de $\mathbb{P}^n$, le groupe de Néron-Severi est de rang un et le fibré tautologique est un générateur. L'espace total de E s'identifie alors avec $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ et l'on retrouve la première étape de la construction de Hubbard et Papadopol, i.e. la construction de F.

Démonstration. Notons ϕ^*E l'image réciproque de E par ϕ et $\phi_* : \phi^*E \to E$ l'application associée. Si $\psi : E \to \phi^*E$ est une équivalence de fibrés, l'application $\Phi_E = \phi_* \circ \psi$ vérifie (i) et (ii). Il suffit donc de montrer que les fibrés principaux E et ϕ^*E sont équivalents. Puisque $b_1(X)$ est nul, la suite exacte longue de l'exponentielle montre que tout $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$-fibré principal est déterminé par sa classe de Chern. On va donc montrer que les classes de Chern de E et $\phi^*(E)$ sont les classes de Chern de deux fibrés principaux équivalents.

Par définition, la classe de E est un élément de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}^{n_X}) \equiv \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{n_X}$ et celle de ϕ^*E s'en déduit par l'action de ϕ^* sur le membre de gauche de ce produit tensoriel, à savoir $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. Identifions S_X à $\mathbb{Z}^{n_X}$ en identifiant la base (c_i) de S_X à la base canonique (e_i) de $\mathbb{Z}^{n_X}$. La classe de Chern de E vaut alors $c(E) = \sum_{i=1}^{n_X} e_i \otimes e_i$ et celle de $\phi^*(E)$ est donc

$$c(\phi^*(E)) = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_X} a_{ij} e_j \otimes e_i. \tag{3}$$

Changer le fibré principal E en un fibré équivalent, c'est changer l'action de $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$ sur les fibres de E en la tordant à la source par un automorphisme de $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$. Tout automorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$ s'obtient à partir d'une matrice $[b_{ij}] \in \mathrm{SL}(n_X, \mathbb{Z})$ en faisant le changement de coordonnées $(t_i) \mapsto (\chi_i)$ où :

$$\chi_i = \prod_{j=1}^{n_X} t_j^{b_{ij}}.$$

Si l'on change l'action de $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$ à l'aide d'un tel automorphisme, la classe de Chern du fibré obtenu se déduit de celle de E par l'action de $[b_{ij}]$ sur le membre de droite de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{n_X}$. D'après la formule (3), il suffit donc de tordre l'action de $(\mathbb{C}^*)^{n_X}$ sur E par l'automorphisme associé à la matrice ${}^tA_\phi = [a_{ji}]$ pour obtenir un fibré qui est équivalent à E et qui a même classe de Chern que ϕ^*E. Les deux fibrés E et ϕ^*E sont donc équivalents et la preuve est terminée. □

Remarque 3.2. 1.– Soient x un point de X et $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) un voisinage de x (resp. de $\phi(x)$) au-dessus duquel E est trivial. On peut alors exprimer Φ_E en coordonnées locales et l'on obtient $\Phi_E(y,(s_i)) = (\phi(y),(u_i))$ avec

$$u_i = f_i(y) \prod_{j=1}^{n_X} s_j^{a_{ij}},$$

les fonctions f_i dépendant du choix des coordonnées locales et ne s'annulant pas.

2.– Le résultat précédent s'applique à tout automorphisme d'une variété projective dont le premier nombre de Betti est nul. Lorsque ce nombre est strictement positif, il faut d'abord factoriser l'automorphisme à l'aide de l'application d'Albanese.

3.2. **Construction du potentiel.**

Il s'agit maintenant de construire l'analogue des fonction G_n de Hubbard et Papadopol puis de montrer que cette suite converge uniformément. Avant de présenter la construction, rappelons que la droite D^+ associée à l'automorphisme ϕ est contenue dans $S_X \otimes \mathbb{R}$ lorsque X est projective, ce que nous supposons désormais (cf. remarque 1.1).

Nous munirons chaque fibré L_i d'une métrique hermitienne h_i et noterons (t_i) les coordonnées de $[T^+]$ dans la base Poincaré-duale de (c_i). Si (x,s) est un point de la fibre E_x, nous noterons (s_i) les coordonnées de s dans les n_X fibrés L_i. On définit alors une fonction continue $F : E \to \mathbb{R}$ par la formule

$$F(x,s) = \sum_{i=1}^{n_X} t_i \log\left(h_i(x,s_i)^2\right),$$

puis l'on pose

$$G_n = \frac{1}{\lambda^n} F \circ \Phi_E^n.$$

Proposition 3.3. *La suite de fonctions (G_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue $G_\phi^+ : E \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_l$ un recouvrement fini de X par des ouverts audessus desquels E est trivial. Pour chacun des $\mathcal{U}_i$, fixons une trivialisation de E. Dans les cartes correspondantes, chaque métrique h_i est du type $h_i(x,s_i)^2 = g_i(x)|s_i|^2$ où g_i est une fonction lisse ne s'annulant pas. Puisque nous n'utilisons qu'un nombre fini de cartes, les fonctions g_i sont en nombre fini et les fonctions $\log(g_i(x))$ sont donc uniformément bornées ; en particulier,

$$F(x,s) = \sum_{i=1}^{n_X} t_i \log(|s_i|^2) + O(1).$$

La fonction $F \circ \Phi_E$ s'exprime de manière analogue à l'aide des notations de la remarque 3.2 :

$$\begin{aligned} F \circ \Phi_E(x,s) &= \sum_{i=1}^{n_X} t_i \log \left| \prod_{j=1}^{n_X} s_j^{a_{ij}} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n_X} t_i \log \left(g_i(x) |f_i(x)|^2 \right) \\ &= \log \left| \prod_{j=1}^{n_X} s_j^{\sum t_i a_{ij}} \right|^2 + O(1). \end{aligned}$$

Comme les t_i sont les coordonnées de $[T^+]$ dans la base duale de (c_i), ${}^tA_\phi(t_i) = (\lambda t_i)$ et donc

$$F \circ \Phi_E = \lambda \sum_{j=1}^{n_X} t_j \log |s_j|^2 + O(1) = \lambda F + O(1).$$

Il existe donc deux constantes m_0 et M_0 telles que

$$m_0 + \lambda F \leq F \circ \Phi_E \leq M_0 + \lambda F.$$

On en déduit alors que la série $\sum (G_{n+1} - G_n)$ converge uniformément, ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Montrons maintenant que la fonction G_ϕ^+ permet de construire des potentiels continus pour T^+. Tout d'abord, remarquons que, si $s_i : \mathcal{U} \to L_i$ est une section locale de L_i ne s'annulant pas, alors

$$\Theta_{h_i} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial \overline{\partial} \log(h_i \circ s_i)$$

ne dépend pas de s_i : c'est la courbure de L_i pour la métrique h_i. En particulier, le courant $T_0 = (i/\pi)\partial\overline{\partial} F$ se projette sur X en un courant d'ordre 0 dont la classe d'homologie coïncide avec celle de T^+. La suite de courants $(1/\lambda)^n \phi_*^n T_0$ converge vers le courant $T = (i/\pi)\partial\overline{\partial} G_\phi^+$ (projeté sur X) et, puisque

$$G_\phi^+ \circ \Phi_E = \lambda G_\phi^+,$$

on a $\phi_* T = \lambda T$. Le courant T est donc un courant fermé qui vérifie $[T] = [T^+]$ (car $[T_0] = [T^+]$) et $\phi_* T = \lambda T$. Le théorème 2.4 montre alors que T coïncide avec T^+. En particulier, T^+ admet des potentiels locaux continus, ce qui achève la preuve du théorème 3.1.

3.3. **Définition de la mesure μ.**.

Puisque les courants T^+ et T^- admettent des potentiels locaux continus, nous pouvons les multiplier (cf. §5.2), ce qui détermine une mesure de probabilité

$$\mu = T^+ \wedge T^-$$

qui est évidemment ϕ-invariante. Les propriétés d'unicité de T^+ et T^- montrent que cette mesure μ est "*naturellement*" associée à la dynamique du difféomorphisme ϕ et à la structure complexe invariante. Les propriétés ergodiques de μ seront analysées dans la partie 6.

Exemple 3.1. Dans l'exemple 0.1, la mesure μ associée à l'automorphisme ϕ coïncide bien-sûr avec la mesure canonique ω_X de la surface.

3.4. **Précision technique.**

Nous allons ici établir un résultat technique qui précise la convergence de la suite de fonctions (G_n). Nous n'utiliserons ce résultat qu'au paragraphe 5.2.

Proposition 3.4. *Il existe une constante M, un recouvrement fini de X par des ouverts et une forme de Kähler κ sur X tels que :*

1) la suite de courants $\frac{1}{\lambda^n}\phi^n_* T_\kappa$ converge vers T^+ ;

2) les courants $\frac{1}{\lambda^n}\phi^n_* T_\kappa$ sont donnés, sur chaque ouvert $\mathcal{U}_i$ du recouvrement, par un potentiel continu $u_{i,n}$ de valeur absolue uniformément majorée par M.

3) Quitte à extraire une sous-suite de $(u_{i,n})_n$, on obtient une suite de fonctions continues qui converge simplement au dessus de $\mathcal{U}_i$ vers le potentiel de T^+.

Démonstration. 1) La première assertion a déjà été obtenue pour n'importe quel choix de κ au paragraphe 2.3.

2) On reprend la construction des paragraphes 3.1 et 3.2 avec des fibrés en droites très amples L_i que l'on équipe de métriques hermitiennes h_i. On note F la somme des logarithmes de ces métriques, $F = \sum_{i=1}^r \log(h_i)$, ce qui définit une fonction continue sur l'espace total E (attention,ce n'est pas la même que précédemment). L'amplitude des fibrés L_i permet de supposer que $(i/\pi)\partial\overline{\partial}F$ se projette sur X en une forme de Kähler κ.

Recouvrons X par un nombre fini d'ouverts $\mathcal{U}_i$ au dessus desquels le fibré E est trivial et fixons une section holomorphe $\sigma^i : \mathcal{U}_i \to E$ du fibré E au dessus de chacun des $\mathcal{U}_i$; la fonction $F \circ \sigma^i$ est alors un potentiel pour le courant T_κ : $\alpha \mapsto \int_X \kappa \wedge \alpha$. De même, au dessus de l'ouvert $\mathcal{U}_i$, $\frac{1}{\lambda^n} F \circ \Phi_E^n \circ \sigma^i$ est un potentiel pour le courant $\frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)_* T_\kappa$. Nous allons montrer que ces potentiels sont bornés indépendamment de n.

On commence par remarquer que les modules des coordonnées des σ^i sont encadrés par deux constantes strictement positives m et M indépendantes du point et de i : $\forall i, \forall x \in \mathcal{U}_i, \forall j \in \{1, ..., r\}$, $m <|\sigma^i(x)|\leq M$. Ensuite, on utilise l'expression de Φ_E obtenue à la remarque 3.2 : si $\Phi_E(x, s_1, ..., s_r) = (\phi(x), u_l)$ alors

$$u_l = f^l_{ij}(x) \prod_{k=1}^r s_k^{a_{lk}}, \tag{4}$$

où f^l_{ij} est holomorphe, ne s'annule pas et ne dépend que du choix de la trivialisation à la source (sur $\mathcal{U}_i$) et au but (sur $\mathcal{U}_j$, qui contient $\phi(x)$). En particulier,

$$\log(|u_l|) = \log(|f^l_{ij}(x)|) + \sum_{k=1}^r a_{lk} \log(|s_k|),$$

où $A_\phi = [a_{lk}]$ est la matrice de ϕ^* dans la base de $S_X \otimes \mathbb{R}$ donnée par les classes de Chern des L_i. Cette dernière formule décrit l'évolution du module des coordonnées, lues dans les cartes choisies, lorsqu'on applique la transformation Φ_E ; ceci diffère de la norme calculée avec h_i par une fonction multiplicative (additive par passage au log) que l'on peut toujours incorporer dans les f_{ij}^l, ce que nous ferons.

Ce que l'on veut contrôler, c'est l'évolution de $(1/\lambda^n)F \circ \Phi_E^n \circ \sigma^i$ quand n croît. Pour $n = 1$, on vient de faire le calcul. Pour $n = 2$, il faut prendre l'image de $(\phi(x), u_l)$ par Φ_E. Soient $(\phi^2(x), v_i)$ les coordonnées de $\Phi_E(\phi(x), u_i)$. Si w est un vecteur, nous noterons w_j ou encore $[w]_j$ sa $j^{\text{ème}}$ coordonnée. Avec ces notations on obtient

$$\log(|v_l|) = [A_\phi \circ A_\phi(\log(|s_k|))]_l + [A_\phi(\log(|f_{ij}^k|))]_l + \log(|g|),$$

où g est l'une des f_{ij}^k et dépend uniquement des choix de coordonnées autour de $\phi(x)$ et $\phi^2(x)$. L'évolution de F par itération est donc régie par le processus suivant. On dispose d'une collection de vecteurs à coordonnées bornées qui sont les logarithmes des $\sigma_k^i(x)$ et les logarithmes des $f_{ij}^k(x)$. On part de l'un de ces vecteurs $[v] = [\log(\sigma^i(x))]$, on lui applique A_ϕ et on additionne un autre vecteur $[v'] = [\log(f_{ij}(x)]$ ce qui donne un vecteur $[u_1]$. On lui applique alors A_ϕ et on additionne un autre vecteur de notre collection, et ainsi de suite :

$$[v] \mapsto [A_\phi(v)] + [v'] \mapsto [A_\phi \circ A_\phi(v)] + [A_\phi(v')] + [v"] \mapsto \ldots$$

Autrement dit, on itère une infinité de transformations affines à partie linéaire constante, égale à A_ϕ, et à translation aléatoire mais de norme bornée. Ensuite, on divise le n^{eme} itéré par λ^n. Puisque A_ϕ est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est de taille $(r-2) \times (r-2)$ et préserve une métrique définie positive, l'orbite de tout point par cette dynamique est bornée. On en déduit immédiatement que les fonctions $u_{i,n} := \frac{1}{\lambda^n} F \circ \Phi_E^n \circ \sigma^i$ sont uniformément encadrées par deux constantes, ce qui montre le deuxième point du lemme.

3) Puisque les fonctions $u_{i,n}$ sont plurisousharmoniques et minorées-majorées, on peut extraire une sous-suite convergente : la limite est un potentiel pour le courant limite. D'après 1), ce courant coïncide avec T^+ : on a donc, à la limite, un potentiel pour T^+, qui est forcément continu. □

4. Laminarité des courants de Nevanlinna

Le courant T^+ (resp. T^-) est un courant d'intégration sur une variété instable (resp. stable) de l'automorphisme ϕ ; c'est donc un courant d'intégration sur une courbe entière injective. Nous allons maintenant utiliser cette propriété pour montrer que T^+ (resp. T^-) est un courant *fortement laminaire*.

Dans un premier temps, nous introduirons plusieurs notions distinctes de laminarité, puis, suivant [3], nous montrerons que tout courant d'intégration sur une courbe entière vérifie certaines propriétés de ce type. Ce n'est qu'à la partie suivante que l'on en déduira la laminarité de T^+.

Dans toute cette partie, X est donc une surface complexe compacte quelconque.

4.1. **Diverses notions de laminarité.**

• **Laminarité uniforme.** Commençons par la notion la plus simple et la plus contraignante de laminarité, la laminarité uniforme. Dans toute la suite, $\mathbb{D}^2$ désigne le bidisque $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : |x|<1, |y|<1\}$. Si $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ est une application holomorphe, son graphe est un sous-ensemble de $\mathbb{D}^2$ noté Γ_f.

Définition 4.1. Une famille pondérée de graphes disjoints (dans $\mathbb{D}^2$) est la donnée $(\mathcal{A},\mu,\{f_a\})$ d'un espace mesuré $(\mathcal{A},\mathcal{T},\mu)$ et, pour chaque point a de $\mathcal{A}$, d'une fonction holomorphe $f_a:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ tels que :

(i) si $a\neq b$, alors $\Gamma_{f_a}\cap\Gamma_{f_b}=\emptyset$,

(ii) l'application $(\mathcal{A},\mathcal{T})\to(\mathbb{D},\text{ Boréliens})$, $a\mapsto f_a(0)$ est bimesurable sur son image.

La deuxième condition permet de réaliser $\mathcal{A}$ comme une partie mesurable de la transversale $\{0\}\times\mathbb{D}$ et μ comme une mesure sur $\{0\}\times\mathbb{D}$ de support contenu dans $\mathcal{A}$. En utilisant le Λ-lemme de Manẽ, Sad et Sullivan [12] on peut compléter la famille de graphes en sorte que $\mathcal{A}$ soit un fermé de $\{0\}\times\mathbb{D}$. On obtient ainsi une lamination compacte de $\mathbb{D}^2$ par des disques holomorphes. Si l'on change de transversale, par exemple en remplaçant $\{0\}\times\mathbb{D}$ par $\{\epsilon\}\times\mathbb{D}$, l'holonomie est automatiquement continue [12].

Définition 4.2. Un courant T est uniformément laminaire au voisinage de x s'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant x et biholomorphe à $\mathbb{D}^2$ et une famille pondérée de graphes disjoints $(\mathcal{A},\mu,\{f_a\})$ sur $\mathcal{U}$ telle que :

$$\forall\alpha\in\Omega^2(\mathcal{U}),\ T(\alpha)=\int_{\mathcal{A}}\left(\int_{\Gamma_{f_a}}\alpha\right)d\mu(a). \tag{5}$$

Un courant est uniformément laminaire s'il l'est au voisinage de tout point.

Un courant uniformément laminaire est nécessairement de type $(1,1)$, positif et fermé. Si l'on peut exprimer T à l'aide de la formule (5) dans l'ouvert $\mathcal{U}$ on dit alors que $\mathcal{U}$ est un ouvert distingué et que T y est élémentaire.

La notion de courant uniformément laminaire coïncide en fait avec celle de lamination par surface de Riemann plongée dans X et munie d'un cycle feuilleté (voir [16] et [6]). Pour s'en convaincre, il suffit de recouvrir X par des ouverts distingués, de compléter chaque famille pondérée de graphes en une lamination continue, puis de remarquer que les recollements sont des fonctions qui sont continues transversalement à la lamination (Λ-lemme). En particulier, le théorème de Hurder et Mitsumatsu [21] montre qu'un courant laminaire pour lequel les mesures transverses sont sans atome a une auto-intersection nulle. Par exemple, le plan projectif ne supporte aucun courant uniformément laminaire de ce type.

• **Laminarité et laminarité faible.** Passons maintenant à la définition de la laminarité "usuelle". Il s'agit d'une notion plus faible et plus souple que la précédente qui a été introduite initialement dans [3].

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X. Une famille pondérée de disques disjoints dans $\mathcal{U}$ est la donnée d'un espace mesuré $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mu)$ et d'une collection d'applications holomorphes injectives $f_a : \mathbb{D} \to \overline{\mathcal{U}}$, $a \in \mathcal{A}$, d'images deux-à-deux disjointes, telle que $(a, z) \mapsto f_a(z)$ soit mesurable. La différence essentielle avec la notion de famille de graphes disjoints est qu'on ne suppose pas l'existence d'une transversale globale dans $\mathcal{U}$. Dans toute la suite, un disque tracé dans $\mathcal{U}$ est, par définition, l'image de $\mathbb{D}$ par une application holomorphe injective $f : \mathbb{D} \to \mathcal{U}$.

Définition 4.3. Un courant T est laminaire au voisinage de x s'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant x et une famille pondérée de disques disjoints dans $\mathcal{U}$ tels que :

$$\forall \alpha \in \Lambda^{1,1}(\mathcal{U}),\ T(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{D}} f_a^* \alpha \right) d\mu(a).$$

Un courant est laminaire s'il l'est au voisinage de tout point.

Un courant uniformément laminaire est évidemment laminaire. Pour la *laminarité faible*, on prend la même définition mais on suppose seulement que $f_a(\mathbb{D}) \cap f_b(\mathbb{D})$, à défaut d'être vide, est un ouvert dans chacun des deux disques.

Exemple 4.1. Soit μ une mesure sur $\mathbb{P}^1$, par exemple la mesure de Lebesgue, et $\wp$ un pinceau de droites dans $\mathbb{P}^2$ muni d'un paramétrage par $\mathbb{P}^1$: on note $\wp_x$ la droite correspondant au point x de $\mathbb{P}^1$ et p le point base du pinceau. Le courant

$$T : \alpha \mapsto \int_{\mathbb{P}^1} \int_{\wp_x} \alpha \ d\mu(x),$$

est alors un courant laminaire car on peut recouvrir chaque $\wp_x$ (à un ensemble négligeable près) par des ouverts deux à deux disjoints ne contenant pas p. La structure laminaire de ce courant présente cependant une singularité évidente au point p. Nous allons donc dès maintenant affiner la définition 4.3

• **Laminarité forte.**

Définition 4.4. Deux disques Δ_a et Δ_b tracés dans un ouvert $\mathcal{U}$ sont dits compatibles si, pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et tout ensemble analytique C de $\mathcal{V}$ qui est irréductible et contient Δ_a (resp. Δ_b), on a l'alternative : ou bien C ne rencontre pas Δ_b (resp. Δ_a) ou bien C contient $\Delta_b \cap \mathcal{V}$ (resp. $\Delta_a \cap \mathcal{V}$).

Pour cette définition, on ne demande pas que C soit défini sur tout $\mathcal{U}$ mais seulement sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ présentant une singularité isolée en $(0, 0)$ et si L est une feuille de $\mathcal{F}$ qui n'est pas une séparatrice, deux disques dans cette feuille sont compatibles mais iln'existe que très rarement un ensemble analytique C dans un voisinage de $(0, 0)$ qui contienne l'un de ces disques. La compatibilité est une relation d'équivalence sur les disques tracés dans $\mathcal{U}$. Essentiellement, deux disques sont compatibles quand leurs prolongements analytiques se raccordent ou ne se rencontrent pas.

Définition 4.5. Un courant T est dit fortement laminaire s'il s'écrit localement comme un courant laminaire associé à une famille pondérée de disques deux-à-deux disjoints et compatibles.

4.2. **Structure des courants laminaires.**

De nombreux résultats concernant les courants laminaires se trouvent dans [3]. Nous utiliserons principalement les deux suivants :

• Le premier correspond au lemme 6.2 de [3] et permet d'approcher localement les courants laminaires par des courants uniformément laminaires. En voici différentes formulations.

Soit T un courant faiblement laminaire et $\mathcal{U}$ un ouvert de X. Pour tout nombre ϵ strictement positif, il existe une collection finie de bidisques $\mathcal{U}_i$ dans $\mathcal{U}$ et, sur chaque $\mathcal{U}_i$, un courant uniformément laminaire élémentaire T_i, tels que :

(i) les T_i sont à supports disjoints,

(ii) $\text{Masse}[T|_{\mathcal{U}} - \sum_i T_i] < \epsilon$.

Lorsque T est laminaire, on peut trouver une collection dénombrable de tels courants uniformément laminaires T_i à supports disjoints pour lesquels $T|_{\mathcal{U}} = \sum_i T_i$. Plus précisément, si T est un courant laminaire qui, dans l'ouvert distingué $\mathcal{U}$, est donné par une famille pondérée de disque $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mu)$, il existe alors une collection dénombrable de bidisques $\mathcal{U}_i$ dans $\mathcal{U}$ tels que :

(i) Pour tout i, l'ensemble $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ des disques qui coupent $\mathcal{U}_i$ sur des graphes est un ensemble mesurable de μ-mesure strictement positive.

(ii) L'aire totale des portions de disques qui n'apparaissent comme un graphe dans aucun des $\mathcal{U}_i$ est nulle.

• Le deuxième résultat que nous utiliserons fréquemment permet d'exprimer un courant faiblement laminaire sous une forme plus agréable à manier : si T est faiblement laminaire et si x est un point de X il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de x, une famille pondérée de disques disjoints $(\mathcal{A}, \mu, \{f_a\})$ dans $\mathcal{U}$ et une famille de fonctions positives $\phi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall \alpha \in \Omega^2(\mathcal{U}),\ T(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{D}} \phi_a f_a^*(\alpha) \right) d\mu(a). \tag{6}$$

Les fonctions ϕ_a peuvent être choisies semi-continues inférieurement et déterminent une fonction Φ sur $\mathcal{U}$ qui est mesurable.

Proposition 4.1. *Un courant faiblement laminaire et fermé sur une surface complexe compacte X est automatiquement laminaire.*

Démonstration. Soit T un courant faiblement laminaire fermé et $\mathcal{U}$ un ouvert de X dans lequel T est représenté par la formule (6). Il existe alors une collection dénombrable de bidisques $\mathcal{U}_i$ contenus dans $\mathcal{U}$ et vérifiant les propriétés suivantes. Pour chaque i, l'ensemble des disques $f_a(\mathbb{D})$ constituant T et coupant $\mathcal{U}_i$ sur un graphe est un ensemble de μ-mesure strictement positive ; l'union $\mathcal{A}_i$ des graphes ainsi construits détermine une famille de graphes deux-à-deux disjoints dans $\mathcal{U}_i$ et le courant

$$T_i : \alpha \mapsto \int_{\mathcal{A}_i} \left(\int_{\mathbb{D}} \phi_a f_a^*(\alpha) \right) d\mu(a)$$

est contenu dans $T_{|\mathcal{U}_i}$; enfin, la somme des T_i est égale à T.

Pour montrer la proposition il suffit de montrer que les fonctions ϕ_a qui apparaissent dans cette formule sont constantes pour μ-presque tout point a de $\mathcal{A}_i$ et pour tout indice i. Fixons un tel indice et complétons la famille $(\mathcal{A}_i, f_a)$ de telle sorte que

$$K = \coprod_{a \in \mathcal{A}_i} f_a(\mathbb{D})$$

soit une lamination compacte de $\mathcal{U}_i$, ce qui est possible grace au Λ-lemme. Nous noterons $\overline{T}_i$ le courant obtenu en restreignant T_i à cette lamination ; à l'aide du paramétrage $(a, z) \mapsto f_a(z)$ on peut penser $\overline{T}_i$ comme un courant sur la lamination verticale de $\mathcal{A}_i \times \mathbb{D}$. Puisque T_i coïncide avec la restriction de T à la lamination, $\overline{T}_i$ est fermé. En d'autres termes, si $\alpha = \alpha_1(a, z)dz + \alpha_2(a, z)d\overline{z}$ est une forme différentielle sur la lamination $\mathcal{A}_i \times \mathbb{D}$ qui est continue et différentiable le long des feuilles alors $\overline{T}_i(d\alpha) = 0$, la différentiation ayant lieu le long des feuilles. Cette formule peut être réécrite sous la forme

$$\int_{a \in \mathcal{A}_i} \int_{\mathbb{D}} \tilde{\phi}_a(z) d\alpha \, d\mu(a) = 0$$

où $\tilde{\phi}_a = \phi_a \circ f_a$. Pour montrer que ϕ_a est constante pour μ-presque tout a, il suffit de montrer que les $\tilde{\phi}_a$ le sont. Quitte à convoler $\overline{T_i}$ par un noyau régularisant le long des feuilles, ce qui ne change pas le fait que $\overline{T}_i$ est fermé, on peut supposer dans un premier temps que les $\tilde{\phi}_a$ sont lisses. Une intégration par partie montre alors que

$$\int_{a \in \mathcal{A}_i} \int_{\mathbb{D}} d\tilde{\phi}_a(z) \wedge \alpha \, d\mu(a) = 0$$

pour toute 1-forme α qui est continue et lisse le long de la lamination. La dérivée de $\tilde{\phi}_a$ est donc presque tout le temps identiquement nulle. Ceci signifie que les $\tilde{\phi}_a$ sont constantes dès qu'on les régularise. Les $\tilde{\phi}_a$ sont donc elles-mêmes constantes et la preuve est terminée. □

Proposition 4.2. *Soit T un courant laminaire et T_1 un courant positif contenu dans T, c'est-à-dire que $\langle T_1 \mid \beta \rangle$ est majoré par $\langle T \mid \beta \rangle$ pour toute forme positive β. Alors T_1 est faiblement laminaire.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat lorsque T est uniformément laminaire, le cas général s'y ramenant par les arguments de la preuve précédente. Lorsque T est un courant uniformément laminaire élémentaire sur le bidisque $\mathcal{U}$ il détermine un champ de (1,1)-bivecteurs scindés $t \wedge \overline{t} = (f_a)_*(\partial_z \wedge \overline{\partial_z})$. C'est un champ continu sur le support de T. Soit ω une forme volume sur $\mathcal{U}$ compatible avec l'orientation donnée par la structure complexe. La $(1,1)$-forme $\beta = \imath_{t \wedge \overline{t}} \omega$ (produit intérieur) est positive et continue le long du support de T, donc

$$0 \leq T_1(\beta) \leq T(\beta)$$

et, puisque $T(\beta)$ est nul, on obtient $T_1(\beta) = 0$. On en déduit sans peine que T_1 peut être représenté dans $\mathcal{U}$ par la formule :

$$T_1(\alpha) = \int_{\mathcal{U}} \alpha(t \wedge \bar{t})\, d\nu$$

où ν est une mesure positive sur $\mathcal{U}$. En désintégrant ν le long des graphes constituant T on voit que T_1 est faiblement laminaire (avec les mêmes disques que T). □

Proposition 4.3. *Soit T un courant laminaire fermé admettant un potentiel continu au voisinage de tout point. Si la classe d'homologie de T vérifie $[T]^2 = 0$ alors T est fortement laminaire.*

Plus précisément, pour toute représentation de T à l'aide d'une famille pondérée de disques $(\mathcal{A}, \mu, \{f_a\})$, on peut retirer à $\mathcal{A}$ un ensemble de μ-mesure nulle sur le complémentaire duquel la famille est constituée de disques compatibles.

Nous utiliserons la multiplication des courants à potentiels continus (cf. §5.2). Si T_i et T_j sont deux courants de ce type, $T_i \wedge T_j$ est donc une mesure positive.

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X et $(\mathcal{A}, \mu, \{f_a\})$ une représentation de T dans $\mathcal{U}$. Deux disques $f_a(\mathbb{D})$ et $f_b(\mathbb{D})$ compatibles et qui admettent des prolongements analytiques dans $\mathcal{U}$ qui se rencontrent sur un ouvert commun seront dits "dans la même feuille". Être dans la même feuille détermine une relation d'équivalence mesurable sur $\mathcal{A}$ qui contient au plus un nombre dénombrable de points dans chaque classe. Puisque T a un potentiel continu, μ est sans atome et la mesure de chaque classe est donc nulle. Par ailleurs, puisque le courant est fermé, le prolongement analytique local de presque tout disque de T est réunion de disques de T (àun ensemble négligeable près). La notion de feuille est donc vraiment analogue à celle employée dans le cas des laminations.

Si T n'est pas fortement laminaire il existe un ensemble $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ de mesure positive tel que tout couple (a, a') appartenant à $\mathcal{M}_1$ corresponde à une paire de disques non compatibles. Quitte à changer le découpage des feuilles correspondantes, on peut donc supposer qu'il existe $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, de mesure positive, tel que :

$$\forall (a, a') \in \mathcal{M},\ f_a(\mathbb{D}) \cap f_{a'}(\mathbb{D}) \neq \emptyset.$$

Utilisons maintenant la représentation de T à l'aide d'une somme de courants uniformément laminaires T_i définis dans des bidisques $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{U}$. Pour chacun de ces courants il existe $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ tel que

$$T_i(\alpha) = \int_{\mathcal{A}_i} \int_{f_a(\mathbb{D}) \cap \mathcal{U}_i} \alpha\, d\mu(a)$$

et, comme $\mu \times \mu(\mathcal{M}) > 0$, on peut supposer qu'il existe deux tels courants T_i et T_j avec $\mu \times \mu(\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j \cap \mathcal{M}) > 0$. Ces deux courants admettent des potentiels continus car ils sont contenus dans T et T admet de tels potentiels (cf. lemme 8.2 de [3]). Ils sont en outre uniformément laminaires. On peut donc calculer leur intersection en comptant le nombre moyen de points d'intersection entre leurs disques constitutifs ([3], paragraphe 8) :

$$\int T_i \wedge T_j = \int_{\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j} \sharp\{f_a(\mathbb{D}) \cap f_b(\mathbb{D})\} \, d\mu \times d\mu(a, b) > 0.$$

L'auto-intersection de T étant minorée par cette quantité, on obtient une contradiction et la proposition est démontrée. □

4.3. **Laminarité des courants de Nevanlinna.**

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat suivant.

Théorème 4.4. *Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière injective tracée sur une surface projective complexe. Tout courant fermé qui est adhérent à la suite $N(r, f)$ est alors un courant laminaire.*

Ce théorème s'inspire du paragraphe 7 de [3] mais se situe cependant dans un cadre a priori démuni de dynamique. Par exemple, X peut-être le plan projectif ou une surface de type général.

• **Un cas particulier.** Nous allons commencer par démontrer ce résultat dans le cas où X admet des fibrations singulières $\pi_i : X \to \mathbb{P}^1$, $i = 1, ..., l$, satisfaisant :

i) la fibre générique de π_i est connexe et de genre supérieur ou égal à 2.

ii) Si ω désigne la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1$, alors $\kappa = \sum_{i=1}^{l} \pi_i^* \omega$ est une forme de Kähler sur X.

En outre, nous étudierons d'abord les courants fermés adhérents à la suite

$$G(r, f) : \alpha \mapsto \frac{1}{A(r, f)} \int_{f(\mathbb{D}_r)} \alpha,$$

où $A(r, f)$ est l'aire de $f(\mathbb{D}_r)$ pour la métrique associée à κ. Cette première étape aura l'avantage de souligner plus facilement les liens entre les deux pages qui suivent et le paragraphe 7 de [3].

Soit r_i une suite de rayons tendant vers l'infini pour laquelle $G(r_i, f)$ converge vers un courant positif fermé noté C. Nous allons montrer que C est faiblement laminaire, ce qui d'après la proposition 4.1 est suffisant pour établir que C est laminaire.

Soit π l'une des l fibrations π_i. Découpons $\mathbb{P}^1$ en quatre domaines disjoints Δ_0^i, $i = 1, ..., 4$, qui sont homéomorphes à des disques, qui évitent les points critiques de π, dont les adhérences recouvrent tout $\mathbb{P}^1$, et dont les aires sont égales (pour la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1$). Soit Δ l'un quelconque de ces quatre domaines. Puisque le genre des fibres de π est supérieur à 2, l'ensemble $\pi^{-1}(\Delta)$ est hyperbolique au sens de Kobayashi. En particulier, la famille des applications holomorphes $s : \Delta \to \pi^{-1}(\Delta)$ qui sont des sections de π est une famille normale au sens de Montel [26].

La composition $\pi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ est une application méromorphe entière à laquelle nous allons appliquer la théorie d'Ahlfors-Nevanlinna [31]. Nous dirons donc qu'une composante connexe de $\mathbb{D}_r \cap (\pi \circ f)^{-1}(\Delta)$ est une bonne île si son image par f est le graphe d'une section de π. Ainsi, à chaque rayon r_i est associé un nombre fini de sections $s : \Delta \to \pi^{-1}(\Delta)$ dont les graphes $s(\Delta)$ sont contenus dans $f(\mathbb{D}_{r_i}) \cap \pi^{-1}(\Delta)$. Soit z un point de Δ, et $\mathcal{A}_{r_i}$ le sous-ensemble de $\pi^{-1}\{z\}$ constitué des $s(z)$, s décrivant l'ensemble fini des sections ainsi construites. Puisque f est injective, chaque point a de $\mathcal{A}_{r_i}$ correspond à une unique section s_a ; nous noterons Γ_a le graphe $s_a(\Delta)$ correspondant.

Soit μ_{r_i} la mesure

$$\mu_{r_i} = \frac{1}{A(r_i, f)} \sum_{a \in \mathcal{A}_{r_i}} \delta_a.$$

C'est une mesure finie de masse majorée par $\| d\pi \| /\text{aire}(\Delta)$, où la norme de $d\pi$ et l'aire de Δ sont mesurés à l'aide de κ et ω. Nous pouvons donc extraire une sous-suite convergente de $(\mu_{r_i})_i$ dont la limite est notée μ_Δ. Pour chaque point b du support de μ_Δ il existe une suite de points $a_j \in \mathcal{A}_{r_j}$ tendant vers b et, puisque les graphes Γ_{a_j} forment une famille normale, on peut choisir un graphe limite Γ_b passant par b. D'après le théorème d'Hurwitz, les graphes ainsi construits sont disjoints et forment donc une lamination compacte de $\pi^{-1}(\Delta)$ qui est transverse aux fibres de π. Le courant C_Δ défini par

$$C_\Delta : \alpha \mapsto \int_{\pi^{-1}\{z\}} \int_{\Gamma_a} \alpha \ d\mu_\Delta(a)$$

est un courant laminaire sur $\pi^{-1}(\Delta)$.

La somme des quatre courants ainsi construits au-dessus des quatres domaines Δ_0^i est un courant laminaire C_0 contenu dans C ; il approxime C d'autant mieux qu'il y a peu de mauvaises îles au-dessus des Δ_0^i. À ce stade, cette construction un peu naïve peut mener au courant nul et il faut la raffiner afin d'être sûr que les courants laminaires que l'on construit approchent convenablement C.

On découpe donc à nouveau l'ensemble Δ en quatre domaines d'aires égales $\Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^4$. Sur chacun des Δ_1^k on peut appliquer la construction précédente ce qui donne un courant $C_{\Delta_1^k}$. Ce courant est supérieur à la restriction de C_Δ à $\pi^{-1}(\Delta_1^k)$ car une portion de $f(\mathbb{D}_{r_i})$ peut-être un graphe au-dessus de Δ_1^k sans l'être au-dessus de tout Δ. La mesure μ_Δ peut être poussée par holonomie sur une fibre de Δ_1^k, ce qui permet de la comparer à $\mu_{\Delta_1^k}$: on obtient une mesure absolument continue par rapport à $\mu_{\Delta_1^k}$ de support éventuellement plus petit et de dérivée parfois petite en certains points. On retranche alors C_Δ à chacun des $C_{\Delta_1^k}$ pour obtenir un courant laminaire résiduel $\tilde{C}_{\Delta_1^k}$ sur chaque $\pi^{-1}(\Delta_1^k)$. La somme de C_Δ et de ces quatre courants résiduels est majorée par la restriction de C à $\pi^{-1}(\Delta)$ et l'approche mieux que C_Δ puisqu'on a jeté moins de mauvaises îles. Ce courant n'est cependant plus laminaire car des graphes du courant résiduel contenues dans des graphes de C_Δ peuvent subsister là où μ_Δ est petite devant $\mu_{\Delta_1^k}$.

En itérant cette construction et en appliquant la théorie d'Ahlfors-Nevanlinna comme dans [3] on obtient à la limite un courant *faiblement laminaire* C_∞ sur X qui est contenu dans le courant C et vérifie

$$\langle C_\infty \mid \pi^*\omega \rangle = \langle C \mid \pi^*\omega \rangle.$$

Cette formule signifie en effet que la proportion des points où la dérivée de $\pi \circ f$ s'annule (ceux qui sont contenus dans les mauvaises îles de tous les domaines Δ_i^j) est négligeable : c'est exactement ce que dit l'inégalité d'Ahlfors-Nevanlinna, le terme d'erreur de cette inégalité étant négligeable exactement lorsque C est fermé, c'est-à-dire lorsque le périmètre de $f(\mathbb{D}_{r_i})$ devient négligeable par rapport à son aire.

Lorsque l'on utilise successivement les l fibrations π_i on construit bien sûr le même courant C_∞, indépendamment de l. Ce courant vérifie donc en fait

$$\langle C_\infty \,|\, \kappa\rangle = \langle C \,|\, \kappa\rangle,$$

ce qui montre que C_∞ coïncide avec C. En particulier, C est faiblement laminaire.

• **Application à $\mathbf{N(r, f)}$.** Revenons maintenant à l'étude des courants de Nevanlinna $N(r, f)$. Supposons que la sous-suite $N(r_j, f)$ converge faiblement vers un courant fermé T, c'est-à-dire que T est donné par la formule

$$T : \alpha \mapsto \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{T(r_j, f)} \int_1^{r_j} \int_{f(\mathbb{D}_{r_j})} \alpha \, \frac{dt}{t}.$$

On peut alors reprendre la construction précédente point par point en introduisant les courants

$$T_\Delta : \alpha \mapsto \int_{\mathcal{A}_{r_j}} \int_{\Gamma_a} p_a \alpha \, d\mu'_\Delta(a), \tag{7}$$

où la fonction p_a est définie sur chaque graphe Γ_a, c'est-à-dire sur chaque bonne île, et correspond dans l'île à la fonction $1/t$. La mesure μ'_Δ est définie de manière analogue à la mesure μ_Δ mais en normalisant par le facteur $T(r, f)$.

La formule (7) montre que T_Δ est un courant faiblement laminaire obtenu à partir de C_Δ en multipliant les disques qui le constituent par des fonctions proportionnelles aux p_a. Cette propriété subsiste évidemment à la limite. On obtient ainsi directement la décomposition de T qui correspond à la formule (6). En conclusion, les courants T qui sont fermés et adhérents à $N(r, f)$ sont faiblement laminaires et donc laminaires (proposition 4.1). Il reste à voir comment se débarasser de l'hypothèse relative aux fibrations de la surface X.

• **Sur une surface projective quelconque.** Puisque X est projective, elle possède un pinceau $\wp$ de courbes de genre au moins 2. Soient $p_1, \ldots, p_k$ les points-base de ce pinceau. En éclatant la surface X au-dessus de chacun de ces points on dispose d'une projection $\epsilon : \check{X} \to X$ et d'une fibration $\pi_\wp : \check{X} \to \mathbb{P}^1$. Lorsqu'une courbe f est tracée sur X on peut la relever à $\check{X}$ ce qui fournit une courbe entière $\check{f} : \mathbb{C} \to \check{X}$ dominant f, i.e. $\epsilon \circ \check{f} = f$. On peut faire la même construction en partant de plusieurs pinceaux de telle sorte que $\check{X}$ admette un nombre fini de fibration π_1, ..., π_l globalement transverses entre elles (i.e. en tout point x de $\check{X}$ il existe au moins deux des fibrations qui sont transverses, i.e. la somme des images réciproques de la forme de Fubini-Study par ces fibrations est une métrique kählérienne). Il suffit alors de montrer que l'étude des courants de Nevanlinna associés à $\check{f}$ est suffisante.

Soit r_i une suite de rayons pour laquelle la suite $N(r_i, f)$ converge vers un courant positif fermé T (on a fixé une métrique hermitienne sur X de forme fondamentale κ et l'on mesure les aires grace à cette forme). Fixons une métrique hermitienne de forme $\check{\kappa}$ sur $\check{X}$; on dispose alors de deux familles de courants sur $\check{X}$, d'une part la suite des courants de Nevanlinna de $\check{f}$ mesurée à l'aide de la métrique $\check{\kappa}$, d'autre part la famille de courants :

$$\check{N}(r, f) : \alpha \mapsto \frac{1}{T(r, f)} \int_1^r \int_{\check{f}(\mathbb{D}_r)} \alpha \frac{dt}{t},$$

où $T(r, f)$ est calculé sur X, par rapport à κ, de sorte que l'image directe de $\check{N}(r, f)$ par ϵ est égale à $N(r, f)$. Si le rapport

$$\frac{T_{\check{\kappa}}(r_i, \check{f})}{T(r_i, f)}$$

n'est pas borné c'est qu'il existe une sous-suite de $N(r_i, \check{f})$ convergeant vers un courant positif de $\check{S}$, non fermé a priori, de masse unité pour $\check{\kappa}$ et valant 0 en évaluation sur $\epsilon^*\kappa$. Cette dernière propriété signifie que le courant est à support dans les diviseurs exceptionnels de l'éclatement. D'après la remarque 2.4, ce phénomène est impossible. On peut donc extraire une suite convergente de la famille $N(r_i, \check{f})$ dont la limite $\check{T}$ est un courant sur $\check{X}$ qui est fermé et se projette sur un multiple non nul de T. La laminarité de $\check{T}$ montre que T est laminaire en dehors des points de l'éclatement. Puisque ceux-ci sont arbitraires, T est partout laminaire.

Le théorème 4.4 est donc maintenant complètement démontré et nous allons pouvoir l'appliquer à l'étude des courants T^+ et T^-

5. Feuilles instables et courant T^+

Comme précédemment, ϕ est un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie est strictement positive. Les résultats obtenus jusqu'ici permettent de donner une description satisfaisante de la structure locale et globale des courants dilatés par ϕ. Ce sont des courants d'intégration sur les variétés stables ou instables des points périodiques hyperboliques. Étant fermés, ce sont donc des courants *laminaires fermés*. Ils admettent localement *des potentiels continus* et sont *d'auto-intersection nulle*. Il s'agit donc de courants *fortement laminaires*. Ils sont en outre *extrémaux* parmi les courants positifs fermés et uniquement déterminés par la donnée de l'automorphisme qui les dilate.

Nous allons maintenant appliquer ces propriétés pour fournir deux procédés de construction du courant T^+ qui généralisent ceux présentés au paragraphe 2.3.

5.1. **Variétés instables.**

Soit ν une mesure de probabilité ϕ-invariante qui est ergodique et dont l'entropie est strictement positive. Nous avons déjà expliqué au paragraphe 2.3 que ν est hyperbolique au sens de Katok : elle admet un unique exposant de Lyapunov strictement positif et un unique exposant strictement négatif, chacun d'entre-eux étant de multiplicité réelle égale à 2. Les variétés stables et instables sont des surfaces de Riemann et presque toutes sont paramétrées par des courbes entières injectives [42], [3]. Certaines de ces feuilles instables peuvent être contenues dans des courbes algébriques ; c'est le cas pour l'exemple 0.1 : chacune des 16 courbes nodales provenant de la désingularisation de la surface de Kummer contient une variété instable de l'automorphisme. Ce phénomène est cependant très rare :

Lemme 5.1. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie est strictement positive. Il n'existe alors qu'un nombre fini de points hyperboliques (au sens de Pesin) dont la variété instable est contenue dans une courbe algébrique.*

Démonstration. Supposons que E soit une courbe algébrique irréductible contenant une variété instable. Puisque T^+ est à potentiels continus et s'obtient par intégration sur une autre variété instable, nécessairement disjointe de celle contenue dans E, $[T^+].[E] = 0$. En particulier, E est une courbe rationnelle lisse, i.e. une courbe nodale, donc $[E]^2 = -2$.

Soit W le sous-espace de $\mathrm{H}_{1,1}(X;\mathbb{R})$ engendré par les points à coordonnées entières situés dans l'orthogonal de $[T^+]$. Puisque $[T^+]$ est à coordonnées irrationnelles, la forme d'intersection est définie négative sur W. Si E_1 et E_2 sont deux courbes nodales orthogonales à T^+, alors $([E_1] + [E_2])^2$ est négatif et $[E_1]^2 = [E_2]^2 = -2$, donc $[E_1].[E_2] \leq 2$. Il s'ensuit facilement que les classes d'homologie des courbes nodales orthogonales à T^+ sont en nombre fini.

Chacune de ces courbes étant déterminée par sa classe d'homologie, elles sont en nombre fini et, quitte à remplacer ϕ par l'une de ses puissances, on peut supposer qu'elles sont chacunes ϕ-invariantes. Si E est l'une de ces courbes et si E contient une variété instable, alors ϕ est une homographie hyperbolique de la courbe rationnelle E. En particulier, E ne contient que 2 points réguliers hyperboliques : les deux points fixes de $\phi_{|E}$. En effet, pour tous les autres points de E, la variété stable coïncide avec la variété instable, i.e. avec la courbe E elle-même ; ce ne sont donc pas des points de Pesin. $\square$

Puisque la mesure ν est sans atome, ces points sont donc négligeables et nous les négligerons. L'ensemble des points restant sera noté Λ_ν. L'union Λ des Λ_ν lorsque ν décrit toutes les mesures de ce type sera appelé "ensemble des points réguliers hyperboliques". Pour tout point x de Λ, la variété instable de x est donc paramétrée par $\mathbb{C}$ et n'est contenue dans aucune courbe algébrique.

Théorème 5.2. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie n'est pas nulle. Soit x un point de Λ et $f : \mathbb{C} \to X$ un paramétrage de sa feuille instable. Si C est un courant fermé adhérent à la suite*

$$N(r, f) : \alpha \mapsto \frac{1}{T(r, f)} \int_0^r \left(\int_{f(\mathbb{D}_t)} \alpha \right) \frac{dt}{t},$$

alors C coïncide avec T^+.

Démonstration. Le courant C est un courant positif fermé laminaire. Il coupe en outre toute courbe algébrique positivement (lemme 2.6) ce qui permet d'affirmer que sa classe d'homologie est dans l'adhérence du cône de Kähler (§1.2).

Les disques constituant le courant C ne coupent jamais transversalement ceux constituant T^+, car deux feuilles instables distinctes sont disjointes. Comme T^+ est à potentiel continu, on en déduit ([3], §8) que

$$\int_X T^+ \wedge C_i = 0$$

pour tout courant uniformément laminaire C_i contenu dans C. Ceci entraîne $[T^+].[C] = 0$. Puisque $[C]$ est adhérent au cône de Kähler, $[C]$ est donc proportionnel à $[T^+]$ et l'on conclut grace au théorème 2.4. □

5.2. **Image directe de courants positifs.**

Avant de continuer rappelons la construction du produit de deux courants positifs à potentiels continus. Le but du jeu est de démontrer le théorème 5.3, théorème qui est analogue au résultat principal de [4] mais dont la preuve nécessite des arguments distincts.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X, C un courant positif fermé dans $\mathcal{U}$, et T un courant positif fermé donné par un potentiel continu u dans $\mathcal{U}$. On définit alors le produit de T et C par la formule $T \wedge C = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(uC)$, ce qui détermine une mesure positive sur $\mathcal{U}$. Si $\psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction lisse à support compact on posera :

$$\psi T \wedge C = T \wedge \psi C := \psi(T \wedge C).$$

C'est évidemment une mesure positive.

Lorsque C est un courant positif (non fermé) et ψ une fonction positive lisse à support compact vérifiant $\mathrm{Support}(\psi) \cap \mathrm{Support}(\partial C) = \emptyset$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant le support de ψ sur lequel C est fermé. Ceci permet de définir le produit $T \wedge \psi C$ comme ci-dessus. Bien entendu, cette construction ne dépend pas du choix de $\mathcal{U}$.

Lorsqu'on veut faire le produit de T avec un courant défini sur tout X, il suffit ensuite d'utiliser des partitions de l'unité.

Théorème 5.3. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface $K3$ projective dont l'entropie topologique est strictement positive. Soient C et ψ comme ci-dessus et c la masse totale de la mesure positive $T^- \wedge \psi C$. Soit (C_n) la suite de courants positifs définie par :*

$$C_n = \frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)_*(\psi C).$$

La suite (C_n) tend alors faiblement vers cT^+.

Exemple 5.1. 1. – On peut choisir initialement un courant C fermé et $\psi \equiv 1$. Si $C = T^-$ on obtient $c = 0$ et $C_n \rightharpoonup 0$. Si C est le courant associé à une forme de Kähler alors $c > 0$.

2.– Si C est un disque d'une feuille instable contenant un point régulier hyperbolique on obtient $c > 0$: c'est ce qu'affirme le corollaire 5.4.

Démonstration. La preuve de ce théorème est relativement élémentaire. Tout d'abord, on montre que C_n est une suite de courants de masse bornée, puis que toute valeur d'adhérence est fermée. Ensuite, il faut voir que les valeurs d'adhérence coïncident avec T^+. Pour cela, le théorème 2.4 permet de travailler directement en homologie.

Montrons que la suite de courants C_n est une suite de courants de masse bornée. Soit F la fonction continue, κ la métrique kählérienne et E le fibré principal qui sont construits à la proposition 3.4. Il faut évaluer $\mathbf{M}[C_n] = \langle C_n \mid \kappa\rangle = \langle \psi C \mid (1/\lambda^n)(\phi^n)^*\kappa\rangle$. Pour cela, on fixe un courant $\overline{C}$ défini sur l'espace total du fibré principal E et se projetant sur C. Il suffit alors de montrer que la suite

$$\left\langle \psi\overline{C} \mid \frac{1}{\lambda^n}(\Phi_E^n)^*\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}F\right\rangle = \left\langle \overline{C} \mid \psi\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\left(\frac{1}{\lambda^n}F\circ\Phi_E^n\right)\right\rangle$$

est majorée. Mais $\overline{C}$ est fermé sur le support de ψ, donc

$$\left\langle \psi\overline{C} \mid \frac{1}{\lambda^n}(\Phi_E^n)^*\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}F\right\rangle = \left\langle \overline{C} \mid \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\psi)\,\frac{1}{\lambda^n}F\circ\Phi_E\right\rangle.$$

et la conclusion résulte de la proposition 3.4 affirmant que la suite de fonctions $(1/\lambda^n)F\circ\Phi_E^n$ est uniformément majorée.

Montrons maintenant que toute valeur d'adhérence de la suite C_n est fermée. La preuve est facile et se trouve déjà dans [4] (lemme 1.2) et [37] (Appendice). Soit β une 1-forme lisse et ψ_0 une fonction lisse, positive, égale à 1 au voisinage du support de ψ et nulle au voisinage du support de ∂C. Puisque C est fermé au voisinage du support de ψ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|\langle C_n|d\beta\rangle| &= \frac{1}{\lambda^n}|\langle C|d\psi\wedge(\phi^n)^*\beta\rangle| \\
&= \frac{1}{\lambda^n}|\langle \psi_0 C|d\psi\wedge(\phi^n)^*\beta\rangle| \\
&\leq \frac{1}{\lambda^n}\,\langle\psi_0 C|d\psi\wedge d\overline{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}\,\langle\psi_0 C|(\phi^n)^*(\beta\wedge\overline{\beta})\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}^n}\,\langle\psi_0 C|d\psi\wedge d\overline{\psi}\rangle^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{M}[\frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)_*\psi_0 C]^{\frac{1}{2}}\quad \|\beta\wedge\overline{\beta}\|^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{M}[\frac{1}{\lambda^n}(\phi^n)_*\psi_0 C]^{\frac{1}{2}}$ est bornée (utiliser le même argument que pour la suite de courants C_n), on obtient $\langle C_n|d\beta\rangle = 0$.

Soit (C_{n_i}) une sous-suite de (C_n) convergeant vers un courant C_∞. D'aprés l'étape précédente, C_∞ est fermé ce qui permet de considérer sa classe d'homologie $[C_\infty]$. La suite de mesures $\frac{1}{\lambda^{n_i}}T^\pm\wedge(\phi^{n_i})_*(\psi C)$ converge vers la mesure $T^\pm\wedge C_\infty$ donc

$$[C_\infty].[T^\pm] = \lim_{n_i\to+\infty}\left(\int_X \frac{1}{\lambda^{n_i}}T^\pm\wedge(\phi_i^n)_*(\psi C)\right) = \lim_{n_i\to+\infty}\left(\int_X \frac{1}{\lambda^{n_i}}(\phi^{-n_i})_*T^\pm\wedge(\psi C)\right).$$

Les propriétés de contraction et dilatation vérifiée par T^+ et T^- entraînent alors les relations $[C_\infty].[T^+] = 0$ et $[C].[T^-] = c$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{C}_\infty$ des valeurs d'adhérence de la suite (C_n) est un compact dont la projection dans $H_2(X,\mathbb{R})$ vérifie les propriétés suivantes : $[\mathcal{C}_\infty].[T^+] = 0$, $[\mathcal{C}_\infty].[T^-] = c$ et $\frac{1}{\lambda}\phi_*[\mathcal{C}_\infty] = [\mathcal{C}_\infty]$.

Soit A l'espace affine des éléments $[h]$ de $H_2(X,\mathbb{R})$ vérifiant les équations $[h].[T^+] = 0$ et $[h].[T^-] = c$. Dans A, $\frac{1}{\lambda}\phi_*$ est une contraction de centre cT^+, donc tout compact $\frac{1}{\lambda}\phi_*$-invariant est réduit au singleton $\{cT^+\}$. Ceci s'applique à $[\mathcal{C}_\infty]$ et achève la preuve du théorème car T^+ est déterminé par sa classe d'homologie. $\square$

Corollaire 5.4. *Soit ν une mesure de probabilité ϕ-invariante qui est ergodique et dont l'entropie est strictement positive ; ν-presque tout point x vérifie alors la propriété suivante.*

Soit Δ un ouvert de la feuille instable de x contenant x dans son intérieur. Si ψ est une fonction positive lisse dont le support est un voisinage de x qui ne rencontre pas le bord de Δ, alors la suite de courant

$$\frac{1}{\lambda}\phi_*^n(\psi\Delta)$$

converge vers un multiple non nul de T^+.

Remarque 5.1. Soit Δ un disque holomorphe de X : on sait définir, pour toute fonction lisse positive ψ à support disjoint de $\partial\Delta$, une mesure positive $T^-\wedge(\psi\Delta)$. Si ψ_1 est majorée par ψ_2 alors

$$T^-\wedge(\psi_1\Delta)\leq T^-\wedge(\psi_2\Delta)$$

au sens des mesures positives. Le supremum de ces mesures pour ψ décrivant l'ensemble des fonctions positives lisses majorées par un et à support ne rencontrant pas $\partial\Delta$ est donc une mesure positive que nous noterons $T^-\wedge\Delta$.

Démonstration. D'après le théorème 5.3, il faut seulement établir le fait suivant :

Fait. *Il existe un ensemble ν-négligeable en dehors duquel la propriété suivante est vraie : tout point hyperbolique admet une feuille instable paramétrée par $\mathbb{C}$ et tout voisinage Δ de ce point dans cette feuille vérifie*

$$\int_X T^-\wedge\Delta>0.$$

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des points x de X hyperboliques pour ϕ (au sens de Pesin) et dont la feuille instable contient un ouvert Δ_x centré en x et vérifiant :

$$\int_X T^-\wedge\Delta_x=0. \tag{8}$$

Puisque $\mathcal{B}$ est invariant et ϕ dilate les variétés instables, presque tout point de $\mathcal{B}$ contient dans sa feuille instable un disque arbitrairement grand satisfaisant l'équation (8).

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des points dont la feuille instable permet de construire T^+. Cet ensemble est également invariant et le théorème 5.2 montre que $\nu(\mathcal{G})=1$ pour toute mesure hyperbolique invariante. Comme $[T^+].[T^-]>0$ on en déduit que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{B}$ ne se rencontrent que sur un ensemble négligeable. En corollaire $\nu(\mathcal{B})=0$ et le résultat annoncé est démontré. $\square$

6. Applications à la dynamique

Dans cette partie, ϕ désigne toujours un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie est strictement positive. Le but est d'appliquer les techniques développées dans les parties précédentes pour décrire la dynamique de ϕ de manière probabiliste : quelles sont les mesures invariantes d'entropie maximale, comment se répartissent les points périodiques et les points périodiques hyperboliques, peut on calculer les exposants de Lyapunov ? La mesure μ définie au paragraphe 3.3 va jouer un rôle central dans la réponse à ces questions.

6.1. La mesure μ est mélangeante.

Théorème 6.1. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie est strictement positive. La mesure μ associée à ϕ est alors mélangeante ; c'est donc une mesure ergodique pour ϕ.*

Soient f et g deux fonctions μ-intégrables. La propriété de mélange signifie que :

$$\int_X f(\phi^n(x))g(x)\,d\mu(x) \to \int_X f\,d\mu \int_X g\,d\mu.$$

Pour l'établir, il suffit bien sûr de se restreindre aux fonctions lisses à support compact arbitrairement petit. Le cas général s'obtient ensuite par continuité et linéarité de l'opérateur $f \mapsto f \circ \phi$.

Démonstration (cf. [37]*, page 146).* Soient f et g deux fonctions lisses. Comme $\mu = T^+ \wedge T^-$, on peut écrire :

$$\int_X (f \circ \phi^n)\,g\,d\mu \;=\; \langle T^+ \wedge T^- \mid (f \circ \phi^n)\,g \rangle = \langle (gT^+) \wedge T^- \mid f \circ \phi^n \rangle,$$

et, puisque T^- est contracté par l'automorphisme ϕ, il vient

$$\int_X (f \circ \phi^n)\,g\,d\mu \;=\; \langle \frac{1}{\lambda^n}\phi_*^n(gT^+) \wedge T^- \mid f \rangle.$$

On peut supposer que les supports de f et g sont suffisamment petits pour qu'il existe deux ouverts les contenant sur lesquels T^+ et T^- sont donnés par des potentiels continus u^+ et u^-. La définition du produit de deux courants à potentiel continu fournit alors l'égalité :

$$\int_X (f \circ \phi^n)\,g\,d\mu \;=\; \langle \frac{1}{\lambda^n}\phi_*^n(gT^+) \mid u^- \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} f \rangle.$$

D'après le théorème 5.3 la suite de courants $\frac{1}{\lambda^n}\phi_*^n(gT^+)$ converge vers $(\int_X g d\mu)T^+$. En passant à la limite on obtient donc le résultat annoncé :

$$\int_X (f \circ \phi^n)\,g\,d\mu \to \int_X g\,d\mu \int_X f\,d\mu.$$

□

Nous allons maintenant décrire les propriétés dynamiques satisfaites par cette mesure. Nous verrons successivement que μ est d'entropie maximale, que c'est la seule mesure ergodique d'entropie maximale, qu'elle admet une structure produit locale, et, finalement, que c'est une mesure de Bernoulli pour laquelle les points périodiques sont équidistribués.

Rappelons que toutes ces propriétés sont satisfaites par la mesure construite de manière analogue pour les automorphismes polynomiaux du plan affine complexe et que c'est justement pour obtenir ces résultats que nous avons généralisé les techniques utilisées pour l'étude des automorphismes du plan.

Les méthodes qui sont employées dans la suite de cette partie sont standards et ne surprendront pas les spécialistes de systèmes dynamiques.

6.2. Entropie de la mesure μ.

Théorème 6.2. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface $K3$ projective dont l'entropie topologique est strictement positive. La mesure μ associée à ϕ est alors l'unique mesure de probabilité ϕ-invariante d'entropie maximale.*

Ce théorème correspond au théorème 3.1 de [3] ; la preuve que nous allons présenter est d'ailleurs la même : utilisée à plusieurs reprises, c'est maintenant un “classique” en systèmes dynamiques (cf. [13] paragraphe 3.4 et [28]).

Remarque 6.1. D'après le théorème de Newhouse [32], tout difféomorphisme d'une variété compacte admet au moins une mesure d'entropie maximale. Le résultat précédent est donc un théorème d'unicité. Il montre au passage que μ a une entropie strictement positive, ce qui était attendu.

• **Rappels de théorie ergodique.** Avant de commencer la preuve du théorème 6.2, faisons quelques rappels concernant l'entropie métrique.

Soit ν une mesure ϕ-invariante hyperbolique, par exemple une mesure ergodique d'entropie maximale. Par définition, une partition de X est une famille d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints dont l'union est de mesure totale pour ν. Par exemple, les variétés instables de ϕ forment une partition de X, appelée “partition instable”. Si ξ est une partition et x est un point de X, nous noterons $\xi(x)$ l'élément de ξ contenant x. Pour la partition instable, $\xi(x)$ est la variété instable $W^{ins}(x)$ contenant x.

Une partition est dite mesurable lorsque ses éléments sont les lignes de niveau d'une application mesurable $m\colon X \to \mathbb{R}$. La partition instable n'est en général pas mesurable ; pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas d'un automorphisme Anosov linéaire sur un tore.

Une partition ξ_1 est dite plus fine qu'une partition ξ_2 si $\xi_1(x)$ est contenu dans $\xi_2(x)$ pour presque tout x ; on dit encore que ξ_1 est subordonnée à ξ_2. On dit que ϕ dilate une partition ξ si la partition $\phi^*(\xi)$ constituée des $\phi^{-1}(\xi(x))$ est plus fine que ξ. Ceci signifie que $\phi(\xi(x))$ contient $\xi(\phi(x))$ pour presque tout x.

Proposition 6.3 (Pesin, Ledrappier-Young). *Il existe une partition mesurable ξ^{ins} qui est dilatée par ϕ, subordonnée à la partition instable et vérifie :*

1) La partition la moins fine subordonnée à toutes les $(\phi^n)^*\xi^{ins}$ est la partition discrète.

2) Pour ν-presque tout point x, $\xi^{ins}(x)$ est un voisinage de x dans $W^{ins}(x)$ et

$$\bigcup_{n\geq 0} \phi^n\left(\xi^{ins}(\phi^{-n}(x))\right) = W^{ins}(x).$$

Une telle partition s'appelle une "partition de Pesin dilatée" adaptée à ν.

Une partition mesurable ξ subordonnée à la partition instable étant fixée, on peut désintégrer ν par rapport à ξ ce qui fournit pour chaque plaque $\xi(x)$ une mesure de probabilité conditionnelle $\nu_{\xi(x)}$. Une dérivation de Radon-Nikodym permet alors de définir le facteur de dilatation de ϕ le long de ξ :

$$\mathrm{Jac}_\xi^{ins}(\phi, x) = \frac{d\phi^*\nu_{\xi(\phi(x))}}{d\nu_{\xi(x)}}.$$

Puisque ν est ϕ-invariante ce nombre est constant le long de chacune des classes de $\phi^*\xi$ et vaut

$$\mathrm{Jac}_\xi^{ins}(\phi, x) = \frac{\nu_{\xi(x)}(\xi(x))}{\nu_{\xi(x)}(\phi^{-1}(\xi(\phi(x))))} = \frac{1}{\nu_{\xi(x)}(\phi^{-1}(\xi(\phi(x))))}.$$

Théorème 6.4 (Rohlin-Parry). *Avec les notations précédentes, l'entropie de la partition ξ vaut :*

$$h_\xi(\phi, \nu) = \int_X \log\left(Jac_\xi^{ins}(\phi, x)\right) d\nu(x).$$

En particulier, lorsque ξ est dilatée et d'entropie maximale, on obtient l'entropie métrique de ϕ en moyennant les Jacobiens $Jac_\xi^{ins}(\phi, x)$.

Remarque 6.2. La donnée d'une partition mesurable ξ et des mesures conditionnelles $\nu_{\xi(x)}$ suffit pour reconstruire ν lorsque celle-ci est ergodique. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer le théorème ergodique. D'après ce théroeème, on sait en effet que la suite de mesures $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\phi^k(x)}$ tend faiblement vers ν pour presque tout point x ; en moyennant par rapport à $\nu_{\xi(x)}$, le théorème de convergence dominée permet donc de conclure :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_*^k\nu_{\xi(x)}\right) = \nu.$$

Pour étudier une mesure invariante, il suffit ainsi de comprendre ses conditionnelles le long d'une partition mesurable : cette remarque est particulièrement utile et va nous servir dès maintenant pour établir le théorème 6.2.

• **Préliminaires et preuve du théorème 6.2.** Soit ν une mesure d'entropie maximale pour l'automorphisme ϕ et ξ^{ins} une partition de Pesin dilatée qui lui est adaptée ; il se trouve alors que T^- intersecte ν-presque toute plaque $\xi^{ins}(x)$ strictement positivement : c'est le contenu du corollaire 5.4. Désignons par $\{\xi^{ins}(x)\}$ le courant d'intégration sur $\xi^{ins}(x)$, et notons $\rho(x)$ la masse totale de la mesure positive $T^-\wedge\{\xi^{ins}(x)\}$. Puisque $\rho(x)$ est strictement positif, on peut définir une mesure de probabilité $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ en posant

$$\eta^-_{\xi^{ins}(x)} = \frac{1}{\rho(x)}T^-\wedge\{\xi^{ins}(x)\}.$$

Le point important, c'est que l'on peut retrouver μ à partir de ν-presque toutes les $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ en extrayant une sous-suite convergente de la suite $(\phi^n)_*\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$. Ce résultat, évident si l'on se contente d'un calcul formel

$$(\phi^n)_*\left(T^-\wedge\{\xi^{ins}(x)\}\right)=T^-\wedge\frac{1}{\lambda^n}\left\{\phi^n\xi^{ins}(x)\right\}\longrightarrow\rho(x)\mu,$$

est justifié par le paragraphe 5.2.

Démonstration du Théorème 6.2, [3]. D'après le théorème de Newhouse il existe au moins une mesure ergodique d'entropie maximale ν. Nous allons montrer qu'une telle mesure coïncide automatiquement avec μ. Il suffit d'établir $\nu_{\xi^{ins}(x)}\equiv\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ pour ν-presque tout point, car dans ce cas la remarque 6.2 et les préliminaires entraînent

$$\nu=\lim_{n\to\infty}\phi^n_*\nu_{\xi^{ins}(x)}=\lim_{n\to\infty}\phi^n_*\eta^-_{\xi^{ins}(x)}=\mu.$$

Dilatation des mesures $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$.– Chaque mesure $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ est une mesure de probabilité supportée par la plaque $\xi^{ins}(x)$ et, puisque ξ^{ins} est dilatée, on peut définir les Jacobiens

$$\mathrm{Jac}^{ins}_{\eta^-}(\phi,x)=\frac{1}{q(x)},$$

où $q(x)=\eta^-_{\xi^{ins}(x)}(\phi^{-1}(\xi^{ins}(\phi(x))))$. Ce nombre est relié aux intersections $\rho(x)$ de T^- avec $\{\xi^{ins}(x)\}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}q(x)&=\int_{\phi^{-1}(\xi^{ins}(\phi(x)))}\frac{1}{\rho(x)}T^-\wedge\{\xi^{ins}(x)\}\\&=\frac{1}{\rho(x)}\int_{\xi^{ins}(\phi(x))}\phi_*\left(T^-\wedge\{\xi^{ins}(x)\}\right)\\&=\frac{1}{\rho(x)}\frac{1}{\lambda}\int_{\xi^{ins}(\phi(x))}T^-\wedge\{\phi(\xi^{ins}(x))\}\\&=\frac{1}{\rho(x)}\frac{1}{\lambda}\rho(\phi(x))\end{aligned}$$

car $\phi(\xi^{ins}(x))$ contient $\xi^{ins}(\phi(x))$. Finalement :

$$\log\left(\mathrm{Jac}^{ins}_{\eta^-}(\phi,x)\right)=\log(\lambda)+\log(\rho(x))-\log(\rho(\phi(x)),$$

ce qui signifie par définition que $\log\left(\mathrm{Jac}^{ins}_{\eta^-}(\phi,x)\right)$ est cohomologue à la fonction constante $\log(\lambda)$. Puisque les Jacobiens qui entrent en jeu sont tous minorés par 1, on peut appliquer le lemme 3.5 de [28], ce qui donne :

$$\int_X-\log(q)d\nu=\log(\lambda). \tag{9}$$

Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé que ν est d'entropie maximale : seules l'invariance et l'hyperbolicité ont été employées, ce qui est normal puisque les fonctions $q(x)$ et $\mathrm{Jac}^{ins}_{\eta^-}(\phi,x)$ ne dépendent pas de ν.

Application de la formule de Rohlin-Parry.— Puisque l'entropie de ν est maximale, elle est égale à $\log(\lambda)$ et la formule de Rohlin-Parry s'écrit :

$$\int_X -\log(p(x))\, d\nu(x) = \log(\lambda) \tag{10}$$

où $p(x)$ est l'inverse du Jacobien conditionnel $\mathrm{Jac}_\nu^{ins}(\phi, x)$ et vaut donc :

$$p(x) = \nu_{\xi^{ins}(x)}(\phi^{-1}(\xi^{ins}(\phi(x)))).$$

Des formules (9) et (10) on tire déjà $\int_X \log(q/p)d\nu = 0$. Montrons que ceci force l'égalité $q(x) = p(x)$ en ν-presque tout point x. Pour cela, on commence par remarquer que p et q sont constantes sur les classes de la partition $\phi^*\xi^{ins}$; en restreignant l'étude à une plaque $\xi^{ins}(x)$ et en choisissant un point z_i dans chacune des classes de $\phi^*\xi^{ins}$ contenues dans $\xi^{ins}(x)$ on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\xi^{ins}(x)} \frac{q(z)}{p(z)}\, d\nu_{\xi^{ins}(x)}(z) &= \sum_i \frac{q(z_i)}{p(z_i)} \int_{\phi^{-1}(\xi^{ins}(\phi z_i))} d\nu_{\xi^{ins}(x)} \\ &= \sum_i \frac{q(z_i)}{p(z_i)}\, p(z_i) \\ &= 1\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à ν et en utilisant la définition des mesures conditionnelles on obtient donc $\int_X q/p\, d\nu = 1$. Puisque $\int_X \log(q/p)d\nu = 0$, la concavité du logarithme entraîne $q(x) = p(x)$ pour ν-presque tout point x.

Conclusion.— L'étape précédente montre que $\nu_{\xi^{ins}(x)}$ et $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ affectent la même masse aux plaques de la partition $\phi^*\xi^{ins}$. En reprenant tout avec ϕ^n à la place de ϕ, cette méthode montre que $\nu_{\xi^{ins}(x)}$ et $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$ coïncident sur les partitions $(\phi^n)^*\xi^{ins}$: comme ces partitions sont de plus en plus fines et engendrent la partition discrète (cf. 6.3) on obtient l'égalité entre $\nu_{\xi^{ins}(x)}$ et $\eta^-_{\xi^{ins}(x)}$. Ceci termine la preuve du théorème. □

6.3. **Structure produit dans les boîtes de Pesin ; applications.**

D'après le paragraphe précédent, l'entropie métrique $\mathrm{h}(\phi, \mu)$ de ϕ par rapport à μ est maximale, donc strictement positive. Il existe ainsi une partition de Pesin dilatée de mesure totale pour μ. Nous allons maintenant décrire les conditionnelles de μ le long d'une telle partition en utilisant les techniques du paragraphe précédent.

• **Boîtes de Pesin.** Si x est un point ϕ-hyperbolique, nous noterons $W^{ins}(x)$ sa variété instable ; si $\mathcal{U}$ est un ouvert de X, la composante connexe de $W^{ins}(x) \cap \mathcal{U}$ contenant x sera notée $W^{ins}_{\mathcal{U}}(x)$ et appelée "variété instable locale de x". Les notations seront similaires pour la variété stable $W^{st}(x)$.

Si $\mathcal{U}$ est un bidisque, i.e. si $\mathcal{U}$ est biholomorphe à $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$, nous dirons que $W^{ins}_{\mathcal{U}}(x)$ est un graphe horizontal si c'est le graphe d'une application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. De même, $W^{st}_{\mathcal{U}}(x)$ est un graphe vertical si c'est l'image d'un graphe par permutation des coordonnées de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

Une boîte de Pesin est la donnée d'un bidisque $\mathcal{U}$ plongé dans X et d'un compact K contenu dans $\mathcal{U}$ vérifiant :

• $\forall x \in K, W_{\mathcal{U}}^{ins}(x)$ et $W_{\mathcal{U}}^{st}(x)$ sont respectivement un graphe horizontal et un graphe vertical,

• $\forall x, y \in K, W_{\mathcal{U}}^{ins}(x) \cap W_{\mathcal{U}}^{st}(y)$ est un singleton qui est contenu dans K.

Les variétés stables et instables des points de K déterminent donc chacune une lamination de $\mathcal{U}$; nous les noterons respectivement K^{ins} et K^{st}.

Par définition, la mesure d'une boîte de Pesin est la mesure $\mu(K)$ du compact K. D'après les travaux de Pesin (voir aussi [42] et [2]), il existe une famille dénombrable de boîtes de Pesin $(\mathcal{U}_i, K_i)$ qui ont toutes une mesure strictement positive et dont l'union des K_i est de mesure totale pour μ.

• **Structure produit.** Si $(\mathcal{U}, K)$ est une boîte de Pesin, et x est un point de K, nous noterons $T_K^{ins}(x)$ le sous-ensemble compact de $W_{\mathcal{U}}^{ins}(x)$ constitué des points $W_{\mathcal{U}}^{ins}(x) \cap W_{\mathcal{U}}^{st}(y)$, y décrivant K. Si l'on définit $T_K^{st}(x)$ similairement, le compact K est alors homéomorphe au produit $T_K^{ins}(x) \times T_K^{st}(x)$.

Soit $T^+_{|_{K^{ins}}}$ la restriction de T^+ à la lamination K^{ins} et $T^-_{|_{K^{st}}}$ celle de T^- à K^{st}. Ces deux courants sont des cycles feuilletés pour les laminations instables et stables de K, autrement dit, il existe une mesure μ_K^+ transverse à la lamination instable K^{ins} telle que :

$$\forall\, \alpha \in \Lambda^{1,1}(X) \quad T^+_{|_{K^{ins}}}(\alpha) = \int \int_{W_{\mathcal{U}}^{ins}(x)} \alpha \, d\mu_K^+(x).$$

Cette mesure s'identifie, via holonomie, à n'importe laquelle des $(T^+ \wedge \{W_{\mathcal{U}}^{st}(x)\})_{|_K}$. Elle peut être obtenue à partir d'une feuille instable $f : \mathbb{C} \to X$ de la manière suivante. On commence par choisir un rayon $R \gg 1$ puis l'on somme les mesures de Dirac δ_z aux points z de $f(\mathbb{D}_R) \cap W_{\mathcal{U}}^{st}(x)$. Ensuite on divise la mesure obtenue $\sum \delta_z$ par l'aire de $f(\mathbb{D}_R)$. À la limite, quand R tend vers l'infini, on obtient une mesure dont la restriction à $T_K^{st}(x)$ coïncide avec μ_K^+ (cf. partie 4).

Si la mesure de la boîte $(\mathcal{U}, K)$ est strictement positive, la restriction μ_K de μ à K est une mesure non nulle donnée par la formule

$$\mu_K = \left(T^+_{|_{K^{ins}}} \wedge T^-_{|_{K^{st}}} \right)_{|_K}.$$

Puisque, dans K, chaque variété stable locale $W^{st}(y)$ coupe chaque variété instable $W^{ins}(x)$ en un unique point, la mesure μ_K est une mesure produit dans les boîtes de Pesin :

$$\mu_K = \mu_K^+ \otimes \mu_K^-.$$

Ce que nous avons appelé boîtes de Pesin correspond dans [34] à la notion de bloc hyperbolique ; en utilisant les résultats présentés aux pages 86 et 87 de cet article on obtient donc la propriété suivante :

Théorème 6.5. *Soit ϕ un automorphisme d'une surface K3 projective dont l'entropie est strictement positive. La mesure d'entropie maximale μ est alors une mesure de probabilité ϕ-invariante qui est Bernoulli.*

Pour ce qui est des automorphismes des surfaces K3, nous avons donc répondu par l'affirmative à la conjecture faite par Ornstein et Weiss : la dynamique est Bernoulli pour la mesure naturelle qui lui est associée (cf. [34], page 22).

• **Points périodiques et exposants de Lyapnov.** La mesure μ jouit des trois propriétés fondamentales suivantes :

• μ est mélangeante,

• l'entropie de μ est maximale,

• μ est un produit dans les boîtes de Pesin.

À cela, on peut ajouter une propriété qui résulte de la formule des points fixes de Lefschetz :

• $\sharp\mathrm{Fixe}(\phi, n) \leq C\,\exp(\mathrm{h}(\phi,\mu)n)$ où $\mathrm{Fixe}(\phi, n)$ désigne l'ensemble des points fixes de ϕ^n et C est une constante.

Ces quatre propriétés sont suffisantes pour obtenir l'équidistribution des points périodiques de ϕ vis-à-vis de la mesure μ. L'hypothèse d'holomorphie n'est d'ailleurs plus nécessaire, les méthodes étant maintenant valables pour n'importe quel difféomorphisme $C^{1+\epsilon}$ d'une variété compacte (avec μ hyperbolique ce qui ici est un corollaire des deux premières propriétés).

Théorème 6.6. *Soit $Per(\phi, n)$ l'ensemble des points périodiques de période n exactement, $HPer(\phi, n)$ le sous-ensemble de ceux qui sont hyperboliques et $Fixe(\phi, n)$ l'ensemble des points fixes de ϕ^n. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda^n} \sum_{p\in P_n} \delta_p \right\} = \mu$$

dès que P_n est l'un quelconque de ces trois ensembles.

Théorème 6.7. *Si $\chi^+(p)$ désigne l'exposant de Lyapunov du point périodique hyperbolique p et χ^+ l'exposant de Lyapunov de la mesure μ alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda^n} \sum_{p\in HPer(\phi,n)} \chi^+(p)\} \right\} = \chi^+.$$

Autrement dit, pour calculer χ^+ il suffit de regarder aux points périodiques.

Nous ne montrerons pas ces deux théorèmes car maintenant les preuves sont en tout point identiques à celles de [2]. Contentons nous de quelques commentaires. L'argument essentiel pour mener à bien les démonstrations s'appelle le "shadowing lemma". Dans la version nécessaire au cadre de ce texte, il a été démontré par A. Katok au début des années quatre-vingts (cf. [22] et [23]). Ce lemme permet de construire des points fixes en utilisant la récurrence des boîtes de Pesin. Pour obtenir les théorèmes, il faut suivre la construction avec un point de vue quantitatif : c'est ce que permet la structure produit.

7. Complexité de la dynamique

Nous allons maintenant montrer que les automorphismes des surfaces K3 ne vérifient aucune hypothèse d'hyperbolicité uniforme classique. Au passage, nous établirons le théorème 0.2.

7.1. **Dynamique Anosov et Axiome A.**

Les automorphismes des surfaces complexes compactes dont la dynamique est de type Anosov ont été classifiés par Ghys [15]. Le théorème principal concernant cette question est le suivant :

Théorème 7.1 (Ghys). *Soit X une surface complexe compacte et $\phi : X \to X$ un automorphisme. Si ϕ est un difféomorphisme d'Anosov alors X est un tore et ϕ est donc une transformation affine.*

Bien sûr, ceci ne classifie pas complètement les automorphismes d'Anosov : il faut ensuite faire la liste des réseaux de $\mathbb{C}^2$ dont le tore associé admet un tel automorphisme et la liste des automorphismes d'Anosov d'un tel tore. Ce travail a été effectué par Ghys et Verjovsky [17].

Corollaire 7.2. *La dynamique d'un automorphisme d'une surface K3 n'est jamais de type Axiome A.*

Démonstration. Un difféomorphisme Axiome A qui préserve une forme volume est un difféomorphisme d'Anosov. Puisque les automorphismes des surfaces K3 préservent tous une forme volume et qu'aucune surface K3 n'est un tore, le théorème 7.1 termine la preuve. □

On dispose cependant d'exemples sur les surfaces de Kummer pour lesquels la dynamique est presque Anosov. Rappelons en la construction. On part d'un tore complexe A muni d'un automorphisme linéaire Φ dont la dynamique est Anosov. Puisque cet automorphisme est linéaire, il commute avec l'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ et induit donc un automorphisme ϕ de la surface de Kummer X_A. L'automorphisme Φ préserve deux feuilletages holomorphes partout transverses entre eux : le feuilletage stable $\mathcal{F}_A$ et le feuilletage instable $\mathcal{G}_A$. Lorsque l'on désingularise le quotient de A par σ pour construire X_A, les deux feuilletages deviennent tangents le long des diviseurs exceptionnels de la résolution et y admettent chacun une singularité. L'automorphisme ϕ préserve ainsi deux feuilletages holomorphes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui ont des singularités isolées et sont tangents le long d'un diviseur. La dynamique est donc semblable à celle des automorphismes pseudo-Anosov de Thurston pour les surfaces réelles compactes.

7.2. **Automorphismes pseudo-Anosov.**

• **Définition de Thurston.** Soit S une surface réelle, compacte, orientable et connexe. Un difféomorphisme pseudo-Anosov est un homéomorphisme ϕ de S qui est lisse en dehors d'un nombre fini de points $p_1, ..., p_k$ et vérifie les propriétés suivantes. Sur le complémentaire des p_i, il existe deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ lisses, transverses entre eux et invariants par ϕ. Ces feuilletages sont munis d'une mesure transverse équivalente à la mesure de Lebesgue et il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\begin{aligned} \phi_*\mu_{\mathcal{F}} &= \lambda\,\mu_{\mathcal{F}} \\ \phi_*\mu_{\mathcal{G}} &= \frac{1}{\lambda}\,\mu_{\mathcal{G}}, \end{aligned}$$

où $\mu_{\mathcal{F}}$ (resp. $\mu_{\mathcal{G}}$) est la mesure associée à $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$). En outre, la topologie des feuilletages et la dynamique de ϕ sont imposées au voisinage des singularités : à chaque p_i est associé un entier positif n_i et un voisinage $\mathcal{U}_i$ difféomorphe au disque $\mathbb{D}$ sur lequel $\mathcal{F}$ est donné par les lignes de niveau de $\mathrm{Im}(z^{\frac{n_i}{2}+1})$ et $\mathcal{G}$ par celles de $\mathrm{Re}(z^{\frac{n_i}{2}+1})$ [1] ; dans la coordonnée multivaluée $z \in \mathbb{D}$, ϕ est une transformation $\mathbb{R}$-linéaire dilatant l'horizontale et contractant la verticale

Remarque 7.1. En prenant $n_i = -1$ on tombe sur une configuration semblable au cas $n_i \geq 0$ mais évitée par cette définition. Un exemple de ce type apparaît lorsqu'on construit l'analogue réel des surfaces de Kummer. Plus précisément, le difféomorphisme de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ associé à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ commute à l'involution $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ et en passant au quotient on obtient une dynamique de type pseudo-Anosov sur la sphère, avec $n_i = -1$ aux quatre points de ramification.

Remarque 7.2. On peut reformuler la définition précédente des difféomorphismes pseudo-Anosov en disant qu'il existe une métrique plate à singularités coniques aux points p_i pour laquelle $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux feuilletages géodésiques qui sont respectivement dilaté par λ et contracté par $1/\lambda$ sous l'action de ϕ [40].

• **Dynamique des pseudo-Anosov.** Les difféomorphismes pseudo-Anosov jouissent de propriétés dynamiques tout à fait remarquables. Ils minimisent l'entropie topologique dans leur classe d'isotopie et admettent une unique mesure d'entropie maximale $\mu = \mu_{\mathcal{F}} \otimes \mu_{\mathcal{G}}$. Ceci n'est pas sans rappeler certaines des propriétés des automorphismes des surfaces complexes et l'on peut même obtenir un petit dictionnaire.

pseudo-Anosov	automorphismes
• feuilletages mesurés $(\mathcal{F},\mu_{\mathcal{F}})$, $(\mathcal{G},\mu_{\mathcal{G}})$, • entropie minimale $\log(\lambda)$ dans la classe d'isotopie du difféomorphisme, • l'entropie s'évalue sur le π_1, • $\mu = \mu_{\mathcal{F}} \otimes \mu_{\mathcal{G}}$, • $\mathrm{h}(\mu,\phi)=\log(\lambda)$, • points périodiques μ-équirépartis.	• courants positifs T^+, T^-, • entropie minimale $\log(\lambda)$ dans la classe d'isotopie de ϕ, • l'entropie se calcule sur $H_2(X,\mathbb{R})$, • $\mu = T^+ \wedge T^-$, • $\mathrm{h}(\mu,\phi)=\log(\lambda)$, • points périodiques μ-équirépartis.

Jusqu'où peut-on pousser cette analogie ? On pourrait penser par exemple que T^+ et T^- sont toujours des courants d'intégration le long de feuilletages stables et instables. C'est ce qui se produit dans le cas des surfaces de Kummer qui

1. $\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Re}(z)$ désignent respectivement la partie imaginaire et la partie réelle de z.

admettent des automorphismes provenant du tore. Dans ce cas $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux feuilletages holomorphes tangents sur un diviseur.

• **Automorphismes pseudo-Anosov.** Pour poursuivre cette analogie, introduisons maintenant une notion d'automorphisme pseudo-Anosov.

Définition 7.1. Soit $\phi : X \to X$ un automorphisme d'une surface K3 dont l'entropie topologique est strictement positive. On dit que ϕ est un automorphisme pseudo-Anosov s'il existe deux feuilletages continus à singularités isolées $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ tels que :

(i) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont transverses en dehors d'un diviseur D de X.

(ii) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont uniformément dilatés et contractés en dehors de D.

Remarque 7.3. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc le feuilletage instable de ϕ. En particulier, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des courbes holomorphes et $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{G}) = 2$.

Cette définition mérite quelques commentaires. Puisque l'entropie de ϕ est strictement positive, et puisque D est ϕ-invariant, la forme d'intersection est définie négative en restriction au sous-espace de $S_X \otimes \mathbb{R}$ engendré par les composantes irréductibles de D. On peut donc contracter chaque composante connexe de D ce qui détermine une surface singulière Y. La propriété (ii) signifie par définition que, en dehors de ses singularités, Y est munie d'une métrique riemannienne vérifiant :

a.- la topologie définie par cette métrique coïncide avec celle de Y.

b.- pour cette métrique, $\mathcal{F}$ est uniformément dilaté et $\mathcal{G}$ est uniformément contracté par ϕ.

On a donc simplement plagié la définition des difféomorphismes pseudo-Anosov à l'aide des métriques à singularités coniques (remarque 7.2).

L'hypothèse (i) peut sembler moins naturelle. Cependant, il faut à la fois admettre deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui puissent être tangents entre eux, car sinon on se priverait de l'exemple des surfaces de Kummer, et supposer que le lieu de tangence D n'est pas trop sauvage. On doit donc tout d'abord supposer que D est invariant par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que D contient toute feuille qui le coupe, car sinon D serait transverse à une feuille de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire à une variété instable de ϕ, et s'accumulerait sur l'ensemble α-limite de tous les points de cette feuille. D'après la remarque 7.3, l'ensemble D est donc constitué de courbes holomorphes qui, si elle n'étaient pas compactes, s'accumuleraient non trivialement. Nous les avons donc supposées compactes, ce qui revient à dire que D est un diviseur.

Remarque 7.4. 1.– Soit D_i une composante connexe du diviseur des tangences, alors D_i est un diviseur connexe d'une surface K3 sur lequel la forme d'intersection est définie négative. Chacune de ses composantes irréductibles est donc une courbe nodale, i.e. une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2. En corollaire, la singularité obtenue en contractant D_i est une singularité de Klein dont le diagramme de Dynkin est de type A_n, D_n, E_6, E_7, ou E_8 ([1], pages 12 à 16). Il existe ainsi un voisinage de la singularité qui est isomorphe au quotient d'un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe fini G_i de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. L'automorphisme ϕ se relève à ce voisinage et présente un point fixe hyperbolique en l'origine.

2.– La notion d'automorphisme pseudo-Anosov s'avère différente de celle introduite par Thurston pour les difféomorphismes des surfaces. Dans le cas pseudo-Anosov classique, le modèle local au niveau des singularités est un quotient de ce qui a lieu sur la surface. Ici, c'est le contraire, on quotiente localement $\mathbb{C}^2$ par un groupe fini pour obtenir ce qui a lieu sur la surface. Une autre différence provient du phénomène d'Hartogs : un difféomorphisme qui est holomorphe en dehors d'un nombre fini de points est partout holomorphe. À l'inverse, les difféomorphismes pseudo-Anosov ne sont jamais différentiables aux singularités.

• **Holomorphie des feuilletages stables et instables.** Dans le théorème 7.1, les feuilletages stable et instable de ϕ ne sont pas supposés holomorphes ; on sait seulement, a priori, que ces deux feuilletages sont transversalement continus avec des feuilles lisses difféomorphes à $\mathbb{R}^2$. La première étape consiste en fait à montrer que ces feuilletages sont holomorphes. Ici, le même phénomène se produit :

Proposition 7.3 (Ghys). *Les feuilletages stable $\mathcal{G}$ et instable $\mathcal{F}$ d'un automorphisme pseudo-Anosov sont des feuilletages holomorphes à singularités isolées.*

Démonstration. Soient x et y deux points d'une même feuille stable et $h : U_x^{ins} \to U_y^{ins}$ l'holonomie entre deux petits ouverts transverses contenus dans les variétés instables (i.e. dans les feuilles de $\mathcal{F}$). Si U_x^k désigne $\phi^k U_x^{ins}$ et U_y^k désigne $\phi^k U_y^{ins}$ alors la distance de Hausdorff entre U_x^k et U_y^k tend vers zéro quand k tend vers l'infini. La variété Y est en effet recouverte par un nombre fini d'ouverts dans lesquels les feuilletages stables et instables $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont donnés par $y = \mathrm{c^{ste}}$ et $x = \mathrm{c^{ste}}$ (modulo un groupe fini $G_i \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$) et ϕ contracte uniformément l'axe des y. En travaillant dans chaque carte on conclut facilement.

La preuve fournit par Ghys dans [15] s'applique donc mot pour mot. □

Pour étudier les automorphismes pseudo-Anosov on peut donc désormais supposer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont holomorphes. On est alors en présence d'un automorphisme d'entropie strictement positive fixant deux feuilletages holomorphes.

7.3. Classification des automorphismes pseudo-Anosov.

Nous allons maintenant établir le théorème suivant, dont l'énoncé ne contient plus aucune hypothèse dynamique.

Théorème 7.4. *Si $\phi : X \to X$ est un automorphisme d'une surface $K3$ qui est d'ordre infini et préserve deux feuilletages holomorphes distincts, alors X est une surface de Kummer et ϕ provient d'une transformation affine de $\mathbb{C}^2$.*

Remarque 7.5. 1.– Les automorphismes des surfaces de Kummer ne sont pas tous induits par des automorphismes du tore associé [24]. Ce théorème comporte donc deux énoncés en un : il décrit la surface mais aussi l'automorphisme.

2.– En fait l'entropie topologique de ϕ doit être strictement positive car un twist de Dehn ne préserve qu'un seul feuilletage, à savoir la fibration elliptique qui lui est associée [8].

Corollaire 7.5. *Si $\phi : X \to X$ est un automorphisme pseudo-Anosov d'une surface $K3$, alors X est une surface de Kummer et ϕ provient d'une transformation affine de $\mathbb{C}^2$.*

Démonstration du théorème. La preuve détaillée est assez longue et nous allons procéder par étapes.

Le lieu de tangence.– Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les deux feuilletages invariants et D le diviseur des tangences. On peut supposer, quitte à remplacer ϕ par l'une de ses puissances, que chaque composante irréductible de D est ϕ-invariante. Nous noterons $D_1, ..., D_k$ les composantes connexes de D et $E_1^j, ..., E_{n_j}^j$ les composantes irréductibles de D_j. Le diviseur $\sum_i E_i^j$ sera noté $\overline{D_j}$ et appelé support de D_j. Nous avons déjà signalé à la remarque 7.4 que les diviseurs $\overline{D_j}$ sont tous obtenus par résolution minimale d'une singularité de Klein $(\mathbb{C}^2, 0)/G_j$, où G_j est un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Autrement dit, si l'on contracte D_j, il existe un voisinage de la singularité qui est isomorphe à la singularité $(\mathbb{C}^2, 0)/G_j$, et si l'on désingularise ce point avec le minimum d'éclatements on construit $\overline{D_j}$ [27].

Au voisinage de $\overline{D_j}$, les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux feuilletages holomorphes partout transverses sauf le long de $\overline{D_j}$. Contractons $\overline{D_j}$ puis rapatrions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$; les feuilletages obtenus sont partout transverses sauf peut-être en l'origine : ils sont donc lisses et partout transverses. Par un changement de coordonnées holomorphe, on peut donc supposer que $\mathcal{F}$ est $y = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ et $\mathcal{G}$ est $x = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$.

Dans ces nouvelles coordonnées, G_j devient un groupe fini de biholomorphismes a priori non linéaires qui préservent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et l'origine. On peut en fait linéariser G_j dans un voisinage de l'origine sans perturber les équations de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Pour cela, suivant Bochner-Cartan, il suffit d'utiliser l'application linéarisante :

$$h(x, y) = \frac{1}{|G_j|} \sum_{g \in G_j} dg_{(0,0)}^{-1} \circ g(x, y).$$

Cette transformation préserve $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et redresse G_j en un groupe linéaire fini qui préserve simultanément les feuilletages $x = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ et $y = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$. C'est donc un groupe cyclique car les autres groupes de Klein permutent ces deux feuilletages.

La métrique méromorphe d'Avez.– Sur une surface K3 il existe une 2-forme holomorphe partout non nulle Ω qui est quasiment invariante par ϕ : $\phi^*\Omega = \xi\Omega$ où ξ est un complexe de module 1 (cf. §1.1).

À l'aide de Ω et du couple de feuilletages $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ on peut construire une forme quadratique méromorphe Q quasiment invariante. Cette construction est dûe à Avez : si v est un vecteur tangent à X on décompose $v = v_{\mathcal{F}} + v_{\mathcal{G}}$ en deux vecteurs tangents respectivement à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$; par définition, la valeur de Q sur v est alors l'aire $\Omega(v_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}})$ du parallélogramme $(v_{\mathcal{F}}, v_{\mathcal{G}})$. Ceci détermine un champ de formes quadratiques Q qui est méromorphe le long du diviseur des tangences D et est non dégénéré partout ailleurs. Puisque, $\phi^*Q = \xi\, Q$, sa courbure R_Q est une fonction méromorphe quasiment invariante ; si cette fonction n'est pas constante, le pinceau de ses lignes de niveau est ϕ-invariant, ce qui est impossible car l'entropie topologique de ϕ est strictement positive (cf. remarque 7.5). La courbure est donc une constante et l'on peut la normaliser :

$$R_Q \equiv 0 \text{ ou } 1.$$

Lorsque la courbure est nulle, il existe des coordonnées locales au voisinage de chaque point de $X \setminus D$ dans lesquels Q s'identifie à la forme quadratique $dx.dy$ sur $\mathbb{C}^2$ (métrique plate). Lorsque la courbure est égale à 1, le modèle local est $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \setminus Diag$ et le champ de formes quadratiques est

$$\frac{dx.dy}{(x-y)^2}.$$

La courbure est nulle.– Considérons la surface Y obtenue en contractant le support de D : c'est une surface singulière, avec k singularités isolées, qui, en dehors des singularités, est munie d'un champ de formes quadratiques holomorphe non dégénéré et à courbure constante. Autour de chaque singularité, Y est le quotient d'un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe fini cyclique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Supposons par l'absurde que la courbure est égale à 1. Soit p_j l'un des points singuliers de Y et G_j le sous-groupe cyclique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ associé. On peut relever Q à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ et l'étendre jusqu'à l'origine en un champ de formes quadratiques G_j-invariant et de courbure constante égale à 1 (extension de Hartogs). Il existe alors des coordonnées locales identifiant cet ouvert à un ouvert de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \setminus Diag$ dans lesquelles Q correspond à la forme $dx.dy/(x-y)^2$. Le groupe G_j agit sur cet ouvert en préservant la forme quadratique, en ayant un point fixe et en envoyant verticale sur verticale ($\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$) et horizontale sur horizontale ($\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}$). On en déduit sans peine que G_j est trivial.

La surface Y n'a donc en fait aucune singularité, ce qui signifie que les diviseurs D_j sont vides. Les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont donc partout transverses entre eux. En particulier, $\mathcal{F}$ n'a pas de singularité, ce qui est impossible car les feuilletages holomorphes des surfaces K3 sont tous singuliers (appliquer les formules de Baum-Bott en remarquant que la caractéristique d'Euler est égale à 24). Nous avons donc obtenu une contradiction qui montre que la courbure R_Q est nulle.

L'orbifold Y et l'application développante.– La surface Y peut être pensée comme une orbifold munie d'un champ de formes quadratiques Q dont la courbure est partout nulle.

D'après le chapitre 5 des notes de Thurston [39], il existe donc une variété complexe simplement connexe $\tilde{Y}$ et une application holomorphe $\pi : \tilde{Y} \to Y$ qui est un revêtement en dehors des singularités de Y et qui satisfait à la propriété suivante : si $y \in \tilde{Y}$ se projette sur une singularité p_j, il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de y tel que la projection $\pi : \mathcal{U} \to \pi(\mathcal{U})$ s'identifie au quotient de $\mathcal{U}$ par un groupe fini cyclique isomorphe à G_j. Ce groupe fini coïncide avec le groupe fondamental de $\pi(\mathcal{U}) \setminus \{p_j\}$.

En rapatriant $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et Q à l'aide de π, on munit donc simultanément la surface $\tilde{Y}$ d'une forme quadratique holomorphe $\tilde{Q}$ non dégénérée et à courbure identiquement nulle et de deux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ lisses, partout transverses entre eux et tangents aux cônes isotropes de $\tilde{Q}$.

Enfin, il existe ce qui s'appelle une application développante $\mathcal{D} : (\tilde{Y}, \tilde{Q}) \to (\mathbb{C}^2, dx.dy)$: cette application est holomorphe et c'est une isométrie locale qui envoie $\tilde{\mathcal{F}}$ sur les horizontales et $\tilde{\mathcal{G}}$ sur les verticales du modèle. Elle s'accompagne d'une représentation du groupe fondamental de Y dans le groupe d'isométries de M pour laquelle $\mathcal{D}$ est équivariante.

Y est revêtue par un tore.– Montrons que le groupe fondamental Γ de Y admet un sous-groupe d'indice fini Γ_o qui agit sans point fixe sur $\tilde{Y}$.

Pour parvenir à ce résultat, nous allons étudier la représentation d'holonomie du groupe Γ. Cette représentation est à valeurs dans le groupe des déplacements de $\mathbb{C}^2$ pour la métrique holomorphe $dx.dy$; puisque chacune de ces isométries doit préserver le feuilletage vertical (i.e. $\tilde{\mathcal{F}}$) et le feuilletage horizontal (i.e. $\tilde{\mathcal{G}}$), la partie linéaire de tous ces déplacements est une matrice diagonale de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Les parties linéaires sont donc des matrices du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et l'on obtient ainsi un morphisme de Γ dans $\mathbb{C}^*$. L'image de ce morphisme est un sous-groupe de type fini du groupe abélien $\mathbb{C}^*$ et contient donc un sous-groupe d'indice fini sans torsion dont l'image réciproque est un sous-groupe d'indice fini Γ_o de Γ. Les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ étant cycliques, le quotient Γ/Γ_o est un groupe cyclique.

Montrons par l'absurde que Γ_o convient, c'est-à-dire qu'il agit sans point fixe sur $\tilde{Y}$. Si tel n'était pas le cas, il existerait un élément γ de Γ_o différent de l'identité et ayant un point fixe $y \in \tilde{Y}$. L'application développante $\mathcal{D}$ fournirait une carte locale autour de y dans laquelle γ serait une transformation linéaire diagonale de $\mathbb{C}^2$ dont les valeurs propres, λ et $1/\lambda$, ne seraient pas des racines de l'unité car γ est d'ordre infini. Ceci est impossible car le quotient de la verticale par γ ne serait pas une variété et ne pourrait être une feuille instable de ϕ.

Le quotient A de $\tilde{Y}$ par Γ_o est une surface complexe compacte (car Γ_0 est d'indice fini dans Γ) avec deux feuilletages holomorphes lisses partout transverses et un automorphisme Φ d'entropie positive. Les formules de Baum-Bott montrent que A n'est ni une surface d'Enriques, ni une surface K3, ni une surface rationnelle. Cette surface est donc un tore (cf. Introduction).

X est une surface de Kummer.– Pour conclure, il faut juste montrer que la surface X est bien une surface de Kummer. La situation est la suivante : le tore A est muni d'un automorphisme d'Anosov linéaire Φ et la surface Y est le quotient de A par un groupe fini cyclique linéaire qui est normalisé par Φ. Il suffit donc d'appliquer le lemme suivant pour conclure. $\square$

Lemme 7.6. *Soit G un groupe fini cyclique agissant holomorphiquement sur un tore complexe de dimension 2 noté A. Supposons que G a un point fixe et qu'il préserve une 2-forme holomorphe non nulle sur A. Alors G est d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6. Si Φ est un automorphisme de A de type Anosov qui commute avec l'action de G alors G n'a que deux éléments.*

Démonstration. Au lieu de penser à A comme au quotient de $\mathbb{C}^2$ par un réseau, on peut y penser comme à la donnée d'une structure complexe sur $\mathbb{R}^4$, quotienté par le réseau canonique $\mathbb{Z}^4$. Un tel groupe G est donc formé de matrices de $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$ préservant une structure complexe sur $\mathbb{R}^4$. Dans cette structure complexe, tout générateur m de G correspond à une matrice d'ordre fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ qui peut être diagonalisée sous la forme

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

où ξ est une racine de l'unité. Cette racine ξ apparaît parmi les racines du polynôme caractéristique de la matrice $m \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$, ainsi que ξ^{-1}, mais ce sont évidemment les seules racines de ce polynôme. Le polynôme caractéristique de m est donc une puissance du polynôme minimal de ξ et est de degré quatre. On en déduit que ξ est d'ordre 6, 4, 3 ou 2, sauf si G est trivial.

Supposons maintenant que G est d'ordre 3, 4 ou 6, ce qui correspond exactement au cas où le générateur m n'est pas une homothétie et ne préserve que deux directions. Si Φ est un automorphisme d'Anosov de A qui commute à l'action de G, ses directions stables et instables doivent coïncider avec les directions invariantes par m. Elles s'expriment donc avec des coordonnées à valeurs dans $\mathbb{Q}[\xi]$. La valeur propre dilatante aussi : c'est donc un nombre réel irrationnel de $\mathbb{Q}[\xi]$, mais il n'existe pas de tels nombres lorsque ξ est d'ordre 3, 4, ou 6. □

Références

[1] Barth, Peters, and van de Ven. *Compact complex surfaces*. Springer-Verlag, 1984.

[2] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 114(2):277–288, 1993.

[3] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1):77–125, 1993.

[4] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.*, 294(3):395–420, 1992.

[5] Marco Brunella. Courbes entières et feuilletages holomorphes. *Enseign. Math.*, 45(1-2):195–216, 1999.

[6] Serge Cantat. *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*. Thèse de doctorat de l'É.N.S.-Lyon, 1999.

[7] Serge Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10):901–906, 1999.

[8] Serge Cantat. Sur la dynamique du groupe d'automorphismes des surfaces K3. *à paraître dans Transf. Groups*, 2000.

[9] Jean-Pierre Demailly. Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge. *Invent. Math.*, 69:347–374, 1982.

[10] Jean-Pierre Demailly. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math.*, 73:3–23, 1997.

[11] Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus, and Matei Toma. Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs. *C.R.A.S.*, 328, 1999.

[12] Adrien Douady. Prolongement de mouvements holomorphes (d'après Slodkowski et autres). *Astérisque*, 227:Exp. No. 775, 3, 7–20, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.

[13] Alexandre E. Eremenko and Mikhail Yu. Lyubich. The dynamics of analytic transformations. *Algebra i Annaliz*, 1(3):1–70, 1989.

[14] Akira Fujiki. On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 44(3):225–258, 1978.

[15] Étienne Ghys. Holomorphic Anosov systems. *Invent. Math.*, 119(3):585–614, 1995.

[16] Étienne Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. In *Dynamique complexe*, pages 49–95. Panoramas et Synthèses, S.M.F., 1999.

[17] Étienne Ghys and Alberto Verjovsky. Locally free holomorphic actions of the complex affine group. In *Geometric study of foliations (Tokyo, 1993)*, pages 201–217. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
[18] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry. 2nd ed.* Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1994.
[19] Mikhail Gromov. On the entropy of holomorphic map. *Manuscrit*, 1980.
[20] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1):321–365, 1994.
[21] Steven Hurder and Yoshihiko Mitsumatsu. Transverse Euler classes of foliations on nonatomic foliation cycles. In *Differential topology, foliations, and group actions (Rio de Janeiro, 1992)*, pages 29–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
[22] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 51:137–173, 1980.
[23] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza.* Cambridge: Cambridge University Press., 1997.
[24] Jong Hae Keum. Every algebraic Kummer surface is the K3-cover of an Enriques surface. *Nagoya Math. J.*, 118:99–100, 1990.
[25] Ahcène Lamari. Le cône kählérien d'une surface. *Jour. Math. pures et appl.*, 78(3):249–263, 1999.
[26] Serge Lang. *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer-Verlag, New York, 1987.
[27] Henry B. Laufer. *Normal two-dimensional singularities.* Princeton University Press, 1971.
[28] François Ledrappier. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Ergodic Theory Dynamival Systems*, 1(1):77–93, 1981.
[29] Pierre Lelong. Éléments extremaux sur le cône des courants positifs fermés. In *Sem. Pierre Lelong, Analyse, Annee 1971-1972, Lecture Notes Math.*, pages 112–131, Berlin, 1973. Springer.
[30] Barry Mazur. The topology of rational points. *Experiment. Math.*, 1(1):35–45, 1992.
[31] Rolf Nevanlinna. *Analytic functions*, volume 162. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970.
[32] Sheldon E. Newhouse. Entropy in smooth dynamical systems. In *Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. II, (1991).*, pages 1285–1294, 1991.
[33] Viacheslav V. Nikulin. Quotient-groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms by subgroups generated by 2-reflections. Algebro-geometric applications. In *Current problems in mathematics, Vol. 18*, pages 3–114. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981.
[34] D.S. Ornstein and B. Weiss. Statistical properties of chaotic systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, New Ser. 24(1):11–116, 1991.
[35] Séminaire Palaiseau. Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes. *Astérisque*, 126, 1985.
[36] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and I. R. Šafarevič. Torelli's theorem for algebraic surfaces of type K3. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:530–572, 1971.
[37] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$. In *Dynamique complexe*, pages 97–185. Panoramas et Synthèses, S.M.F., 1999.
[38] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, 36:225–255, 1976.
[39] William Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds.* Princeton University Lecture Notes, 1977.
[40] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2):79–94, 1986.

[41] Lan Wang. Rational points and canonical heights on $K3$-surfaces in $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, pages 273–289. Amer. Math. Soc., Providence, Ri, 1995.

[42] He Wu. Complex stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(4):1349–1358, 1993.

[43] Yosi Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3):285–300, 1987.