VERSION KÄHLÉRIENNE D'UNE CONJECTURE DE ROBERT J. ZIMMER

SERGE CANTAT

Résumé. Nous démontrons une conjecture de Robert J. ZIMMER dans le cas particulier des actions de réseaux par difféomorphismes holomorphes sur les variétés kählériennes compactes.

Abstract. Let M be a compact KÄHLER manifold. Let G be a connected simple real LIE group. Let Γ be a lattice in G. We prove the following : if the $\mathbf{R}$-rank of G is strictly larger than the complex dimension of M any morphism from Γ to the group of holomorphic diffeomorphisms of M has finite image. This is a particular case in a conjecture of Robert J. ZIMMER.

1. Introduction

Les travaux de Gregori A. MARGULIS permettent de comprendre les représentations linéaires des réseaux des groupes de LIE simples de rang réel strictement supérieur à 1 (*voir* [13], [15]). Dans [16], Robert J. ZIMMER propose de généraliser les travaux de MARGULIS au cadre des représentations non linéaires de réseaux. L'une des conjectures-phare du programme, attribuée à ZIMMER, est la suivante (*voir* [16], [17]).

Conjecture de Zimmer. Soit G un groupe de LIE réel simple connexe et Γ un réseau de G. S'il existe un morphisme d'image infinie de Γ dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte M, le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension de M.

Dans cet article, nous résolvons la conjecture de ZIMMER pour le cas particulier des actions holomorphes sur les variétés kählériennes compactes. Ce cas particulier de la conjecture de ZIMMER et les problèmes qu'il soulève nous avait été signalés par Étienne GHYS il y a quelques années. La stratégie globale de la preuve et une large part des arguments développés dans les pages suivantes lui sont dûs. Nous recommandons d'ailleurs la lecture de [9] pour le cas des

Date: December 12, 2003.

actions de réseaux sur le cercle et celle de [5] pour des considérations analogues à celles que nous développerons ici.

Théorème A. *Soit M une variété complexe compacte kählérienne et $Aut(M)$ le groupe de ses difféomorphismes holomorphes. Soit G un groupe de* LIE *réel, simple et connexe. Soit Γ un réseau de G. S'il existe un morphisme de Γ dans $Aut(M)$ dont l'image est infinie, le rang réel de G est inférieur ou égal à la dimension complexe de M.*

Remarque 1.1. L'inégalité sur le rang est plus forte que celle conjecturée par ZIMMER car elle concerne la dimension complexe de M, mais cette amélioration ne doit pas être considérée comme une surprise puisque l'action est holomorphe.

Outre les travaux de MARGULIS et ZIMMER, les points-clé de la démonstration du théorème A reposent sur

1. Les résultats de Salomon BOCHNER et Dean MONTGOMERY concernant la structure du groupe des automorphismes des variétés complexes compactes, couplés à ceux de Daniel LIEBERMAN concernant les variétés kählériennes.
2. Un résultat récent de Tien-Cuong DINH et Nessim SIBONY concernant les actions holomorphes de groupes commutatifs sur les variétés kählériennes compactes.

C'est le résultat de DINH et SIBONY qui, associé à un théorème de Gopal PRASAD et Madabusi S. RAGHUNATHAN, permet d'apporter la touche finale à la démonstration.

Remerciements. Un grand merci à Étienne GHYS pour m'avoir décrit, il y a quelques années, les difficultés et les stratégies liées à la conjecture de ZIMMER, puis pour le soutien qu'il m'a apporté lors de la rédaction finale de ce texte.

Mon intérêt pour la conjecture de ZIMMER dans un contexte holomorphe fut ravivé par les discussions que j'ai eues avec Francois LABOURIE lors du colloque pour les soixante ans d'Alberto VERJOVSKY. Merci à F. LABOURIE et aux organisateurs de ce colloque.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. **Exemples d'automorphismes.** Soit M une variété complexe compacte. Par définition, les automorphismes de M sont les difféomorphismes holomorphes de M ; ils forment un groupe noté Aut (M). Lorsque l'on munit ce groupe de la topologie de la convergence uniforme, le théorème de BOCHNER et MONTGOMERY montre que Aut (M) est un groupe de LIE complexe dont l'algèbre de LIE s'identifie à celle des champs de vecteurs holomorphes de M (*voir* [4]). Nous noterons Aut $(M)^0$ la composante connexe de l'identité et Aut $(M)^\#$ le quotient de Aut (M) par Aut $(M)^0$.

Il se peut que Aut $(M)^\#$ soit infini. C'est par exemple le cas pour une surface de ENRIQUES générique (*voir* [1]). Puisque toute la difficultée du théorème A provient justement de l'existence de tel groupes d'automorphismes, nous allons maintenant décrire quelques exemples explicites.

Soit M une hypersurface lisse de $(\mathbb{P}^1)^{k+1}$. Dans l'ouvert de ZARISKI $\mathbf{C}^{k+1}$, M est définie par une équation polynômiale

$$P(x_1, ..., x_{k+1}) = 0.$$

Supposons que le degré du polynôme P par rapport à chaque variable x_i soit égal à deux ; géométriquement, ceci signifie que chacune des projections

$$\pi_i : M \to (\mathbb{P}^1)^k$$

consistant à oublier l'une des $k+1$ coordonnées est un revêtement ramifié de degré deux. D'après la formule d'adjonction, cette condition est équivalente à l'existence d'une k-forme holomorphe sur M qui ne s'annule pas. Le théorème des sections hyperplanes de LEFSCHETZ montre alors que M est une variété de CALABI-YAU : la variété M est kählérienne, compacte, simplement connexe et son fibré canonique est trivial. Une telle variété ne possède jamais de champs de vecteurs holomorphes et Aut (M) est donc un groupe discret.

Puisque chacun des revêtements ramifiés π_i est de degré 2, nous disposons de $k+1$ involutions holomorphes sur M : chaque involution σ_i permute les points des fibres de π_i. Il se trouve que le groupe engendré par ces involutions est isomorphe au produit libre de $k+1$ copies de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Autrement dit, il n'y a pas de relation non triviale entre ces involutions. Une démonstration de ce fait est proposée dans [6] pour le cas des surfaces et celle-ci s'étend en dimension quelconque. Le groupe d'automorphismes ainsi construit contient donc un groupe libre sur une infinité de générateurs.

Lorsque k est égal à 2, la variété M est une surface K3 avec une infinité d'automorphismes. Les produits symétriques $M^{[r]}$ de cette surface fournissent alors des exemples de variétés symplectiques de dimension arbitraire avec de nombreux automorphismes.

Il existe aussi des exemples surprenants sur certaines variétés rationnelles : si l'on éclate le plan projectif en les dix points doubles d'une sextique rationnelle générique, on obtient une surface projective dont le groupe d'automorphismes est isomorphe au produit libre de dix groupes abéliens libres de rang huit (*voir* [10]).

Pour des exemples d'actions de réseaux dans des groupes de LIE de rang supérieur, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 3.1.

2.2. **Cohomologie et composante connexe de l'identité.** Tout automorphisme f d'une variété complexe compacte induit un isomorphisme f^* du groupe de cohomologie $H^*(M, \mathbf{Z})$. Cet isomorphisme préserve la structure de HODGE de $H^*(M, \mathbf{C})$. Lorsque M est une variété kählérienne, on dispose d'un critère cohomologique pour déterminer les automorphismes isotopes à l'identité (*voir* [12], prop. 2.2).

Théorème 2.1 (LIEBERMAN). *Soient M une variété complexe compacte kählérienne et F un sous-groupe de $Aut(M)$. Si F fixe une classe de* KÄHLER, *l'intersection de F avec $Aut(M)^0$ est un sous-groupe d'indice fini dans F.*

En particulier, si l'action de F sur la cohomologie de M est triviale, l'intersection de F avec $\mathrm{Aut}\,(M)^0$ est un sous-groupe d'indice fini dans F. Nous emploierons ce résultat au paragraphe 3.1. Ceci permettra de réduire la preuve du théorème A au cas des représentations à valeurs dans $\mathrm{Aut}\,(M)^0$.

2.3. **Variétés hyperkählériennes.** Une variété hyperkählérienne est une variété complexe compacte kählérienne qui est simplement connexe et qui possède une 2-forme holomorphe symplectique. La dimension complexe de la variété est donc paire, égale à $2d$, et il existe une 2-forme holomorphe Ω telle que la $2d$-forme $\wedge^d\Omega$ soit partout non nulle.

De nombreuses variétés de ce type possèdent un groupe d'automorphismes infini : c'est le cas, notamment, de certaines surfaces K3 et des produits symétriques associés (*voir* ci-dessus). Dans ce petit paragraphe, nous allons montrer directement le théorème A pour ce type de variétés. Ceci permettra d'illustrer et de préciser la démarche générale.

Proposition 2.2. *Soit M une variété hyperkählérienne. Soit G un groupe de* LIE *réel, simple et connexe dont le rang réel est supérieur ou égal à 2. Soit Γ un réseau de G. Tout morphisme de Γ dans $Aut(M)$ a une image finie.*

Démonstration. Reprenons les notations utilisées précédemment : M est la variété hyperkählérienne, Ω une 2-forme holomorphe symplectique et d est la moitié de la dimension de M. Il se trouve que la forme Ω est uniquement déterminée à un facteur multiplicatif près (*voir* [2]). En particulier, la forme $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ est préservée par Aut (M).

Soit q_M la forme quadratique qui, à chaque forme α de type $(1,1)$, associe la quantité

$$q_M(\alpha) = \int_M \alpha \wedge \alpha \wedge \left(\Omega \wedge \overline{\Omega}\right)^{d-1}.$$

Cette quantité ne dépend que de la classe de cohomologie de la forme α et détermine donc une forme quadratique sur $H^{1,1}(M, \mathbf{R})$. Il se trouve que la signature de cette forme est de type $(+, -, ..., -)$. Cette forme quadratique est invariante par l'action de Aut (M) car la décomposition de Hodge et la forme $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ le sont.

Soit maintenant G un groupe de Lie réel, simple, connexe et de rang réel supérieur ou égal à 2. Soit Γ un réseau de G. Le groupe Γ a donc la propriété (T) de Kazhdan et tout morphisme de Γ dans $\mathsf{SO}(1,n)$ a donc une image relativement compacte (*voir* [7], coro. 23, page 80).

Supposons que l'on dispose d'un morphisme de Γ vers le groupe Aut (M). Le principe de Bochner montre que Aut (M) est discret ; d'après le théorème 2.1, la proposition sera démontrée si nous montrons qu'un sous-groupe d'indice fini de Γ fixe une classe de Kähler. Pour cela, il s'agit d'étudier l'action de Γ sur $H^{1,1}(M, \mathbf{R})$. La remarque précédente et le calcul de la signature de q_M montrent que l'image de Γ dans $\mathsf{GL}(H^{1,1}(M, \mathbf{R}))$ est relativement compacte. Puisque les automorphismes de M préservent la structure entière de l'homologie de M, l'action de Γ sur $H^{1,1}(M, \mathbf{R})$ transite par un groupe fini. Il existe donc un sous-groupe d'indice fini dans Γ qui fixe une classe de Kähler. Ceci termine la démonstration. $\square$

2.4. **Un théorème de structure.** Nous aurons également besoin d'un théorème de structure pour Aut $(M)^0$ relatif au morphisme d'Albanese. Avant de l'énoncer, rappelons quelques faits standards.

Soit $H^0(M, \Omega^1)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales sur M. Lorsque M est kählérienne et compacte, ce que nous supposons ici, toutes les formes holomorphes globales sont fermées. Soit x un point de M. Pour chaque lacet γ basé en x, l'intégration le long de γ fournit une forme linéaire

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

sur l'espace $H^0(M,\Omega^1)$ qui ne dépend que de la classe d'homologie de γ. La théorie de HODGE montre que $H_1(M,\mathbf{Z})$ détermine ainsi un réseau cocompact du dual de $H^0(M,\Omega^1)$. L'espace quotient, noté $\mathsf{Alb}(M)$, est la variété d'ALBANESE de M.

Si y est un point de M, et si β est un chemin joignant x à y, l'intégration le long de β ne dépend que de y modulo des intégrales sur des lacets basés en x. Ce procédé définit donc une application holomorphe $\mathsf{a}_M : M \to \mathsf{Alb}(M)$, à savoir

$$\mathsf{a}_M(y) = \int_x^y .$$

Bien qu'elle dépende du choix d'un point base x, cette construction est équivariante sous l'action du groupe d'automorphismes de M : il existe une représentation $\rho : \mathrm{Aut}\,(M) \to \mathrm{Aut}\,(\mathsf{Alb}(M))$ telle que

$$\mathsf{a}_M \circ f = \rho(f) \circ \mathsf{a}_M$$

pour tout automorphisme f.

L'énoncé dont nous ferons usage est le suivant (*voir* [12], thm. 3.12).

Théorème 2.3 (LIEBERMAN). *Soient M une variété complexe compacte kählérienne et $\mathsf{Alb}(M)$ la variété d'ALBANESE de M. Le noyau de la représentation*

$$\rho : Aut(M)^0 \to Aut(\mathsf{Alb}(M))^0$$

est un groupe algébrique complexe linéaire dont le nombre de composantes connexes est fini.

Remarque 2.1. Le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathsf{Alb}(M))^0$ coïncide avec le groupe des translations de $\mathsf{Alb}(M)$. C'est donc un groupe abélien.

2.5. **Groupes commutatifs.** Dans [8], DINH et SIBONY démontrent le très joli théorème suivant.

Théorème 2.4 (DINH, SIBONY). *Soient M une variété complexe compacte kählérienne et A un sous-groupe abélien de $Aut(M)$. Si l'action de tout élément de $A \setminus \{id\}$ sur la cohomologie de M a un rayon spectral différent de 1, alors A est un groupe abélien libre dont le rang est strictement plus petit que la dimension complexe de M.*

La démonstration n'est pas difficile, mais elle utilise très astucieusement les inégalités de type HODGE-RIEMANN démontrées par Mickael GROMOV à la suite des travaux de Bernard TEYSSIER et Askold G. HOVANSKI (*voir* [11]).

Remarque 2.2. Le théorème que nous venons de citer n'est pas énoncé exactement sous cette forme dans [8]. Pour le déduire des résultats de Dinh et Sibony, il faut savoir qu'un automorphisme d'une variété kählérienne compacte a une entropie topologique strictement positive si, et seulement si son action sur la cohomologie de M possède une direction propre dilatée (*voir* [8] et les références qui s'y trouvent).

3. Démonstration du théorème A

Dans cette partie, M désigne une variété complexe compacte kählérienne, G un groupe de Lie réel, simple et connexe et Γ un réseau de G. Pour démontrer le théorème A, nous pouvons supposer, et nous le ferons, que le rang r_G de G est supérieur ou égal à 2. Les deux références principales que nous utiliserons sont [15] et [17] car elles présentent les résultats dans un contexte proche du notre. Le lecteur peut bien sûr consulter [13], notamment les énoncés reproduits en page 4.

3.1. **Action sur la cohomologie.**

Proposition 3.1. *S'il existe un morphisme $\rho : \Gamma \to Aut(M)$ tel que l'action induite sur la cohomologie de M ait une image infinie, le rang réel r_G est strictement plus petit que la dimension complexe de M.*

Démonstration. Soit C un sous-groupe de Cartan de G : le groupe C est un groupe de Lie abélien connexe de dimension r_G. D'après le théorème (2.8) de [14], il existe un élément g de G tel que gCg^{-1} intersecte Γ sur un groupe abélien libre de rang r_G, cocompact dans gCg^{-1}. Notons

$$\rho^* : \Gamma \to \mathsf{GL}(\mathrm{H}^*(M, \mathbf{Z}))$$

l'action de Γ sur la cohomologie de M. Puisque $\rho^*(\Gamma)$ est infini et préserve la structure entière de la cohomologie, $\rho^*(\Gamma)$ n'est contenu dans aucun sous-groupe compact de $\mathsf{GL}(\mathrm{H}^*(M, \mathbf{C}))$. Le théorème de rigidité de Margulis affirme alors que ρ^* s'etend en un morphisme de G (*voir* [15], chap.3, §6.6). Par équivariance de la décomposition de Jordan, l'image de gCg^{-1} par ce morphisme est constituée de matrices simultanément diagonalisables. Le groupe Γ contient donc un sous-groupe abélien libre de rang r_G dont les éléments agissent sur la cohomologie de M avec un rayon spectral strictement plus grand que 1. Le théorème de Dinh et Sibony montre alors que r_G est strictement inférieur à la dimension complexe de M. □

Corollaire 3.2. *Supposons que r_G est supérieur ou égal à la dimension complexe de M. Si $\rho : \Gamma \to Aut(M)$ est un morphisme de groupes, il existe un sous-groupe d'indice fini de Γ dont l'image par ρ est contenue dans $Aut(M)^0$.*

Démonstration. La proposition 3.1 montre que l'action de Γ sur la cohomologie de M a un noyau infini. Ce noyau Γ' est donc d'indice fini dans Γ (*voir* [15], §6.5). Le théorème 2.1 permet de conclure. □

Exemple 3.1. Soit Γ le groupe $\mathsf{SL}(n, \mathbf{Z})$, vu comme réseau du groupe $\mathsf{SL}(n, \mathbf{R})$. Soit Λ un réseau de $\mathbf{C}$ et E la courbe elliptique $\mathbf{C}/\Lambda$. Le groupe Γ agit linéairement sur $\mathbf{C}^n$ en préservant le réseau Λ^n. On obtient ainsi un morphisme injectif de Γ vers le groupe des automorphismes de la variété abélienne E^n. L'action induite au niveau de la cohomologie est fidèle et l'on se situe dans le cas limite de la proposition 3.1 car le rang de $\mathsf{SL}(n, \mathbf{R})$ est égal à $n - 1$.

Exemple 3.2. Le groupe $\mathsf{PSL}(n + 1, \mathbf{Z})$ s'injecte dans les automorphismes de l'espace projectif de dimension n. Ceci fournit un exemple pour le cas d'égalité dans le théorème A.

3.2. **Conclusion, première étape.** Supposons désormais que Γ est un sous-groupe de Aut $(M)^0$ et montrons que la dimension de M est supérieure au rang réel de G. Ceci terminera la preuve du théorème A.

Le groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ est d'indice fini dans Γ (*voir* [15], chap. 3, thm. 7.1). Ainsi, quitte à remplacer le réseau Γ par son groupe dérivé, le théorème 2.3 permet de supposer que Γ est contenu dans un groupe algébrique complexe linéaire L de Aut $(M)^0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que L est un sous-groupe algébrique semi-simple de $\mathsf{GL}(m, \mathbf{C})$, $m \in \mathbf{N}$, défini par des équations polynomiales à coefficients rationnels. Nous noterons

$$\tau : \Gamma \to \mathsf{GL}(m, \mathbf{C})$$

le plongement de Γ associé.

Si l'image $\tau(\Gamma)$ n'est pas un sous-groupe relativement compact de L, nous pouvons étendre ce morphisme à G de manière unique. Dans ce cas, L est un groupe algébrique complexe de rang supérieur à celui de G contenu dans Aut $(M)^0$ et l'inégalité

$$r_G \leq \dim_{\mathbf{C}}(M)$$

en découle (*voir* [16], [17] §3, ou encore [5], §3).

3.3. **conclusion, seconde étape.** Supposons désormais que $\tau(\Gamma)$ est un sous-groupe relativement compact de L. Quitte à conjuguer la représentation τ dans L, nous pouvons donc supposer que $\tau(\Gamma)$ est contenu dans le groupe unitaire $\mathsf{U}(n, \mathbf{C})$. Nous allons construire une nouvelle représentation de Γ dans $\mathrm{Aut}\,(M)^0$ dont l'image ne sera pas relativement compacte, ce qui terminera la démonstration via l'argument précédent. La méthode est classique : elle joue un rôle crucial dans l'alternative de TITS [3], le théorème 3.3 de [17] et le théorème 10.1 de [5].

Le groupe Γ étant un réseau dans le groupe connexe G, c'est un groupe de type fini (*voir* [15], chap. 1, §3.1). Fixons une partie génératrice finie S de Γ et notons $\mathcal{C}_\tau$ l'ensemble des coefficients des polynômes caractéristiques des matrices $\tau(\gamma)$, pour γ dans S. Nous noterons $k(\tau)$ le corps $\mathbf{Q}(\mathcal{C}_\tau)$ engendré par ces coefficients.

Lemme 3.3. *Le corps $k(\tau)$ est un corps de nombres.*

Remarque 3.1. Soit σ un élément du groupe de GALOIS $\mathsf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$. La représentation τ_σ obtenue en appliquant σ à tous les coefficients des matrices $\tau(\gamma)$ est une nouvelle représentation de Γ dans L, car L est défini par des équations à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Si λ est une valeur propre de $\tau(\gamma)$, alors $\sigma(\lambda)$ est une valeur propre de $\tau_\sigma(\gamma)$.

Démonstration du lemme. Si $k(\tau)$ n'est pas un corps de nombres, pour tout ϵ strictement positif, il existe un élément σ de $\mathsf{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{Q})$ tel que

(i) $\forall\, a \in \mathcal{C}_\tau, \quad |\sigma(a) - a| \leq \epsilon,$

(ii) $\exists\, a \in \mathcal{C}_\tau, \quad |\sigma(a) - a| > 0.$

Ceci permet de déformer la représentation τ en une représentation τ_σ arbitrairement proche de τ. En outre, la représentation τ_σ n'est pas conjuguée à τ car σ change les coefficients du polynôme caractéristique d'une des matrices $\tau(\gamma)$.

Le plongement de Γ dans L est localement rigide car, pour toute représentation ν de dimension finie en caractéristique nulle, le premier groupe de cohomologie de Γ à valeurs dans ν est nul (*voir* [15], chap. 3, §7.1). On ne peut donc pas déformer localement la représentation τ autrement que par conjugaison.

Juxtaposées, ces deux propriétés montrent alors que $k(\tau)$ est un corps de nombres. $\square$

Étant donné que $\tau(\Gamma)$ est un groupe de type fini infini, le lemme de SELBERG assure l'existence d'un élément $\tau(\gamma_0)$ d'ordre infini. La matrice $\tau(\gamma_0)$ étant dans

$\mathsf{U}(n, \mathbf{C})$, elle doit possèder une valeur propre λ qui n'est pas une racine de l'unité. Puisque λ est solution d'une équation polynomiale à coefficients dans $k(\tau)$, λ est un nombre algébrique, donc il existe un plongement α de $k(\tau)$ dans un corps local k' qui envoie λ sur un nombre de norme plus grande que 1. La remarque 3.1 permet de construire une nouvelle représentation $\tau_\alpha : \Gamma \to L(k')$ dont l'image n'est plus relativement compacte. Ceci assure que k' est archimédien , c'est-à-dire que k' coïncide avec $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (*voir* [17], chap. 3, §3.2 ou [13], p. 4, thm. 2'). Nous avons donc construit une nouvelle représentation de Γ dans L dont l'image n'est pas relativement compacte, ce qui termine la preuve du théorème A.

4. Compléments

4.1. **Raffinements.** Le théorème A et sa démonstration ont plusieurs corollaires immédiats. On peut d'abord étendre le résultat à des variétés projectives sur d'autres corps que celui des nombres complexes.

Théorème B. *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit M une variété projective lisse sur k. Soit G un groupe de* Lie *réel, simple et connexe. Soit Γ un réseau de G. Si le rang réel de G est strictement supérieur à la dimension de M, tout morphisme de Γ dans le groupe des automorphismes de M a une image finie.*

Démonstration. Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}\,(M)$ un morphisme. Le groupe Γ est un groupe de type fini car c'est un réseau dans G. Nous noterons $\gamma_1, ...\gamma_l$ un système de générateurs de Γ. L'ensemble des coefficients des polynômes qui définissent M et les $\rho(\gamma_i)$ engendrent une extension de type finie de $\mathbf{Q}$. Nous pouvons donc supposer que le corps k est une extension de type fini de $\mathbf{Q}$. Le corps k peut donc être plongé en un sous-corps de $\mathbf{C}$ et le théorème se déduit ainsi du théorème A. □

Remarque 4.1. Ce résultat me semble encore valable pour un corps de caractéristique positive, mais la démonstration nécessite d'étendre certains des théorèmes auxquels nous avons fait référence à un cadre plus général, ce que je ferai ultérieurement.

Il est également possible de généraliser le théorème A aux réseaux irréductibles de groupes semi-simples.

Théorème C. *Soit M une variété complexe compacte kählérienne de dimension complexe d. Soit G un groupe de* Lie *réel, semi-simple et connexe. Soit Γ un réseau irréductible de G.*

S'il existe un morphisme $\rho : \Gamma \to Aut(M)$ dont l'image est infinie, il existe un sous-groupe d'indice fini Γ' dans Γ sur lequel ρ est composé (i) du plongement de Γ' dans G, (ii) d'une surjection de G sur un groupe de Lie *G' de rang réel inférieur ou égal à d, (iii) d'une action de G' sur M par difféomorphismes holomorphes.*

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Il se déduit facilement de la démonstration présentée dans la partie précédente.

4.2. **Questions.** Peu de variétés kählériennes compactes sont susceptibles d'admettre un groupe d'automorphismes dont le nombre de composantes connexes est infini. Il est donc envisageable, et il serait intéressant, de classer les variétés complexes compactes de dimension d qui réalisent le cas d'égalité dans la proposition 3.1. On se donne donc un groupe de Lie réel, simple et connexe de rang réel $d-1$ et un réseau Γ de G. Il s'agit alors de classer les couples (M, ρ) où

(i) M est une variété complexe compacte kählérienne,
(ii) $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M)$ est un morphisme de groupes,
(iii) l'action de $\rho(\Gamma)$ sur la cohomologie de M ne transite pas par un groupe fini.

Il y a des exemples sur les tores et donc sur les variétés de Kummer qui s'en déduisent.

Si M est projective et possède une telle action de réseau, alors sa dimension de Kodaira vaut $-\infty$ ou 0, son premier groupe de cohomologie est un groupe de torsion ou son application d'Albanese est un isomorphisme, sa dimension algébrique est égale à d ou à 0, elle est rationnellement connexe (et donc simplement connexe) ou son fibré canonique est pseudo-effectif ... Toutes ces propriétés se déduisent facilement de résultats importants de géométrie algébrique complexe. Elles montrent que les deux cas principaux à étudier sont les variétés de Calabi-Yau et les variétés rationnellement connexes.

En conclusion, on peut dire qu'il serait intéressant de classer les variétés de Calabi-Yau de dimension 3 qui admettent une action holomorphe du groupe $\mathsf{SL}(3, \mathbf{Z})$. Le cas des variétés rationnellement connexes est également crucial, mais c'est sans doute le plus délicat : on ne sait toujours pas classer les surfaces rationnelles munies d'une action de $\mathbf{Z} \star \mathbf{Z}$.

References

[1] W. Barth and C. Peters. Automorphisms of Enriques surfaces. *Invent. Math.*, 73(3):383–411, 1983.

[2] A. Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4):755–782 (1984), 1983.

[3] Y. Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de Lie. *European Summer School in Group Theory*, pages 1–72, 1997.

[4] S. Bochner and D. Montgomery. Locally compact groups of differentiable transformations. *Ann. of Math. (2)*, 47:639–653, 1946.

[5] G. Cairns and É. Ghys. The local linearization problem for smooth $\mathrm{SL}(n)$-actions. *Enseign. Math. (2)*, 43(1-2):133–171, 1997.

[6] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Math.*, 187(1):1–57, 2001.

[7] P. de la Harpe et A. Valette. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). *Astérisque*, (175):158, 1989. Avec une annexe de M. Burger.

[8] T.-C. Dinh et N. Sibony. Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne. *Preprint, arXiv:math.DS/0212081*, pages 1–18, 2002.

[9] É. Ghys. Actions de réseaux sur le cercle. *Invent. Math.*, 137(1):199–231, 1999.

[10] M. H. Gizatullin. Rational G-surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1):110–144, 239, 1980.

[11] M. Gromov. Convex sets and Kähler manifolds. In *Advances in differential geometry and topology*, pages 1–38. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1990.

[12] D. I. Lieberman. Compactness of the Chow scheme: applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, pages 140–186. Springer, Berlin, 1978.

[13] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] G. Prasad and M. S. Raghunathan. Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups. *Ann. of Math. (2)*, 96:296–317, 1972.

[15] E. B. Vinberg, V. V. Gorbatsevich, and O. V. Shvartsman. Discrete subgroups of Lie groups [MR 90c:22036]. In *Lie groups and Lie algebras, II*, volume 21 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–123, 217–223. Springer, Berlin, 2000.

[16] R. J. Zimmer. Actions of semisimple groups and discrete subgroups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 1247–1258, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

[17] R. J. Zimmer. Lattices in semisimple groups and invariant geometric structures on compact manifolds. In *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, volume 67 of *Progr. Math.*, pages 152–210. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

Département de mathématiques, Université de Rennes, Rennes, France
E-mail address: cantat@maths.univ-rennes1.fr