GROUPES D'AUTOMORPHISMES POLYNOMIAUX DU PLAN

SERGE CANTAT AND STÉPHANE LAMY

ABSTRACT. We study the embeddings of lattices from simple LIE groups into the group of polynomial automorphisms of the affine plane.

1. INTRODUCTION

Quels sont les groupes de type fini qui agissent par transformations polynomiales sur le plan ? C'est à ce type de question que nous tenterons ici d'apporter quelques éléments de réponse. Bien sûr, nous ne considèrerons que certains groupes de type fini, notamment les réseaux des groupes de Lie simples connexes. Ceci est motivé par les conjectures de ZIMMER et les problèmes adjacents à ces conjectures. Mais nous étudierons aussi le cas des groupes de tresses d'ARTIN, des groupes modulaires et des groupes de BAUMSLAG-SOLITAR.

1.1. **Automorphismes polynomiaux.** Si k est un corps, le groupe $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ des automorphismes polynomiaux du plan affine k^2 contient deux sous-groupes importants : le groupe affine A et le groupe des automorphismes qui préservent le feuilletage de k^2 par droites affines horizontales. Ces automorphismes sont dits *élémentaires* et le groupe qu'ils forment est le *groupe élémentaire* E. D'après le théorème de JUNG - VAN DER KULK, $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ est le produit de A et de E amalgamé le long de leur intersection S.

La théorie de BASS-SERRE permet d'associer un arbre à cette structure de produit amalgamé et de plonger le groupe $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ dans le groupe des automorphismes simpliciaux de cet arbre. Les stabilisateurs des sommets sont conjugués dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ au groupe A ou au groupe E. Ainsi, lorsqu'un groupe G se plonge dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$, ou bien il agit sur un arbre sans fixer de sommet, ou bien il se plonge dans A ou E.

Ceci permet d'étudier les plongements des groupes de KAZHDAN et, par suite, des réseaux des groupes de Lie de rang réel supérieur ou égal à 2. En utilisant un résultat récent de SHALOM, nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème A. *Soit G un groupe de Lie réel simple et Γ un réseau de G. S'il existe un morphisme injectif $\rho : \Gamma \to Aut(\mathbf{C}^2)$, le groupe G est isomorphe à $\mathsf{PSO}(1,n)$ ou à $\mathsf{PSU}(1,n)$ pour un certain entier n ; de plus, si G est différent de $PSO(1,2)$ l'image de ρ est contenue dans un conjugué du groupe affine.*

Date: December 30, 2005.

Puisque le groupe $\mathsf{PSO}(1,2)$ est isomorphe à $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{R})$ il est facile de plonger des réseaux de ce groupe dans le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$, mais il est plus délicat de trouver des plongements dont l'image n'est pas conjuguée à un sous-groupe du groupe affine.

1.2. **Groupes fondamentaux de surfaces.** Soit Γ un réseau de $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{R})$. Il s'agit de savoir s'il existe des plongements de Γ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$ qui ne sont pas conjugués à un plongement dans le groupe affine.

Quitte à changer Γ en l'un de ses sous-groupes d'indice fini, le lemme de Selberg permet de supposer que Γ est un réseau sans torsion. Le quotient du disque de Poincaré par Γ est une surface close et orientable privée d'un nombre fini de points. Lorsque cette surface est compacte, Γ est donc isomorphe au groupe fondamental

$$\Gamma_g = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{i=g} [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

où g est le genre de la surface et $[a,b]$ désigne le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$ de a et de b. Lorsque la surface est privée de p points, avec $p \geq 1$, Γ est isomorphe au groupe libre F_k sur k générateurs, k étant égal à $2g+p-1$.

Avant de décrire des plongements de Γ_g ou F_k dans le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$, précisons le vocabulaire employé (*voir* le §2.1). Une transformation de Hénon généralisée est un automorphisme de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ P(y) - ax \end{pmatrix}$$

où P est un polynôme d'une variable dont le degré est supérieur ou égal à 2. Il se trouve que tout élément h de $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$ est conjugué à un élément de E ou à une composée d'applications de Hénon généralisées (*voir* [13]) ; nous dirons respectivement que h est de type élémentaire ou de type Hénon. De même, nous dirons que h est de type affine s'il est conjugué à un élément du groupe affine. D'après [24], il revient au même de dire que h est de type Hénon ou que l'entropie topologique de h, vue comme transformation continue de $\mathbf{C}^2$, est strictement positive. Par contre, un élément de $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$ peut être de type Hénon et être analytiquement conjugué à une translation de $\mathbf{R}^2$; de tels éléments développent donc une dynamique très riche sur $\mathbf{C}^2$ et très pauvre sur $\mathbf{R}^2$.

Proposition. *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un sous-groupe Γ de Aut$(\mathbf{R}^2)$ isomorphe au groupe libre F_k tel que :*

- *tout élément non trivial de Γ est un automorphisme de type Hénon ;*
- *tout élément de Γ est analytiquement conjugué à une translation ;*
- *Γ agit proprement discontinûment sur le plan $\mathbf{R}^2$.*

Cette proposition est démontrée dans la partie 4 et le théorème suivant est démontré en deux étapes aux paragraphes 5.2 et 5.3, théorèmes 5.1 et 5.3.

Théorème B. *Pour tout entier g supérieur ou égal à 2 il existe des sous-groupes de $Aut(\mathbf{R}^2)$ isomorphes à Γ_g contenant des éléments de type* Hénon.

Tout sous-groupe de $Aut(\mathbf{R}^2)$ isomorphe à Γ_g (avec $g \geq 2$) contient un élément distinct de l'identité qui possède un point fixe dans $\mathbf{R}^2$.

En particulier, nous obtenons le résultat (attendu) suivant.

Corollaire. *Il est impossible de trouver un modèle du revêtement universel de la surface orientable compacte de genre $g \geq 2$ pour lequel le groupe d'automorphismes agirait par transformations polynomiales du plan.*

Ce dernier thorme nous permet galement de rpondre une question pose par K. Dekimpe (voir [6]).

Corollaire. *Tout groupe cristallographique polynomial du plan admet un sous-groupe d'indice fini polynomialement conjugu au groupe des translations entires.*

1.3. **Remerciements.** C'est à la suite d'une question de François Béguin sur les homéomorphismes de Brouwer qu'est né ce texte (*voir* le paragraphe 4.1) ; merci à François pour son très bel exposé sur le sujet. Merci également à Dominique Cerveau pour ses conseils et Étienne Ghys pour ses encouragements.

2. Actions de groupes sur les arbres

2.1. **Arbre de** Bass-Serre**.** Soit k un corps. D'après le théorème de Jung - Van der Kulk (dont on pourra trouver une preuve dans [19]), Aut (k^2) est le produit du groupe affine A et du groupe élémentaire E amalgamé le long de leur intersection S. En particulier, tout automorphisme polynomial du plan affine est composé de transformations affines et élémentaires.

Remarque 2.1.

1.- Les groupes E et S sont résolubles de longueur 3 et 2 respectivement.
2.- Lorsque k est algébriquement clos, tout élément de A est conjugué, dans A, à un élément de S.

Puisque Aut (k^2) est un produit amalgamé, on peut lui associer son arbre de Bass-Serre ([22]). Les sommets de cet arbre sont en bijection avec les classes à droite modulo A (sommets *de type* A) et modulo E (sommets *de type* E). Chaque élément ϕ de Aut (k^2) détermine donc deux sommets distincts, ϕA et ϕE. Les arêtes sont en bijection avec les classes modulo S : une arête ϕS relie les sommets ϕA et ϕE. Le CW-complexe ainsi construit est un arbre. C'est l'arbre de Bass-Serre de Aut (k^2), nous le noterons $\mathcal{T}$.

Le groupe Aut (k^2) agit sur $\mathcal{T}$ par translation à gauche ; par exemple, l'image du sommet ϕA par la translation associée à ψ est le sommet $(\psi \circ \phi)A$. Ceci plonge Aut (k^2) dans le groupe des isométries simpliciales de $\mathcal{T}$. Cette action est transitive sur les arêtes et sur les sommets de même type. Le stabilisateur du sommet ϕA (*resp.* du sommet ϕE, *resp.* de l'arête ϕS) est le groupe $\phi A \phi^{-1}$ (*resp.* $\phi E \phi^{-1}$, *resp.* $\phi S \phi^{-1}$).

Les éléments g de $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ peuvent être séparés en deux types suivant leur action sur $\mathcal{T}$. Si g agit sur l'arbre de Bass-Serre en fixant un point, alors g est conjugué à un automorphisme affine ou élémentaire. Lorsque k est algébriquement clos, g est donc conjugué à un automorphisme élémentaire ; nous dirons qu'un élément de $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ est *de type élémentaire* (même si k n'est pas algébriquement clos) lorsqu'il possède un point fixe sur l'arbre de Bass-Serre. Nous dirons qu'il est de type affine s'il est conjugué à un élément du groupe affine.

Soit $\mathrm{long}(g)$ la longueur de translation de g, définie comme le minimum des distances $\mathrm{dist}(g(s), s)$ où s décrit l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ et $\mathrm{dist}(.,.)$ désigne la distance simpliciale sur $\mathcal{T}$. Ainsi, un automorphisme g est de type élémentaire si et seulement si sa longueur de translation est nulle. Lorsque la longueur est strictement positive, on dit que g est *de type* Hénon. C'est le cas pour l'automorphisme de Hénon usuel

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x + y^2 + 0,35 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Si g est un élément de type Hénon, l'ensemble des sommets s de l'arbre $\mathcal{T}$ qui satisfont $\mathrm{dist}(g(s), s) = \mathrm{long}(g)$ forme une géodésique de $\mathcal{T}$ appelée *géodésique de g* et notée $\mathrm{Géo}(g)$.

2.2. **La propriété (FA).** Soit X un arbre. Une action d'un groupe Γ sur X est dite *sans inversion* s'il n'existe pas de couple de sommets adjacents qui soient permutés par un élément de Γ. Un groupe Γ a la propriété (FA) si, pour toute action sans inversion de Γ sur un arbre X, il existe un sommet de X qui est invariant par tous les éléments de Γ. Un groupe dénombrable Γ a la propriété (FA) si et seulement s'il vérifie les trois propriétés suivantes (*voir* [22]) :

(i) Γ n'est pas un amalgame non trivial ;
(ii) l'abélianisé de Γ est fini ;
(iii) le groupe Γ est de type fini.

Soit Γ un groupe ayant la propriété (FA). Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}\,(k^2)$ un morphisme de Γ vers le groupe des automorphismes du plan. Nous obtenons ainsi une action sans inversion de Γ sur l'arbre $\mathcal{T}$ et la propriété (FA) assure l'existence d'un sommet invariant par Γ. Ceci signifie qu'il existe un élément a de $\mathrm{Aut}\,(k^2)$, tel que $a\rho(\Gamma)a^{-1}$ est contenu dans le groupe affine ou le groupe des automorphismes élémentaires. Nous emploierons cette remarque dans la partie suivante pour classer les réseaux des groupes de Lie simples qui se plongent dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$.

2.3. **Graphe de groupes.** Un graphe de groupes $(\mathcal{G}, G)$ est la donnée d'un graphe $\mathcal{G}$, d'un groupe G_s pour tout sommet s de $\mathcal{G}$, d'un groupe G_a pour toute arête (non orientée) a de $\mathcal{G}$ et de deux morphismes injectifs $\rho_{a_0} : G_a \to G_{a_0}$ et $\rho_{a_1} : G_a \to G_{a_1}$ pour toute arête a de sommets a_0 et a_1 (éventuellement confondus).

Fixons un sommet s_0 de $\mathcal{G}$. Pour chaque sommet s (*resp.* chaque arête a) on se donne un espace topologique pointé X_s (*resp.* X_a) qui est un $K(G_s, 1)$ (*resp.*

un $K(G_a, 1)$). Les morphismes ρ_{a_i} sont alors réalisés par des applications continues entre espaces topologiques pointés $f_{a_i} : X_a \to X_{a_i}$, uniques à homotopie près. Soit $X(\mathcal{G}, G)$ l'espace topologique obtenu en recollant les espaces X_s aux espaces $X_a \times [0,1]$ à l'aide des applications $f_{a_i} : X_a \times \{i\} \to X_{a_i}$. Le groupe fondamental de cet espace topologique est alors uniquement déterminé par le graphe de groupes $(\mathcal{G}, G)$ et le choix de s_0. Lorsque le graphe $\mathcal{G}$ est connexe, ce groupe est unique à isomorphisme près et on le note $\pi_1(\mathcal{G}, G)$.

Les deux exemples principaux de graphes de groupes correspondent respectivement à la notion de produit amalgamé, lorsque $\mathcal{G}$ est un segment, et d'extension de type HNN (pour HIGMAN, NEUMANN, NEUMANN), lorsque $\mathcal{G}$ est une boucle ; le groupe fondamental de tout graphe de groupes se décompose ainsi en une succession de produits amalgamés et d'extensions HNN.

2.4. **Théorie de** BASS-SERRE. Il y a une correspondance biunivoque entre les groupes qui agissent sans inversion sur les arbres et les groupes fondamentaux de graphes de groupes. Si Γ agit sans inversion sur un arbre $\mathcal{A}$, le graphe de groupes associé est la donnée $(\mathcal{G}, G)$ du graphe $\mathcal{G} = \Gamma \backslash \mathcal{A}$, marqué de la manière suivante. On fixe un arbre maximal $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{G}$ que l'on relève en un arbre $\tilde{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{A}$; si s (*resp.* a) est un sommet (*resp.* une arête) de $\mathcal{M}$ on note $\tilde{s}$ (*resp.* $\tilde{a}$) son relevé dans $\tilde{\mathcal{M}}$. Pour chaque sommet s de $\mathcal{G}$, s appartient à $\mathcal{M}$ et le groupe G_s est par définition le stabilisateur du sommet $\tilde{s}$ associé. La construction s'étend pour les arêtes de $\mathcal{M}$ et les morphismes $G_a \to G_{a_i}$ sont les inclusions. Si a est une arête de $\mathcal{G}$ qui n'est pas dans $\mathcal{M}$, on commence par relever ses sommets a_0 et a_1, qui eux sont dans $\mathcal{M}$, en deux sommets $\tilde{a_0}$ et $\tilde{a_1}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$. Puis l'on considère l'arête a' de $\mathcal{A}$ partant de $\tilde{a_0}$ qui relève a et l'on définit G_a comme le stabilisateur de cette arête, le morphisme de G_a dans G_{a_0} étant l'inclusion. Soit γ un élément de Γ qui envoie $\tilde{a_1}$ sur l'extrémité de a' qui n'est pas dans $\tilde{\mathcal{M}}$; on définit alors le morphisme $\rho_{a_1} : G_a \to G_{a_1}$ par $\rho_{a_1}(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Cette construction étant faite, il se trouve alors que le morphisme de $\pi_1(\mathcal{G}, G)$ vers Γ induit par les inclusions des G_s et des G_a dans Γ est un isomorphisme. C'est ce que révèle la théorie de BASS-SERRE.

La théorie de BASS-SERRE montre ainsi que les groupes qui agissent sur un arbre sans point fixe global peuvent être décomposés en une succession de produits amalgamés et d'extension HNN. Pour plonger un groupe non résoluble dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ autrement qu'en le plongeant dans le groupe affine, il faut donc que ce groupe puisse être décomposé en un produit amalgamé ou une extension HNN.

2.5. **Deux exemples.** Dans ce paragraphe, nous allons montrer que les deux exemples les plus classiques de produit amalgamé et d'extension HNN ne se plongent pas dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$. Il s'agit du groupe des tresses B_n et du groupe de BAUMSLAG-SOLITAR $\mathrm{BS}(2,3)$. Ceci illustrera les techniques utilisées tout au long de cet article.

Le groupe de BAUMSLAG-SOLITAR $\mathrm{BS}(p,q)$ peut être défini par la présentation suivante

$$\mathrm{BS}(p,q) = \langle s, t \,|\, st^p s^{-1} = t^q \rangle. \tag{2.2}$$

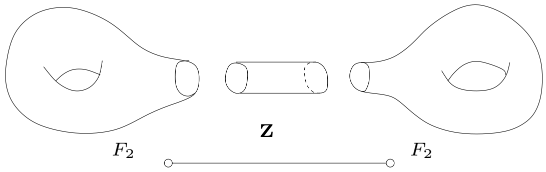

FIGURE 1. Le groupe fondamental de la surface orientable compacte de genre 2, $\Gamma_2 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 | [a_1, b_1] = [a_2, b_2] \rangle$, est isomorphe au groupe fondamental du graphe de groupes représenté ci-dessus. En particulier, le groupe Γ_2 agit sans inversion et sans point fixe global sur des arbres.

Lorsque $p = 2$ et $q = 3$, ce groupe de type fini n'est pas résiduellement fini et ne se plonge donc dans aucun $\mathsf{GL}(n, \mathbf{C})$ (*voir* [2], [3]).

Proposition 2.2. *Si p est distinct de q, tout morphisme de $BS(p,q)$ dans $Aut(k^2)$ a une image résoluble. En particulier, le groupe $Aut(k^2)$ ne contient aucun sous-groupe isomorphe à $BS(2,3)$.*

Remarque 2.3. D'après le théorème principal de [1], un sous-groupe de type fini des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^n$ est résiduellement fini, ce qui n'est pas le cas de $\mathrm{BS}(2,3)$. Cette proposition est donc en partie un corollaire direct de [1].

Démonstration. Soit $\rho : \mathrm{BS}(p,q) \to \mathrm{Aut}\,(k^2)$ un morphisme de groupes. Soient a et b les images de t et s par ce morphisme. Puisque a^p est conjugué à a^q, la longueur de translation de a est nulle dès que p est distinct de q.

Si l'ordre de a est infini, les points de l'arbre $\mathcal{T}$ qui sont périodiques pour a forment un arbre F de diamètre fini (*voir* [18], prop.3.3 et rem.3.4). Quitte à conjuguer le morphisme ρ par un élément de $\mathrm{Aut}\,(k^2)$, nous pouvons supposer que F est centré en le sommet E, en le sommet A, ou l'arête S. Puisque ba^pb^{-1} est égal à a^q, l'arbre F et son centre sont invariants sous l'action de b. L'image de ρ est donc contenue dans E, dans A ou dans S. Il est facile d'en déduire que l'image de ρ est résoluble : c'est immédiat si elle est contenue dans E, et si elle est contenue dans A la relation $ba^pb^{-1} = a^q$ implique que les parties linéaires de a et b ont une direction propre commune.

Lorsque l'ordre de a est fini, l'image de ρ est une extension de $\mathbf{Z}$ par un groupe fini cyclique et est donc résoluble.

Puisque $\mathrm{BS}(2,3)$ n'est pas résoluble, ce groupe ne se plonge pas dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$. □

Le groupe de tresses B_3 peut être présenté de la manière suivante

$$B_3 = \langle u, v |\, u^2 = v^3 \,\rangle. \tag{2.3}$$

Ce groupe est donc un produit de deux copies de $\mathbf{Z}$ amalgamé le long de $\mathbf{Z}$ et, en tant que tel, il se plonge dans le groupe des automorphismes d'un arbre simplicial.

Remarque 2.4. Le groupe B_3 est une extension cyclique centrale de $\mathsf{PSL}(2, \mathbf{Z})$: il est isomorphe à l'image réciproque de $\mathsf{PSL}(2, \mathbf{Z})$ dans le revêtement universel de $\mathsf{PSL}(2, \mathbf{R})$. En particulier, B_3 n'est pas résoluble. Au paragraphe 4.4, nous construirons des représentations non linéaires de $\mathsf{PSL}(2, \mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$.

Proposition 2.5.

- *Si ρ est un morphisme injectif de B_3 vers $Aut(k^2)$, son image est contenue dans un conjugué du groupe affine.*
- *Il n'existe pas de plongement du groupe des tresses B_n dans $Aut(\mathbf{C}^2)$ lorsque n est supérieur ou égal à 4.*

Remarque 2.6. La représentation de Burau fournit une représentation de B_n dans $\mathsf{GL}(n, \mathbf{Q}[t^{\pm 1}])$. Cette représentation est réductible, elle scinde en une représentation de dimension 1 et une représentation de dimension $n-1$. Pour $n = 3$, cette représentation de dimension 2 est fidèle ; en remplaçant t par un nombre complexe transcendant, nous obtenons ainsi une représentation irréductible injective de B_3 dans $\mathsf{GL}(2, \mathbf{C})$ (*voir* [8] et les références qui s'y trouvent).

Remarque 2.7. Les groupes B_3 et B_4 sont les seuls groupes de tresses qui peuvent être décomposés en un produit amalgamé non trivial (*voir* [17]), mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété.

Démonstration. Soit ρ un morphisme de B_3 dans $\mathrm{Aut}\,(k^2)$. L'automorphisme polynomial

$$h = \rho(u)^2 = \rho(v)^3 \tag{2.4}$$

commute avec $\rho(u)$ et avec $\rho(v)$. Si h est de type Hénon, l'image de ρ est donc contenue dans un groupe résoluble et ρ ne peut pas être injectif (*voir* [18], thm. 2.4 et prop.4.8).

Si h est un automorphisme de type élémentaire, $\rho(u)$ et $\rho(v)$ le sont aussi et l'on peut supposer que l'image de ρ est contenue dans A ou E (appliquer un raisonnement analogue à celui présenté ci-dessus). Puisque B_3 n'est pas résoluble, seuls les morphismes à valeurs dans A sont donc susceptibles d'être injectifs.

Montrons maintenant le second point. Il suffit pour cela de considérer le cas où n est égal à 4 car B_4 est contenu dans B_n pour tout n plus grand que 4. Le groupe B_4 admet la présentation suivante :

$$B_4 = \langle a, b, c | \, ac = ca, \, aba = bab, \, bcb = cbc \rangle \tag{2.5}$$

En posant $u = aba$ et $v = ab$, puis $u = bcb$ et $v = bc$, on s'aperçoit sans peine que B_4 contient deux copies de B_3, l'une engendrée par a et b, l'autre par b et c.

Supposons qu'il existe un morphisme injectif ρ de B_4 dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$. L'étude des morphismes de B_3 vers $\mathrm{Aut}\,(k^2)$ montre que, après avoir conjugué la représentation ρ, l'image de $h = (ab)^3$ est un élément du groupe affine dont les points fixes (sur $\mathcal{T}$) forment un arbre de diamêtre fini centré en A. Cette propriété reste valable pour les éléments qui commutent à h, à savoir a et b, puis pour ceux qui commutent à a, par exemple c. Ainsi, l'image de ρ est contenue dans le groupe affine.

Il est facile de voir qu'aucune représentation de B_4 dans le groupe affine complexe n'est injective (*voir* [12]). Nous obtenons ainsi une contradiction qui termine la preuve. $\square$

2.6. **Groupes modulaires.** Soit Γ le groupe fondamental d'une surface orientable compacte à bord. Le groupe $\mathrm{Out}(\Gamma)$ se plonge alors dans le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,(V)$ d'une variété algébrique complexe V (*voir* [1]), et il serait intéressant de connaître les variétés les plus petites sur lesquelles $\mathrm{Out}(\Gamma)$ agit fidèlement et polynomialement. Supposons que Γ est un groupe libre F_n avec $n \geq 3$ ou que S est fermée et de genre au moins 2. Alors $\mathrm{Out}(\Gamma)$ a la propriété (FA) (*voir* [9]), n'est pas résoluble et ne se plonge pas dans le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbf{C}^2)$. Les arguments des paragraphes précédents montrent alors que $\mathrm{Out}(\Gamma)$ ne se plonge pas dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$. On peut également démontrer que $\mathrm{Out}(\Gamma)$ ne se plonge pas dans $\mathrm{Aut}\,(X)$ si X est une surface projective complexe. Il semble donc que les actions algébriques fidèles de ces groupes n'apparaissent pas en dimension 2.

3. Réseaux des groupes de Lie simples

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit G un groupe de Lie réel simple et Γ un réseau de G. S'il existe un morphisme injectif $\rho : \Gamma \to Aut(\mathbf{C}^2)$, le groupe G est isomorphe à $\mathsf{PSO}(1,n)$ ou à $\mathsf{PSU}(1,n)$ pour un certain entier n ; de plus, si G est différent de $PSO(1,2)$ l'image de ρ est contenue dans un conjugué du groupe affine.*

3.1. **La propriété (T).** Nous allons maintenant appliquer les remarques de la partie précédente aux groupes qui satisfont la propriété (T) de Kazhdan. Nous ne définirons pas cette propriété ici et renvoyons le lecteur à [11], chapitre I, ou à [20], chapitre III. Rappelons toutefois quelques conséquences de la propriété (T). Soient G un groupe topologique localement compact et à base dénombrable et Γ un réseau de G.

(a) G a la propriété (T) si et seulement si Γ a la propriété (T).
(b) Si G a la propriété (T), tout morphisme continu de G vers un groupe résoluble a une image relativement compacte.
(c) Si G a la propriété (T), G est engendré par un voisinage compact de l'élément neutre.
(d) Si Γ a la propriété (T) il a la propriété (FA).

Ainsi, lorsque G est un groupe topologique localement compact et à base dénombrable qui a la propriété (T), tous les réseaux de G sont de type fini (appliquer (c)) et ont la propriété (FA). En particulier, lorsque Γ est un réseau de G et $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}\,(k^2)$ est un morphisme de groupes, quitte à conjuguer ρ par un élément de $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$, nous pouvons supposer que l'image de ρ est contenue dans le groupe affine ou dans le groupe E des automorphismes élémentaires.

Dans le second cas, l'image de ρ est finie car E est résoluble. Si l'image de ρ est contenue dans le groupe affine, la partie linéaire des éléments $\rho(\gamma)$ fournit une représentation $\rho' : \Gamma \to \mathsf{GL}(2,\mathbf{C})$ et, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, nous pouvons supposer que l'image de ρ' est contenue dans $\mathsf{SL}(2,\mathbf{C})$. Le groupe $\mathsf{SL}(2,\mathbf{C})$ est loin d'avoir la propriété (T) et nous allons en déduire que l'image de ρ est finie. Soit $\mathbb{H}^3$ la boule hyperbolique munie de sa métrique à courbure constante égale à -1. Le groupe $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{C})$ s'identifie au groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ et le stabilisateur de tout point m de $\mathbb{H}^3$ est isomorphe au groupe compact $\mathsf{SO}(3)$. Via la représentation ρ', le groupe Γ agit sur $\mathbb{H}^3$. Or, de même que toute action sans inversion sur un arbre fixe un sommet, toute action de Γ sur un espace hyperbolique réel ou complexe possède un point fixe. L'image de ρ' est donc contenue dans un sous-groupe compact de $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{C})$ isomorphe à $\mathsf{SO}(3)$. Pour conclure, il suffit maintenant de faire appel au théorème de Zimmer affirmant que les sous-groupes dénombrables de $\mathsf{SO}(3)$ qui ont la propriété (T) sont finis (*voir* [11], p. 81).

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit G un groupe topologique localement compact ayant la propriété (T). Soit Γ un réseau de G. Tout morphisme de Γ dans $Aut(\mathbf{C}^2)$ a une image finie.*

Cette proposition règle le cas de tous les groupes dénombrables ayant la propriété (T) et des réseaux dans les groupes de Lie réels simples qui ne sont pas localement isomorphes à $\mathsf{SO}(1,n)$ ou $\mathsf{SU}(1,n)$ (*voir* [11]). Ces deux groupes n'ont pas la propriété (T) et, d'ailleurs, certains de leurs réseaux possèdent des actions sans inversion et sans point fixe global sur des arbres.

3.2. **Un résultat de Shalom, [23].** Pour conclure, nous allons maintenant utiliser un résultat de Shalom concernant les actions sur des arbres pour les réseaux dans $\mathsf{SO}(1,n)$ ou $\mathsf{SU}(1,n)$. Pour cela, rappelons que ces deux groupes de Lie agissent naturellement sur l'espace hyperbolique réel ou complexe de dimension n. Notons $\mathbb{H}$ cet espace hyperbolique, fixons un point base o dans $\mathbb{H}$ et notons $d(.,.)$ la distance hyperbolique. Pour tout groupe discret Γ d'isométries de $\mathbb{H}$, l'exposant critique de Γ est le nombre réel positif ou nul

$$\delta(\Gamma) = \inf\left\{ s \in \mathbf{R} \,:\, \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(o,\gamma(o))} < +\infty \right\}.$$

L'exposant critique d'un réseau est égal à $n-1$ dans le cas de l'espace hyperbolique réel et à $2n$ pour l'espace hyperbolique complexe ; l'exposant d'un groupe résoluble est nul.

Théorème 3.3 (Shalom)**.** *Soit X un arbre simplicial. Soit Γ un réseau de $\mathsf{SO}(1,n)$ ou de $\mathsf{SU}(1,n)$, avec $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\Gamma\times X \to X$ une action sans inversion et sans point fixe. Il existe alors une arête α de X dont le stabilisateur C dans Γ satisfait*

$$\delta(C) \geq \delta(\Gamma) - 1.$$

Ainsi, dès que $\delta(\Gamma)$ est strictement plus grand que 1, l'exposant critique de C est strictement positif et C ne peut donc pas être un groupe résoluble. Puisque les stabilisateurs des arêtes de l'arbre T associé à $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$ sont des groupes résolubles, nous en déduisons que toute représentation de Γ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$ stabilise un sommet. Ainsi, toute représentation fidèle de Γ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C}^2)$ atterrit dans le groupe affine.

3.3. **Conclusion.** La démonstration du théorème 3.1 est désormais terminée. Nous avons traité les réseaux des groupes de Lie ayant la propriété (T) dans le paragraphe 3.1 et les cas restants, à savoir les réseaux de $\mathsf{SO}(1,n)$ et $\mathsf{SU}(1,n)$ dans le paragraphe précédent.

Remarque 3.4. Il se pourrait qu'aucun réseau de $\mathsf{SO}(1,n)$ ne se plonge dans le groupe affine de $\mathbf{C}^2$ lorsque n est supérieur ou égal à quatre. Ceci permettrait de préciser le théorème 3.1. Malheureusement, nous ne savons pas comment aborder ce problème.

4. Groupes libres

Dans cette partie et la suivante nous décrivons des plongements de réseaux de $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{R})$ dans le groupe $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$ dont l'image contient des éléments de type Hénon. Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, il y a deux classes de réseaux à distinguer, les réseaux uniformes (ou cocompacts) et les autres. Tout réseau non uniforme contient un sous-groupe d'indice fini qui est isomorphe à un groupe libre F_k sur un nombre fini de générateurs.

Proposition 4.1. *Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un sous-groupe Γ de $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$ isomorphe au groupe libre F_k tel que :*

- *tout élément non trivial de Γ est un automorphisme de type Hénon ;*
- *tout élément de Γ est analytiquement conjugué à une translation ;*
- *Γ agit proprement discontinûment sur le plan $\mathbf{R}^2$.*

Remarque 4.2. Puisque le groupe libre F_2 contient une copie de chaque F_k, $k \geq 1$, nous ne traiterons que le cas k est égal à 2.

Remarque 4.3. Les éléments du groupe que nous construirons préservent l'orientation et sont donc des homéomorphismes de Brouwer, ce qui signifie que ce sont des homéomorphismes sans point fixe qui préservent l'orientation. D'après un théorème de Brouwer, ces éléments n'ont donc pas de point périodique. A priori, ils pourraient toutefois développer une dynamique intéressante (*voir* l'introduction de [5]) : par exemple, il existe un homéomorphisme de Brouwer qui n'agit proprement discontinûment sur aucun sous-ensemble non vide, fermé et invariant de $\mathbf{R}^2$ (*voir* [10]). Cependant, nous montrerons au premier paragraphe de cette partie que tout automorphisme du plan qui est un homéomorphisme de Brouwer est conjugué analytiquement à une translation. C'est ce qui permet de démontrer le deuxième point de cette proposition.

Remarque 4.4. La proposition précédente ne traite pas l'ensemble des réseaux non-uniformes puisqu'elle délaisse ceux qui ont des éléments d'ordre fini. Voici deux exemples :

- il existe un plongement du groupe $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/3$ dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$ dont l'image contient des automorphismes de type Hénon. Il suffit de considérer le groupe engendré par les automorphismes

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x-\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x-y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y^2 \\ y \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

et d'appliquer la théorie de BASS-SERRE (*voir* le §5.3 pour ce type de raisonnement).

- tout morphisme du groupe triangulaire

$$T_{l,m,n} = \langle a, b | a^m = b^m = (ab)^l = 1\rangle$$

vers le groupe Aut (k^2) est conjugué à un morphisme à valeurs dans le groupe affine lorsque l, m et n sont des entiers positifs (ce groupe est un réseau de $\mathsf{PSL}(2,\mathbf{R})$ lorsque $1/l+1/m+1/n<1$), ce qui provient du fait que ces groupes ont la propriété (FA) (*voir* [25] ou [22]).

4.1. **Les automorphismes de** BROUWER**.** Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.5. *Tout homéomorphisme de* BROUWER *polynomial est analytiquement conjugué à une translation.*

Démonstration. Afin de classer les automorphismes polynomiaux qui sont des homéomorphismes de BROUWER, nous distinguerons trois cas suivant que l'automorphisme, noté g, est de type élémentaire, de type affine ou de type HÉNON (*voir* le paragraphe 2.1 pour les définitions). Dans les trois cas, la stratégie est identique : il s'agit de montrer que les orbites de g sont discrètes et que l'espace quotient

$$\Sigma(g) = \mathbf{R}^2/\langle g\rangle \tag{4.2}$$

est séparé. Si ces deux propriétés sont satisfaites, $\Sigma(g)$ est une surface analytique orientable homéomorphe à un cylindre. Cette surface est donc isomorphe, en tant que surface analytique réelle, au cylindre standard obtenu en quotientant le plan $\mathbf{R}^2$ par la translation horizontale unitaire (*voir* [15], p. 65 §II.5). Il existe ainsi un revêtement analytique $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \Sigma(g)$ dont le groupe d'automorphismes est le groupe des translations entières $\tau_n : (x, y) \mapsto (x+n, y)$, $n \in \mathbf{Z}$. Ce revêtement peut alors être relevé en une application analytique $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ qui conjugue g à la translation unitaire :

$$\phi^{-1} \circ g \circ \phi = \tau_1. \tag{4.3}$$

C'est la conjugaison annoncée dans la proposition 4.5.

Si g est un automorphisme de type élémentaire préservant l'orientation et sans point fixe, alors g est conjugué à une transformation de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x + P(y) \\ \beta y + \gamma \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

où P est un polynôme en une variable et le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, P)$ satisfait à l'une des trois propriétés suivantes :

(1) $\beta = 1$ et $\gamma \neq 0$;
(2) $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$ et P n'admet aucun zéro réel.

(3) $\beta \neq 1$, $\alpha = 1$ et $P(\gamma/(1-\beta))$ n'est pas nul. Dans ce cas en conjuguant par une translation on peut supposer $\gamma = 0$.

Dans les trois cas on constate facilement que les orbites de g sont discrètes et le quotient $\Sigma(g)$ séparé.

Si g est un automorphisme de type affine qui préserve l'orientation et n'a pas de point fixe, g est conjugué à un automorphisme affine dont la partie linéaire admet 1 comme valeur propre. En conjuguant par un élément de $\mathsf{GL}(2,\mathbf{R})$ on se ramène à un automorphisme affine triangulaire, c'est-à-dire au cas précédent.

Supposons maintenant que g soit un automorphisme de type Hénon qui soit aussi un homéomorphisme de Brouwer. Soient G^+ et G^- les fonctions de Green de g, restreintes au plan affine réel $\mathbf{R}^2$. Elles sont définies par la formule suivante,

$$G^{\pm}(z) = \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{d^n}\log\left(\|g^{\pm n}(z)\|\right)\right\}, \tag{4.5}$$

où d est le degré (dynamique) de g (*voir* [16]). En particulier, $G^+ \circ g = dG^+$. Puisque g est un homéomorphisme de Brouwer, toutes ses orbites s'échappent à l'infini, donc G^+ et G^- sont lisses et partout strictement positives (sur $\mathbf{R}^2$).

Soient m_1 et m_2 deux points distincts du plan. Pour tout ϵ strictement positif, posons

$$\mathcal{U}_1 = \left\{z \in \mathbf{R}^2;\ |G^+(z) - G^+(m_1)| < \epsilon\right\} \tag{4.6}$$
$$\mathcal{U}_2 = \left\{z \in \mathbf{R}^2;\ |G^+(z) - G^+(m_2)| < \epsilon\right\}. \tag{4.7}$$

Pour tout entier n,

$$g^n(\mathcal{U}_1) = \left\{z \in \mathbf{R}^2;\ |d^{-n}G^+(z) - G^+(m_1)| < \epsilon\right\}, \tag{4.8}$$

donc $g^n(\mathcal{U}_1)$ n'intersecte pas $\mathcal{U}_2$ si $|n|$ est suffisamment grand (car $G^+(m_1)$ n'est pas nul). Par conséquent les orbites de m_1 et m_2 sont séparées.

Ceci achève la preuve de la proposition 4.5 $\square$

4.2. **Un plongement de F_2.** Nous allons maintenant montrer la proposition 4.1. Si f est un automorphisme non affine du plan $\mathbf{R}^2$, son extension birationnelle au plan projectif réel admet un unique point d'indétermination $i(f)$. On peut choisir f de façon à ce que les points $i(f)$ et $i(f^{-1})$ soient distincts. On peut de plus supposer que f est un homéomorphisme de Brouwer. Par exemple, pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ sans zéro réel

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ P(y) + 2y - x \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

convient. On peut alors, quitte à remplacer f par un de ces itérés, choisir un voisinage $V^+(f)$ de $i(f)$ et un voisinage $V^-(f)$ de $i(f^{-1})$ qui sont disjoints et satisfont aux deux propriétés suivantes

$$f(\mathbf{R}^2 \setminus V^-(f)) \subset V^+(f) \quad \text{et} \quad \|f(p)\| > 2\|p\| \quad \forall p \in \mathbf{R}^2 \setminus V^-(f) \tag{4.10}$$
$$f^{-1}(\mathbf{R}^2 \setminus V^+(f)) \subset V^-(f) \quad \text{et} \quad \|f^{-1}(p)\| > 2\|p\| \quad \forall p \in \mathbf{R}^2 \setminus V^+(f) \tag{4.11}$$

Soit g un autre automorphisme de type Hénon satisfaisant les mêmes propriétés. En choisissant convenablement g, on peut supposer que

(i) $\{i(f), i(f^{-1})\}$ et $\{i(g), i(g^{-1})\}$ sont disjoints ;
(ii) $\text{Géo}(f)$ et $\text{Géo}(g)$ sont distinctes.

Pour construire un tel g, il suffit par exemple de conjuguer l'automorphisme f donné précédemment par une transformation linéaire qui ne fixe ni l'axe horizontal ni l'axe vertical. Les contraintes imposées à g permettent de choisir des voisinages $V^{\pm}(g)$ de $i(g)$ et $i(g^{-1})$ satisfaisant des propriétés analogues à (4.10) et (4.11) et disjoints de $V^+(f) \cup V^-(f)$.

Soit N un entier strictement positif tel que les longueurs de translation de f^N et de g^N soient strictement plus grandes que le diamètre du segment $\text{Géo}(f) \cap \text{Géo}(g)$. Remplaçons f et g par leurs puissances N-èmes (sans changer leur nom). Le groupe engendré par f et g est alors un groupe libre dont tous les éléments sont des automorphismes de type Hénon (*voir* [18]). C'est une conséquence du lemme de ping-pong pour l'action de ce groupe sur l'arbre $\mathcal{T}$. Notons Γ ce groupe.

Soit q un point du plan ; nous voulons construire un voisinage $\mathcal{U}$ de q tel que $h(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Sans perte de généralité nous pouvons remplacer q par un point de l'orbite de q sous l'action de Γ. Si $m = \inf\{||h(q)||; h \in \Gamma\}$ nous pouvons donc supposer que $m \leq ||q|| < 2m$ (on ne peut pas exiger $||q|| = m$ car a priori cet infimum n'est pas réalisé). Si q est dans le complémentaire des ensembles $V^{\pm}(f)$ et $V^{\pm}(g)$, il suffit de choisir pour $\mathcal{U}$ une boule centrée en q ne rencontrant pas les ensembles $V^{\pm}(f), V^{\pm}(g)$. Supposons maintenant que q appartient à $V^-(f)$ (les trois autres cas sont similaires). Alors $f(q) \in V^+(f)$, en effet sinon on aurait

$$2m > ||q|| = ||f^{-1}(f(q))|| > 2||f(q)|| \text{ et donc } m > ||f(q)||$$

ce qui viendrait contredire la définition de m. Si $\mathcal{U}$ est une boule de rayon suffisamment petit centrée en q, on peut supposer que $f(\mathcal{U}) \subset V^+(f)$ et que $\mathcal{U} \subset \{p \in \mathbf{R}^2; ||p|| < 2m\}$. Soit h un élément de Γ distinct de l'identité ; h s'écrit de manière unique comme un mot réduit de longueur $l \geq 1$ en les lettres f, f^{-1}, g et g^{-1}.

- si $h = f$, par construction on a $h(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$;
- si l'écriture de h commence (à droite) par f et $l \geq 2$, alors pour tout $p \in \mathcal{U}$
$$||h(p)|| \geq 2^{l-1}||f(p)|| \geq 2m$$
et donc $h(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$;
- sinon, pour tout $p \in \mathcal{U}$ on a $||h(p)|| \geq 2^l||p|| \geq 2m$ et à nouveau $h(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Nous avons ainsi démontré que le groupe Γ est un groupe libre, isomorphe à F_2, dont tous les éléments distincts de l'identité sont de type Hénon et que Γ agit discontinûment sur le plan $\mathbf{R}^2$. En particulier ses éléments distincts de l'identité sont des automorphismes de Brouwer et sont donc conjugués analytiquement à des translations.

5. Groupes fondamentaux des surfaces

Dans cette partie nous nous intéressons aux plongements du groupe

$$\Gamma_g = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle \tag{5.1}$$

dans le groupe Aut (k^2) où k est un corps. Ce groupe est le groupe fondamental de la surface compacte orientable de genre g. On peut donc plonger Γ_g dans $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ et donc dans Aut $(\mathbf{R}^2)$. Les plongements qui nous intéressent sont ceux qui ne sont pas conjugués à un plongement dans le groupe affine. Nous verrons que ce sont exactement les plongements dont l'image contient un automorphisme de type Hénon.

5.1. **Un théorème de Zieschang.** Soit $\rho : \Gamma_g \to \mathrm{Aut}\,(k^2)$ un morphisme injectif. Le groupe Γ_g agit alors sur l'arbre de Bass-Serre $\mathcal{T}$ associé à Aut (k^2). Soit $\mathcal{T}_0$ le plus petit sous-arbre de $\mathcal{T}$ contenant l'orbite de l'arête IdS sous l'action de Γ_g. Soit $(\mathcal{G}, G)$ le graphe en groupes obtenu en quotientant $\mathcal{T}_0$ par l'action de Γ_g. Si a est une arête de $\mathcal{G}$, le groupe G_a associé à cette arête est un sous-groupe résoluble de Γ_g (car les stabilisateurs des arêtes sont résolubles) : ce groupe est donc trivial ou isomorphe à $\mathbf{Z}$. D'après un théorème de Zieschang (*voir* [26] et [14]), une décomposition de Γ_g comme groupe fondamental d'un graphe de groupes dont les arêtes sont munies d'un groupe trivial ou d'un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$ est toujours donnée par un découpage de la surface de genre g le long de courbes fermées simples disjointes. Les groupes attachés aux sommets de ce graphe correspondent aux groupes fondamentaux de chacune des composantes connexes de la surface ainsi découpée.

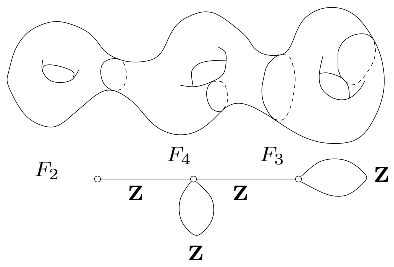

Figure 2. Cette figure présente une décomposition de Γ_3 en le groupe fondamental d'un graphe en groupes : on a représenté le graphe et les courbes fermées simples qui peuvent être choisies sur la surface pour réaliser cette décomposition de Γ_3.

Soit s un sommet de $\mathcal{G}$ correspondant à un sommet de type E de l'arbre $\mathcal{T}_0$. Le groupe G_s correspond à un sous-groupe résoluble de Γ_g et est donc isomorphe à $\mathbf{Z}$ ou au groupe trivial. Si les groupes associés aux arêtes joignant s aux autres sommets de $\mathcal{G}$ sont triviaux, le groupe G_s est également trivial, car sinon $\Gamma_g = \pi_1(\mathcal{G}, G)$ serait le produit libre de $\mathbf{Z}$ et d'un autre groupe, ce qui n'est pas le cas (pour s'en convaincre, on peut, par exemple, appliquer à nouveau le théorème de Zieschang mentionné plus haut). Il existe donc au moins une arête a liée à s pour laquelle le groupe G_a est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le morphisme de G_a dans G_s, est nécessairement un isomorphisme ; on peut donc simplifier le graphe en effaçant les sommets de type E.

Géométriquement, cette opération est associée à la situation suivante. Le graphe de groupes $\mathcal{G}$ correspond à un découpage de la surface de genre g et le sommet de type E correspond à une composante qui est homéomorphe à un cylindre. Ce cylindre provient du découpage de la surface le long des deux courbes qui le bordent. Simplifier le graphe en retirant le sommet de type E c'est simplifier le découpage en oubliant l'une de ces deux courbes.

5.2. **Actions sans points fixes.** Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Tout sous-groupe de* $Aut(\mathbf{R}^2)$ *isomorphe à* Γ_g *(avec* $g \geq 2$*) contient un élément distinct de l'identité qui possède un point fixe dans* $\mathbf{R}^2$.

En corollaire, il n'existe pas d'action polynomiale et proprement discontinue de Γ_g sur le plan $\mathbf{R}^2$. C'est bien dommage car il aurait été intéressant de trouver un modèle du revêtement universel de la surface de genre g ($g > 1$) pour lequel le groupe d'automorphismes du revêtement aurait agi par automorphismes polynomiaux du plan.

Démonstration. Soit F un sous-groupe du groupe affine réel dont tous les éléments agissent sans point fixe sur le plan. Les parties linéaires des éléments de F satisfont donc toutes l'équation

$$\det(M - Id) = 0 \tag{5.2}$$

et le groupe F n'est donc pas Zariski dense. En corollaire, F est un sous-groupe résoluble du groupe affine et, en particulier, F ne contient pas de groupe libre sur deux générateurs.

Soit Γ un sous-groupe de Brouwer de $\mathrm{Aut}(\mathbf{R}^2)$. Le groupe Γ agit alors sur l'arbre de Bass-Serre $\mathcal{T}$ et les stabilisateurs dans Γ des sommets de l'arbre $\mathcal{T}$ sont donc des groupes résolubles. Les groupes associés aux sommets du graphe de groupe $\mathcal{T}\backslash\Gamma$ sont donc résolubles.

D'après le paragraphe précédent, un tel groupe ne peut pas être isomorphe au groupe Γ_g. □

Ce thorme nous permet d'obtenir le corollaire suivant, qui rpond une question pose par K. Dekimpe (voir [6, question 5.2]).

Corollaire 5.2. *Tout groupe cristallographique polynomial du plan admet un sous-groupe d'indice fini polynomialement conjugu au groupe des translations entires.*

Dmonstration. Soit $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^2)$ un tel groupe cristallographique. Il existe H d'indice fini dans G tel que H agisse librement sur $\mathbf{R}^2$ et tel que le quotient $\mathbf{R}^2/H$ soit compact et orientable. Le thorme 5.1 interdit que ce quotient soit une surface de genre ≥ 2, donc c'est un tore et $H = \mathbf{Z}^2$. Ceci interdit que

H contienne un lment de type Hnon (car ceux-ci ont un centralisateur dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$ isomorphe $\mathbf{Z} \ltimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: voir [18]), donc quitte conjuguer on peut supposer $H \subset A$ ou $H \subset E$. On conclut alors en appliquant le thorme principal de [7] qui donne le rsultat ds que l'on a vrifi que H est de degr born, ce qui est ici une remarque immdiate : si $H = \langle f, g \rangle \subset E$ alors tout lment de H est de degr infrieur ou gal $\max(\deg f, \deg g)$. $\square$

5.3. **Exemples de plongements.** Nous allons maintenant montrer le

Théorème 5.3. *Pour tout entier g supérieur ou égal à 2 il existe des sous-groupes de $Aut(\mathbf{R}^2)$ isomorphes à Γ_g contenant des éléments de type* HÉNON.

En fait, nous construirons deux plongements distincts. Le graphe en groupes associé au premier correspond à une décomposition de Γ_g comme produit amalgamé. Le graphe en groupes associé au second correspond à une décomposition de type HNN-extension.

5.3.1. *Plongements de type produit amalgamé.* Considérons une décomposition de Γ_g en le produit amalgamé $\Gamma_g = F_{2k} \star_{\mathbf{Z}} F_{2l}$ où F_n désigne le groupe libre à n générateurs et $k + l$ est égal à g ; La présentation de Γ_g associée à cette décomposition est

$$\Gamma_g = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{i=k} [a_i, b_i] = \prod_{j=1}^{j=l} [a_{k+j}, b_{k+j}] \rangle$$

Nous allons construire un plongement ρ de Γ_g dans $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{R}^2)$ qui "réalise" cette décomposition : l'orbite de l'arête IdS sous l'action de $\rho(\Gamma_g)$ sur l'arbre de BASS-SERRE sera un arbre $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_0/\rho(\Gamma_g)$ sera le graphe de groupes représenté à la figure 3. Les lettres A et E sur cette figure correspondent au type des sommets. D'après le paragraphe 5.1 le sommet de type E est nécessaire.

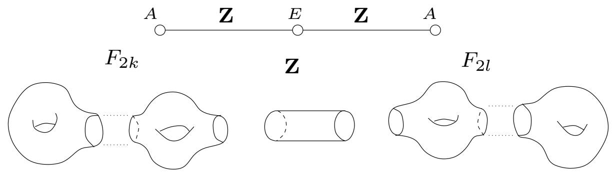

FIGURE 3. Graphe en groupes associé au plongement construit et décomposition de la surface associée.

Lemme 5.4. *Pour tout $n \geq 1$ il existe des matrices $A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n \in \mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ telles que :*

1. *$\langle A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n \rangle$ soit un groupe libre à $2n$ générateurs;*
2. *$h = \prod_{i=1}^{i=n} [A_i, B_i] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;*
3. *les seules matrices triangulaires dans $\langle A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n \rangle$ sont les puissances de h.*

Démonstration. Un tel choix des A_i, B_i est possible car la surface de Riemann Σ_n privée d'un point peut être munie d'une métrique hyperbolique d'aire finie. Explicitement il suffit de choisir les A_i, B_i de manière à ce que le domaine fondamental pour l'action du groupe sur le disque de Poincaré soit un polygône à $4n$ sommets tous situés sur le cercle à l'infini. La figure 4 illustre le cas $n = 2$. En

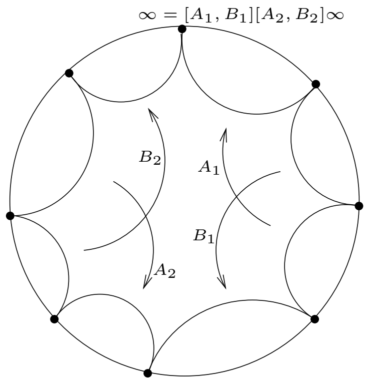

FIGURE 4. Cas $n = 2$ dans le lemme 5.4.

tant qu'éléments de $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ les matrices A_i et B_i sont définies à multiplication près par $-Id$, mais leurs commutateurs $[A_i, B_i]$ sont bien définis. En particulier, leur trace est bien définie. Puisque la matrice $h = \prod_{i=1}^{i=n}[A_i, B_i]$ fixe le point ∞, elle est triangulaire et sa trace vaut ± 2. Il se trouve en fait que la trace de h est égale à -2 (*voir* par exemple [21], ex. 6.1, page 193 et [4] pour ce type de résultat). Par conjugaison on peut donc se ramener à $h(x, y) = (-x+y, -y)$. □

Soient $u_1, v_1, ..., u_k, v_k$ des éléments de $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ donnés par le lemme avec $n = k$, et $u'_{k+1}, v'_{k+1}, ..., u'_{k+l}, v'_{k+l}$ d'autres éléments donnés par le lemme avec $n = l$. Soit ϕ un automorphisme élémentaire qui n'est pas affine et qui commute avec l'automorphisme linéaire h. Par exemple, $\phi(x, y) = (x + y^3, y)$ convient. Pour tout entier j compris entre 1 et l, notons u_{k+j} (*resp.* v_{k+j}) les automorphismes $\phi \circ u'_{k+j} \circ \phi^{-1}$ (*resp.* $\phi \circ v'_{k+j} \circ \phi^{-1}$). Ces $2l$ automorphismes appartiennent alors au stabilisateur du sommet ϕA lorsque l'on regarde leur action sur l'arbre de BASS-SERRE.

Proposition 5.5. *En posant $\sigma(a_i) = u_i$ et $\sigma(b_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \cdots, k + l$ on définit un isomorphisme entre Γ_g et $\langle u_i, v_i \rangle$.*

Démonstration. Par construction σ est un morphisme de groupe surjectif. Soit $m \in \Gamma_g \setminus \{Id\}$. Quitte à conjuguer m dans Γ_g on peut supposer que m s'écrit

$$m = f_n g_n \cdots f_1 g_1 \text{ avec } f_i \in F_{2k}, g_i \in F_{2l}, n \geq 1.$$

On voit alors facilement que le sommet $\sigma(m)IdE$ est à distance $2n$ de IdE, en particulier $\sigma(m) \neq Id$ et σ est injective. □

5.3.2. *Plongements de type HNN-extension.* Nous allons maintenant décrire un plongement de Γ_g dans Aut $(\mathbf{R}^2)$ obtenu à partir de la présentation de Γ_g comme une HNN-extension :

$$\Gamma_g = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid \left(\prod_{i=1}^{i=g-1} [a_i, b_i] \right) b_g = a_g b_g a_g^{-1} \rangle$$

Lemme 5.6. *Pour tout $n \geq 1$ il existe des matrices $A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n \in$ $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ telles que, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:*

(1) *$\langle A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n, P \rangle$ engendrent un groupe libre à $2n+1$ générateurs;*
(2) *$Q = \left(\prod_{i=1}^{i=n} [A_i, B_i]\right) P$ est une matrice de trace 2 (donc conjugué à P);*
(3) *les seules matrices triangulaires dans $\langle A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n, P \rangle$ sont les puissances de P.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 5.4. La figure 5 illustre le cas $n = 1$. □

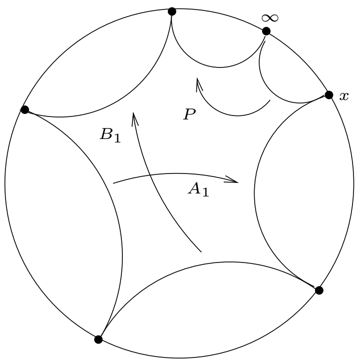

FIGURE 5. Le sommet x satisfait $x = [A_1, B_1]P(x)$.

Appliquons le lemme avec $n = g-1$, et notons M la matrice (non triangulaire) telle que

$$MPM^{-1} = Q = \left(\prod_{i=1}^{i=g-1} [A_i, B_i] \right) P.$$

Soit e l'élément de $E \setminus A$ défini par exemple par $e(x, y) = (x + y^2, y)$. Cet élément commute avec P. Posons $u_i = A_i$, $v_i = B_i$ pour $i = 1, \cdots, g-1$, et $u_g = M \circ e$, $v_g = P$. L'automorphisme u_g est donc un automorphisme de type HÉNON de degré 2. La géodésique de l'arbre de BASS-SERRE qui est associée à cet automorphisme contient les sommets $e^{-1}A, IdE, IdA, ME, MeA$ dans cet ordre (*voir* la figure 6).

Proposition 5.7. *Avec les notations précédentes, le morphisme σ de Γ_g vers $Aut(\mathbf{R}^2)$ obtenu en posant $\sigma(a_i) = u_i$ et $\sigma(b_i) = v_i$ réalise un isomorphisme de Γ_g sur son image.*

Démonstration. Puisque e commute avec P, σ est bien défini et réalise un morphisme de groupe. Il s'agit de démontrer que σ est injectif.

Soit h un élément de $\Gamma_g \setminus \{Id\}$, nous allons montrer que $\sigma(h)$ est distinct de Id. Notons $F \subset \Gamma_g$ le sous-groupe libre sur $2g-1$ générateurs engendré par $a_1, b_1, \cdots, a_{g-1}, b_{g-1}, b_g$. En restriction à F le morphisme σ est injectif ; nous pouvons donc supposer que h n'appartient pas à F. En conjuguant dans Γ_g nous pouvons supposer que h admet une écriture de la forme

$$h = f_n a_g^{l_n} \cdots f_2 a_g^{l_2} f_1 a_g^{l_1} \text{ avec } f_i \in F, l_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ et } n \geq 1.$$

Enfin, nous pouvons supposer que cette écriture est réduite, c'est-à-dire que :

- Si $l_i < 0$ et $l_{i+1} > 0$ alors f_i n'est pas une puissance de b_g;
- Si $l_i > 0$ et $l_{i+1} < 0$ alors f_i n'est pas une puissance de $\left(\prod_{i=1}^{i=g-1} [a_i, b_i]\right) b_g$.

Si l'écriture de h n'était pas réduite, nous pourrions la réduire, ce qui ferait décroître la somme des $|l_i|$. Nous allons montrer que $\sigma(h)$ ne fixe pas le sommet IdA, ce qui montrera que $h \neq Id$. Posons $x_0 = IdA$ et pour tout $i = 1, \cdots, n$

$$x_i = \sigma(f_i) u_g^{l_i} \cdots \sigma(f_1) u_g^{l_1} (IdA).$$

Soit y_i le sommet dans Géo(u_g) le plus proche de x_i, et d_i la distance entre y_i et x_i. Ainsi $y_0 = IdA$ et $d_0 = 0$. Nous allons montrer par récurrence que

- y_{i+1} est toujours l'un des trois sommets IdA, MeA ou $e^{-1}A$;
- y_{i+1} est le sommet $e^{-1}A$ si et seulement si l_i est négatif et $\sigma(f_{i+1})$ appartient au groupe $\langle P \rangle$ engendré par P ;
- y_{i+1} est le sommet MeA si et seulement si l_i est positif et $\sigma(f_{i+1})$ appartient au groupe $\langle Q \rangle$;
- $d_{i+1} \geq d_i$.

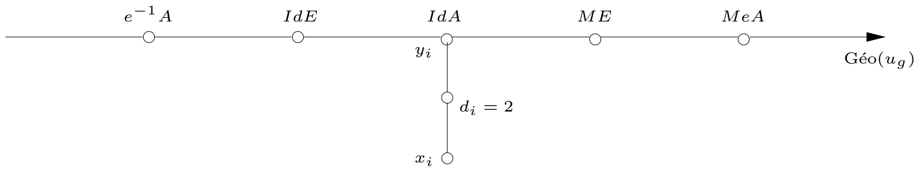

FIGURE 6. La géodésique de l'automorphisme u_g.

Remarquons que les puissances de P fixent les sommets IdA, IdE et $e^{-1}A$, les puissances de Q fixent les sommets IdA, ME et MeA et que tout autre élément de $\sigma(F)$ ne fixe qu'un seul sommet de Géo(u_g) à savoir IdA. Les observations suivantes sont alors immédiates (en ayant la figure 6 en tête) et démontrent les propriétés annoncées :

- Si $y_i = IdA$ et
  - si $l_{i+1} < 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \notin \langle P \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = IdA$.
  - si $l_{i+1} < -1$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle P \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = e^{-1}A$.
  - si $l_{i+1} = -1$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle P \rangle$ alors $d_{i+1} = d_i$ et $y_{i+1} = e^{-1}A$.
  - si $l_{i+1} > 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \notin \langle Q \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = IdA$.
  - si $l_{i+1} > 1$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle Q \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = MeA$.

  – si $l_{i+1} = 1$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle Q \rangle$ alors $d_{i+1} = d_i$ et $y_{i+1} = MeA$.
- Si $y_i = e^{-1}A$ et
  – si $l_{i+1} < 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \notin \langle P \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = IdA$.
  – si $l_{i+1} < 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle P \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = e^{-1}A$.
  – si $l_{i+1} > 0$: ce cas impossible en appliquant simultanément l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse disant que h est sous forme réduite.
- Si $y_i = MeA$ et
  – si $l_{i+1} > 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \notin \langle Q \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = IdA$.
  – si $l_{i+1} > 0$ et $\sigma(f_{i+1}) \in \langle Q \rangle$ alors $d_{i+1} > d_i$ et $y_{i+1} = MeA$.
  – si $l_{i+1} < 0$: ce cas est également impossible.

Par récurrence on voit que si $n > 1$ alors $d_n > 0$, ainsi $x_n = \sigma(h)IdA$ est différent de IdA d'où $\sigma(h) \neq Id$ (le cas $n = 1$ est trivial). □

Références

[1] Hyman Bass and Alexander Lubotzky. Automorphisms of groups and of schemes of finite type. *Israel J. Math.*, 44(1):1–22, 1983.

[2] Gilbert Baumslag. *Topics in combinatorial group theory*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[3] Gilbert Baumslag and Donald Solitar. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:199–201, 1962.

[4] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[5] François Béguin and Frédéric Le Roux. Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb. *Bull. Soc. Math. France*, 131(2):149–210, 2003.

[6] Yves Benoist. Pavages du plan. *Texte des Journes Mathmatiques X-UPS*, pages 1–48, 2001.

[7] Yves Benoist and Karel Dekimpe. The uniqueness of polynomial crystallographic actions. *Math. Ann.*, 322(3):563–571, 2002.

[8] J. S. Birman. Review mr1399602 of the article : Braid groups are linear groups. *Adv. Math.*, 121(1):50–61, 1996.

[9] Marc Culler and Karen Vogtmann. A group-theoretic criterion for property FA. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(3):677–683, 1996.

[10] Edward Warwick Daw. A maximally pathological Brouwer homeomorphism. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 343(2):559–573, 1994.

[11] Pierre de la Harpe and Alain Valette. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). *Astérisque*, (175):158, 1989.

[12] Edward Formanek. The irreducible complex representations of the braid group on n strings of degree $\leq n$. *J. Algebra Appl.*, 2(3):317–333, 2003.

[13] Shmuel Friedland and John Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1):67–99, 1989.

[14] Harrie Hendriks and Anant R. Shastri. A splitting theorem for surfaces. In *Topological structures, II (Proc. Sympos. Topology and Geom., Amsterdam, 1978), Part 1*, volume 115 of *Math. Centre Tracts*, pages 117–121. Math. Centrum, Amsterdam, 1979.

[15] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[16] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1):321–365, 1994.

[17] Abe Karrass, Alfred Pietrowski, and Donald Solitar. Some remarks on braid groups. In *Contributions to group theory*, volume 33 of *Contemp. Math.*, pages 341–352. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[18] Stéphane Lamy. L'alternative de Tits pour Aut$[\mathbf{C}^2]$. *J. Algebra*, 239(2):413–437, 2001.

[19] Stéphane Lamy. Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math.*, 48(3-4):291–315, 2002.
[20] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[21] David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra's pearls*. Cambridge University Press, New York, 2002. The vision of Felix Klein.
[22] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
[23] Yehuda Shalom. Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group. *Ann. of Math. (2)*, 152(1):113–182, 2000.
[24] John Smillie. The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(4):823–827, 1990.
[25] Yasuo Watatani. Property T of Kazhdan implies property FA of Serre. *Math. Japon.*, 27(1):97–103, 1982.
[26] Heiner Zieschang, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*, volume 835 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980. Translated from the German by John Stillwell.

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France

ICJ, Université de Lyon 1, 21 av. Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex, France

E-mail address: `cantat@univ-rennes1.fr`
E-mail address: `lamy@math.univ-lyon1.fr`