ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES.

SERGE CANTAT

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université Rennes I, Campus de Beaulieu, Bâtiments 22-23, 35042 Rennes cedex, France. e-mail : cantat@univ-rennes1.fr

Résumé. Nous étudions les variétés homogènes complexes compactes qui possèdent une transformation holomorphe de degré topologique strictement plus grand que 1.

1. Introduction

1.1. Par définition, un endomorphisme d'une variété complexe M est une application holomorphe surjective de M dans elle-même. La question principale abordée dans cet article est la suivante :

> *Quelles sont les variétés complexes compactes qui possèdent des endomorphismes de degré topologique strictement plus grand que* 1 *?*

En d'autres termes, nous cherchons les variétés compactes munies d'une application holomorphe surjective et non injective (*i.e.* non inversible).

Cette question n'est pas neuve. Dans [14], Mikhael Gromov étudie plusieurs exemples d'endomorphismes, notamment sur les espaces projectifs et les surfaces de Hopf, et demande s'il existe des endomorphismes non inversibles sur les Grassmanniennes. Robert Lazarsfeld étend ce problème à toute variété de drapeaux dans [19] et une réponse complète est fournie dans ce cadre par Kapil H. Paranjape et Vasudevan Srinivas dans [22]. De nombreux résultats sont également connus pour les variétés projectives de dimension inférieure ou égale à 3 et pour celles dont le nombre de Picard est égal à 1 ([25] et [3], [6], [8]). Nous brosserons un panorama rapide de la situation dans la partie 2.

1.2. La plus grande part de ce texte concerne les variétés complexes compactes homogènes (kählériennes ou non). Afin de présenter une version concise des principaux résultats, introduisons la définition suivante :

Définition 1.1. Un endomorphisme f d'une variété complexe compacte M *admet un facteur inversible* si les trois conditions suivantes sont réunies :

(i) il existe une fibration holomorphe localement triviale $\pi : M \to B$ à valeurs dans une variété lisse de dimension non nulle (sauf si M elle-même est réduite à un point),

(ii) les fibres de π sont permutées par f,

(iii) l'endomorphisme $f_B : B \to B$ induit par f est un automorphisme.

Remarque 1.1. Nous verrons à la partie 2 et au paragraphe 4.2 que de nombreuses situations conduisent à l'existence de facteurs inversibles pour lesquels l'automorphisme $f_B : B \to B$ est la restriction d'une transformation projective de $\mathbb{P}^N$ à une sous-variété B. Dans ce cas, l'étude de la dynamique de f est grandement simplifiée.

Théorème 1.1. *Soit X une variété complexe, connexe, homogène et compacte. Si $f : X \to X$ est un endomorphisme de X qui n'a pas de facteur inversible, alors :*

(i) X fibre sur un produit d'espaces projectifs $Q = \mathbb{P}^{m_1} \times ... \times \mathbb{P}^{m_k}$, et les fibres sont des nilvariétés.

(ii) Les fibres de la fibration sont permutées par f, ce qui détermine un endomorphisme $f_Q : Q \to Q$.

(iii) Il existe des endomorphismes non injectifs $f_i : \mathbb{P}^{m_i} \to \mathbb{P}^{m_i}$, $i = 1, ..., k$, et un entier strictement positif l tels que f_Q^l soit l'application diagonale $(f_1, ..., f_k)$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'invariance de la fibration de Tits (§4), le résultat de K. H. Paranjape et V. Srinivas mentionné plus haut et une étude de Jörg Winkelmann concernant les variétés parallélisables. Nous donnerons au passage une démonstration simplifiée du théorème de K.H. Paranjape et V. Srinivas dans un cas particulier. De nombreux exemples sont décrits en détails dans la partie 5 et l'essentiel de la preuve est présenté dans les parties 3 et 6.

1.3. Dans une dernière partie, nous abordons un problème légèrement différent qui est motivé par les résultats récents de Jean-Yves Briend et Julien Duval suivant lesquels tout endomorphisme non inversible de l'espace projectif possède une unique mesure d'entropie maximale. La méthode employée semble très souple et devrait s'appliquer à d'autres familles d'endomorphismes. Encore faut-il trouver des exemples. Nous expliquerons que ces exemples doivent être cherchés sur des variétés dont la dimension de Kodaira est négative et montrerons la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Soit M une variété compacte kählérienne dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Soit f un endomorphisme de M non inversible. S'il existe une classe de Kähler $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha]$ soit proportionnelle à $[\alpha]$ alors M est revêtue par un tore et f est revêtue par une transformation affine de ce tore.*

De surcroît, modulo des conjectures classiques sur les variétés kählériennes, il est possible de classer les endomorphismes non inversibles qui ne préservent pas de fibration lorsque la dimension de Kodaira est positive ou nulle.

1.4. **Plan du texte.** La partie 2 dresse un panorama succinct des idées de base utiles pour comprendre les variétés complexes compactes possédant un endomorphisme de degré plus grand que 1. Plusieurs points de vue ne sont pas abordés, notamment la réduction algébrique, le quotient rationnel et les arguments relatifs à la structure des groupes fondamentaux de variétés kählériennes, mais des idées proches sont exploitées dans les parties suivantes.

Les parties 3 à 6 concernent la structure des variétés homogènes munies d'un endomorphisme non inversible. La dernière partie poursuit la partie 2 et démontre la proposition 1.2. La partie 2 peut donc jouer le rôle d'introduction ou de motivation pour les parties 3 à 6, ou pour la partie 7. Puisqu'elle ne présente que des résultats très classiques, elle peut être ignorée par le lecteur averti.

1.5. **Remerciements.** Je tiens à remercier A. Huckleberry pour son accueil à l'Université de Bochum et les discussions que nous avons eues autour du sujet abordé ici. Les lectures attentives et les remarques des rapporteurs et des rédacteurs de l'Enseignement Mathématique ont considérablement amélioré la présentation de cet article. Je les en remercie.

2. Endomorphismes des variétés complexes compactes

Dans cette première partie nous dressons un panorama rapide des résultats de base permettant d'aborder la question centrale étudiée dans cet article, à savoir : quelles sont les variétés complexes compactes qui possèdent un endomorphisme holomorphe de degré topologique strictement supérieur à 1.

2.1. **Dimension de Kodaira.** La dimension de Kodaira d'une variété complexe compacte M est un nombre entier $\mathsf{kod}(M)$, éventuellement égal à $-\infty$, qui peut prendre les valeurs $-\infty, 0, 1, 2, ..., \dim_{\mathbb{C}}(M)$. Elle est définie de la manière suivante.

Si L est un fibré en droites holomorphe sur M, $\mathrm{H}^0(M,L)$ désignera le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de L. La dimension de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est finie.

Soit x un point de M et L_x la fibre de L en ce point. L'évaluation des sections de L au point x détermine une application linéaire $\theta_{L_x} : \mathrm{H}^0(M,L) \to L_x$. Cette application est identiquement nulle lorsque toutes les sections globales de L s'annulent en x ; on dit alors que x est un point base de L. Une fois fixé un isomorphisme de L_x avec la droite vectorielle $\mathbb{C}$, θ_{L_x} s'interprète comme une forme linéaire, et celle-ci ne dépend du choix de l'isomorphisme $\mathbb{C} \simeq L_x$ que par un facteur multiplicatif. En tout point x de M qui n'est pas un point base de L, on obtient ainsi un élément $[\theta_{L_x}]$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(M,L)^*)$. Pour les fibrés en droites qui possèdent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\Theta_L : M \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(M,L)^*) \tag{1}$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans les points bases de L.

Pour chaque entier strictement positif k, cette construction peut être répétée en remplaçant L par la puissance tensorielle $L^{\otimes k}$. La dimension de Kodaira-Iitaka de L est alors définie comme le maximum des dimensions des images $\Theta_{L^{\otimes k}}(M)$:

$$\mathsf{kod}(M,L) = \max_{k>0} \left\{ \dim_{\mathbb{C}} \left(\Theta_{L^{\otimes k}}(M) \right) \right\}, \tag{2}$$

en convenant de poser $\mathsf{kod}(M,L) = -\infty$ si aucune puissance positive de L ne possède de section non nulle.

La dimension de Kodaira de M, $\mathsf{kod}(M)$, est la dimension de Kodaira-Iitaka du fibré canonique de M, noté K_M et défini comme le déterminant du fibré cotangent de M : $K_M = \det(T^*M)$. Les sections holomorphes de K_M sont donc les formes holomorphes de degré maximal. Les applications méromorphes $\Theta_k := \Theta_{K_M^{\otimes k}}$ sont appelées "*applications pluricanoniques*".

2.2. **Action d'un endomorphisme et ramification.** Si $f : M \to M$ est une application holomorphe surjective de M, la transformation f^* consistant à prendre l'image réciproque d'une forme holomorphe par f définit un élément du groupe linéaire $\mathbf{GL}(\mathrm{H}^0(M,K_M))$. En notant F la transformation projective associée à f^*, on a la relation

$$F \circ \Theta_1 = \Theta_1 \circ f. \tag{3}$$

Cette remarque est valable en remplaçant K_M par ses puissances tensorielles positives $K_M^{\otimes k}$, Θ_1 par Θ_k et F par l'action F_k de f sur les sections de $K_M^{\otimes k}$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est strictement positive, il existe ainsi une fibration méromorphe invariante par tout endomorphisme. L'action sur la base de la fibration est linéaire : c'est la restriction de F_k à l'image de Θ_k. Le théorème suivant, pour lequel nous renvoyons à [28], §VI, et à [18], §7.6, se déduit facilement de ce qui vient d'être dit.

Théorème 2.1. *Soient M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle et $\Theta_k : M \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$, $k > 0$, les applications pluricanoniques. Si f est une transformation holomorphe surjective de M, il existe une transformation projective périodique F_k de $\mathbb{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$ telle que $\Theta_k \circ f = F_k \circ \Theta_k$.*

Remarque 2.1. Ceci montre que les endomorphismes des variétés complexes compactes dont la dimension de Kodaira est strictement positive se réduisent à des variétes de dimension inférieure. Les cas intéressants se situent donc en dimension de Kodaira 0 et $-\infty$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est maximale, *i.e.* $\mathsf{kod}(M) = \dim_{\mathbb{C}}(M)$, les fibres génériques de l'application Θ_k sont finies ; par conséquent, tout endomorphisme de M est inversible et le groupe des automorphismes de M est fini (*voir* [18], §7).

Si $f : M \to M$ est une transformation holomorphe surjective d'une variété complexe compacte, le diviseur de ramification R_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas un difféomorphisme local sur son image. C'est le lieu d'annulation du jacobien de f, donc R_f est l'ensemble vide ou un diviseur. Le théorème suivant montre que R_f est vide dès que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle. La référence la plus ancienne que je connaisse pour ce résultat est l'article [23] de Klaus Peters.

Théorème 2.2 (K. Peters)**.** *Soit M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Toute application holomorphe surjective de M dans M est un revêtement non ramifié.*

Démonstration. Supposons que R_f n'est pas vide et fixons une section non nulle ω de $K_M^{\otimes k}$, pour k positif convenable. L'image réciproque de ω par l'itéré $n^{\text{ème}}$ de f est une section de $K_M^{\otimes k}$ qui s'annule sur l'union des diviseurs effectifs R_f, $f^{-1}(R_f)$, ..., $f^{-n-1}(R_f)$. Puisque f est surjective, on obtient ainsi des sections du fibré en droites $K_M^{\otimes k}$ dont le lieu des zéros (compté avec mutiplicité) croît indéfiniment. Ceci est impossible. □

2.3. **Fibration d'Albanese.** Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'Albanese. Notons $\mathrm{H}^0(M, \Omega^1_M)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de M. Puisque M est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque γ est un lacet de M, l'intégration d'une 1-forme holomorphe

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

ne dépend que de la classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}^1(M, \mathbb{Z})$. La théorie de Hodge montre que la partie sans torsion de $\mathrm{H}^1(M, \mathbb{Z})$ se plonge de cette manière en un réseau cocompact de $\mathrm{H}^0(M, \Omega^1_M)^*$. Le tore complexe obtenu en quotientant $\mathrm{H}^0(M, \Omega^1_M)^*$ par ce réseau sera noté $\mathsf{Alb}(M)$: c'est la variété d'Albanese de M.

Choisissons un point base x dans M. Si y est un point de M et ω est une 1-forme fermée, l'intégrale de ω entre x et y dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de ω sur les lacets basés en x. On dispose ainsi d'une application holomorphe

$$\mathsf{a}_M : M \to \mathsf{Alb}(M), \; y \mapsto \int_x^y \tag{4}$$

pour chaque choix d'un point base x dans M. C'est la fibration d'Albanese de M. Elle est équivariante sous l'action de tout endomophisme f, l'action induite par f sur $\mathsf{Alb}(M)$ étant la transformation affine associée à l'action de f par image réciproque sur les 1-formes holomorphes (le paramètre de translation provient du choix du point base x).

Pour trouver des endomorphismes non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale, c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration force M à être un tore (*voir* [28]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de M est fini.

2.4. **Petite dimension.** Le théorème d'Hurwitz montre que les courbes qui possèdent des endomorphismes de degré plus grand que 1 sont la droite projective et les courbes elliptiques. Ceci peut être démontré à l'aide de la remarque 2.1.

Les surfaces qui possèdent des endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de Kodaira est 0 ou $-\infty$. À côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques ; ainsi, la transformation polynomiale $[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$ détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en $[0 : 0 : 1]$. Les exemples ainsi construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. Ces trois familles d'exemples persistent en toute dimension.

D'après [21], les endomorphismes non inversibles des surfaces kählériennes appartiennent tous à l'une de ces trois familles. De surcroît, les fibrations méromorphes invariantes par des endomorphismes non inversibles deviennent triviales après revêtement fini (*voir* [5], [21] et les références qui s'y trouvent). La situation pour les surfaces est donc bien comprise. Les blocs élémentaires sont des variétés homogènes.

Pour les variétés projectives de dimension 3 dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle, on dispose également d'une classification. Celle-ci n'apporte pas de surprise (*voir* [25]). Le cas $\mathsf{kod}(M) = -\infty$ est plus intéressant et plus obscur : Ekaterina Amerik a étudié les endomorphismes des variétés qui admettent une fibration par des espaces projectifs, ceci en dimension quelconque [5], mais peu de résultats sont disponibles pour la situation générale.

2.5. **Une question proche.** Au lieu de regarder les endomorphismes d'une variété X dans elle-même, on peut s'intéresser aux applications surjectives $f : X \to Y$ entre variétés de même dimension. Dans [3], [4], [6], les variétés de Fano, les quadriques et les variétés projectives avec un nombre de Picard égal à 1 sont traitées. Les méthodes employées ont un corollaire intéressant pour notre étude : une hypersurface lisse H de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$, $N > 2$, admet un endomorphisme non surjectif si et seulement si H est un plan ou une quadrique de $\mathbb{P}^3$ (*voir* [4] et [8]).

Dans ce texte, nous analysons le cas des espaces homogènes compacts. Ceci permet de quitter le monde des variétés kählériennes et de traîter des exemples significatifs en dimension de Kodaira négative.

3. Variétés homogènes kählériennes

Une variété complexe compacte est homogène si le groupe de ses difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété. Dans ce cas, la variété est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie complexe G par un sous-groupe de Lie complexe fermé H (*voir* [2]).

Cette partie classe les endomorphismes des variétés complexes compactes qui sont à la fois kählériennes et homogènes.

3.1. **Les tores.** Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n, Γ un réseau de V et $A = V/\Gamma$ le tore associé. Puisque le fibré tangent de A est trivial, le principe du maximum montre que la différentielle de tout endomorphisme $f : A \to A$ est constante. Les endomorphismes de A sont donc les transformations affines de V qui permutent les orbites de Γ. Les homothéties de rapport entier fournissent des exemples explicites mais il existe quelques exemples nettement plus riches.

Exemple 3.1. Soit Λ un réseau de la droite complexe $\mathbb{C}$. Pour tout entier n, Λ^n est un réseau de $\mathbb{C}^n$ stabilisé par l'action des endomorphismes linéaires de $\mathbb{C}^n$ à coefficients entiers. Ainsi, pour $n = 2$, la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

induit un endomorphisme de degré topologique 2^4 sur $\mathbb{C}^2/\Lambda^2$.

3.2. **Variétés de drapeaux.** Le deuxième type d'exemples est fourni par les variétés de drapeaux, c'est-à-dire les quotients compacts et lisses S/P où S est un groupe de Lie complexe semi-simple et P est un sous-groupe de Lie complexe connexe. Les Grassmanniennes et l'espace des k-plans isotropes pour une forme quadratique ou une forme symplectique sont des exemples de telles variétés. On retrouve ainsi tous les espaces homogènes “classiques”. On dispose pour ces variétés d'un très joli théorème dû à K. H. Paranjape et V. Srinivas [22]) :

Théorème 3.1 (K.H. Paranjape et V. Srinivas)**.** *Soit X une variété de drapeaux et $f : X \to X$ un endomorphisme. Il existe alors un nombre fini d'endomorphismes $f_i : \mathbb{P}^{n_i} \to \mathbb{P}^{n_i}$, $i = 1, ..., k$, et un automorphisme d'une variété de drapeaux $f_0 : X_0 \to X_0$ tels que X soit isomorphe au produit $X_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times ... \times \mathbb{P}^{n_k}$ et l'un des itérés de f coïncide avec l'endomorphisme diagonal $(f_0, f_1, ..., f_k)$.*

Lorsque la variété $X = S/P$ est le quotient d'un groupe de Lie simple, le théorème montre que tout endomorphisme est un automorphisme, sauf si X est un espace projectif. En particulier, les quadriques de dimension $d \geq 3$ et les Grassmanniennes qui ne sont pas des espaces projectifs ne possèdent aucun endomorphisme de degré topologique différent de 1. Afin de présenter quelques-unes des idées qui peuvent être employées pour démontrer ce théorème, nous en donnons une preuve pour $\mathbb{G}(1, 3)$, la Grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$. C'est un cas particulier intéressant car il s'agit à la fois d'une quadrique et de la plus petite Grassmannienne qui ne soit pas un espace projectif.

Démonstration pour $\mathbb{G}(1, 3)$. Commençons par introduire quelques notations standards. L'élément d de $\mathbb{G}(1, 3)$ et la droite $d \subset \mathbb{P}^3$ qui lui correspond seront systématiquement identifiés. Soit p_0 un point et H_0 un plan de $\mathbb{P}^3$. On pose alors :

$$W_{2,0}(p_0) = \{d \in \mathbb{G}(1,3) \mid p_0 \in d\}, \tag{6}$$

$$W_{1,1}(H_0) = \{d \in \mathbb{G}(1,3) \mid d \subset H_0\}. \tag{7}$$

La classe d'homologie de chacune de ces deux variétés ne dépend pas du choix de p_0 et de H_0 ; elle sera donc notée $[\sigma_{2,0}]$ (resp. $[\sigma_{1,1}]$), sans référence aux choix effectués. Ces deux classes d'homologie forment une base du $\mathbb{Z}$-module $H_4(\mathbb{G}(1,3),\mathbb{Z})$ qui est orthonormée pour la forme d'intersection (*voir* [13], §I.5). Puisque la classe d'homologie de toute sous-variété complexe de dimension 2 dans $\mathbb{G}(1,3)$ doit couper $[\sigma_{2,0}]$ et $[\sigma_{1,1}]$ positivement, l'ensemble décrit par ces classes d'homologie coïncide avec le cadran $\mathbb{N}.[\sigma_{2,0}] + \mathbb{N}.[\sigma_{1,1}]$.

Lemme 3.2. *Soit S une sous-variété complexe de $\mathbb{G}(1,3)$ de dimension 2. Supposons que cette surface est irréductible et réduite et qu'il existe un entier m strictement positif tel que $[S] = m[\sigma_{1,1}]$. Il existe alors un plan H dans $\mathbb{P}^3$ tel que $S = W_{1,1}(H)$. En particulier, m est égal à 1.*

C'est le point-clef : la présence d'une telle classe d'homologie est un phénomène qui n'apparaît évidemment pas pour les espaces projectifs.

Démonstration du lemme. Soit S comme dans l'énoncé et $V(S)$ la sous-variété de $\mathbb{P}^3$ balayée par les droites de S :

$$V(S) = \left\{x \in \mathbb{P}^3 \mid \exists\, d \in S,\, x \in d\right\}. \tag{8}$$

Comme $[S]$ est proportionnelle à $[\sigma_{1,1}]$, le nombre d'intersection $[S].[\sigma_{2,0}]$ est nul, ce qui signifie qu'un point générique de $\mathbb{P}^3$ n'appartient pas à $V(S)$. La variété $V(S)$ est donc une surface, qui est irréductible car S l'est. Pour conclure, il suffit de remarquer qu'une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}^3$ balayée par une famille à deux paramètres de droites est un plan, puis de poser $H = V(S)$. □

Soit $f : \mathbb{G}(1,3) \to \mathbb{G}(1,3)$ un endomorphisme et δ son degré topologique : pour montrer que f est un automorphisme, nous allons montrer que δ est égal à 1.

Notons f_* la transformation linéaire de $H_4(\mathbb{G}(1,3),\mathbb{Z})$ associée à f. Le caractère holomorphe de f montre que f_* préserve le cadran $\mathbb{N}.[\sigma_{2,0}] + \mathbb{N}.[\sigma_{1,1}]$. Mais f_* est une similitude de $H_4(\mathbb{G}(1,3),\mathbb{R})$ pour la forme d'intersection, donc f_* ou f_*^2 est une homothétie. En particulier,

$$f_*^2[\sigma_{1,1}] = \delta[\sigma_{1,1}]. \tag{9}$$

Si H est un plan générique de $\mathbb{P}^3$, la surface $f^2(W_{1,1}(H))$ est une surface irréductible de $\mathbb{G}(1,3)$. D'après le lemme 3.2, elle coïncide donc avec la surface $W_{1,1}(\Psi(H))$ associée à un autre plan $\Psi(H)$. Ceci détermine une application holomorphe $\Psi : (\mathbb{P}^3)^* \to (\mathbb{P}^3)^*$.

Montrons que Ψ envoie droite sur droite : si d est une droite de $\mathbb{P}^3$ et H est un plan qui contient d, alors $W_{1,1}(H)$ contient le point de $\mathbb{G}(1,3)$ correspondant à la droite d, et réciproquement ; la droite de $(\mathbb{P}^3)^*$ constituée des plans contenant d est donc envoyée par Ψ sur la droite des plans contenant $f(d)$.

Puisqu'elle envoie droite sur droite, l'application Ψ est donc de degré 1. Ceci entraîne immédiatement que f est de degré 1 : l'image réciproque d'un point d de $\mathbb{G}(1,3)$ doit coïncider avec la droite $\Psi^{-1}(d)$. □

Remarque 3.1. La preuve que nous venons de présenter simplifie légèrement les arguments de [22] et a l'avantage d'employer peu d'outils évolués. La stratégie s'applique pour toutes les variétés de drapeaux classiques – *i.e.* pour les ensembles de sous-espaces vectoriels emboités de $\mathbb{C}^n$. Par contre, elle ne s'applique pas pour la quadrique lisse de dimension 3. Pour une preuve dans le cas général, nous renvoyons le lecteur à [22] ; le cas des quadriques apparaît également dans [4].

3.3. **Cas général.** D'après un théorème d'Armand Borel et Reinhold Remmert, toutes les variétés homogènes kählériennes compactes sont isomorphes au produit d'un tore T par une variété de drapeaux Q. Puisque la projection de $T \times Q$ sur T coïncide avec le morphisme d'Albanese, ses fibres sont permutées par tout endomorphisme. Si $f : T \times Q \to T \times Q$ est une application holomorphe surjective, on peut donc l'écrire sous la forme

$$f(t,q) = (a(t), g_t(q)), \tag{10}$$

où a est un endomorphisme de T et $t \mapsto g_t$ est une application holomorphe à valeurs dans les endomorphismes de Q. Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, le théorème 3.1 et la connexité de T permettent de supposer que g_t est à valeurs dans :

(i) les endomorphismes d'un certain degré d'un espace projectif, ou
(ii) la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une variété de drapeaux.

Chacun de ces ensembles est égal au complémentaire d'une famille non vide d'hypersurfaces dans un espace projectif. L'application $t \mapsto g_t$ doit donc être constante. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Proposition 3.3. *Soit T un tore et Q une variété de drapeaux. Les endomorphismes de $T \times Q$ sont tous du type $(t,q) \mapsto (a(t), g(q))$ où a est un endomorphisme de T et g est un endomorphisme de Q.*

En particulier, tous les endomorphismes de ces variétés préservent la projection sur Q. Il s'agit d'un cas particulier de fibration de Tits. Nous allons maintenant montrer que cette dernière est toujours invariante.

4. Invariance de la fibration de Tits

4.1. **La fibration de Tits.** Pour étudier les endomorphismes d'une variété complexe compacte, l'existence de fibrations invariantes est un atout crucial. Nous avons déjà signalé les fibrations d'Albanese et pluricanoniques dans la partie 2. Le troisième exemple est fourni par le processus de réduction algébrique. Il donne naissance à une fibration dont les fibres sont les sous-variétés sur lesquelles toute fonction méromorphe est constante. Tout endomorphisme préserve cette fibration ; l'action induite sur la base correspond à celle de l'endomorphisme f par composition sur le corps des fonctions méromorphes. Dans le cas général, il s'agit d'une fibration méromorphe (*voir* [28]) mais pour les variétés homogènes, on dispose du théorème suivant ([1], theorème 6.2) :

Théorème 4.1. *Soit X une variété homogène compacte. Il existe une variété homogène projective Y et une fibration localement triviale $\rho : X \to Y$ telle que :*

(i) Les fibres de ρ sont parallélisables,

(ii) ρ réalise un isomorphisme entre le corps des fonctions méromorphes de X et celui de Y,

(iii) tout endomorphisme de X permute les fibres de ρ.

D'après le théorème d'A. Borel et R. Remmert, Y est le produit d'une variété abélienne par une variété de drapeaux. Une façon de définir la fibration de Tits est de composer la fibration précédente avec la projection de sa base sur la variété de drapeaux. Le théorème précédent et la proposition 3.3 montrent ainsi que la fibration de Tits est invariante par tout endomorphisme.

Proposition 4.2. *La fibration de Tits d'une variété homogène compacte est invariante par tout endomorphisme.*

Pour obtenir ce résultat, nous avons employé une définition quelque peu inhabituelle de la fibration de Tits. Voici la construction initiale de Jacques Tits. Soit $X = G/H$ une variété homogène compacte, avec H un sous-groupe fermé du groupe de Lie complexe G. Notons H^0 la composante connexe de l'élément neutre dans H et N le normalisateur de H^0. On peut montrer que G/N est une variété de drapeaux. On obtient ainsi une fibration de X sur une variété de drapeaux Q qui s'avère être la fibration de Tits ; en particulier, cette construction ne dépend pas de l'écriture de X sous la forme G/H. Les fibres sont isomorphes au quotient du groupe de Lie complexe $L = N/H^0$ par le sous-groupe discret cocompact $\Gamma = H/H^0$; ce sont donc des variétés parallélisables connexes. Nous renvoyons le lecteur à [9], [27], [15] et [2] pour les démonstrations de ces résultats.

Vocabulaire : si X est une variété homogène compacte, les fibres et la base de la fibration de Tits de X seront appelées *fibres de* Tits et *base de* Tits de X.

4.2. **Première application.** Soit Q la base et F la fibre de la fibration de Tits d'une variété homogène compacte X. Si f est un endomorphisme de X, il induit un endomorphisme $\overline{f}$ de la variété de drapeaux Q. Nous pouvons donc appliquer le théorème de K.H. Paranjape et V. Srinivas. S'il apparaît un facteur $Q = Q_0 \times Q_1$ sur lequel $\overline{f}$ induit un automorphisme $\overline{f}_0 : Q_0 \to Q_0$, la dynamique de f s'appauvrit considérablement : $\overline{f}_0$ est induite par une transformation linéaire isotope à l'identité.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous pourrons donc supposer que la base Q de la fibration de Tits est un produit d'espaces projectifs :

$$Q = \mathbb{P}^{m_1} \times ... \times \mathbb{P}^{m_k},\ k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

et que f agit diagonalement : $\overline{f} = (\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k)$ où $\overline{f}_j \in \mathrm{End}(\mathbb{P}^{m_j})$.

Soit q un point de Q et $\mathbb{P}^{m_j}_q$ l'espace projectif qui passe par q et est donné par le j^{eme} facteur du produit (11). L'image réciproque de la fibration de Tits par l'injection $\mathbb{P}^{m_j}_q \to Q$ ne dépend pas de q car X est homogène. On obtient ainsi une variété homogène X_j dont la fibration de Tits a des fibres isomorphes à celles de X et une base isomorphe à $\mathbb{P}^{m_j}$. Puisque tout endomorphisme d'un espace projectif admet des points fixes, f induit un endomorphisme de X_j. Nous étudierons donc d'abord les endomorphismes des variétés homogènes dont la base de Tits est un espace projectif.

5. Quelques exemples

Présentons maintenant quelques exemples qui illustrent l'invariance de la fibration de Tits et donnent une petite idée des phénomènes qui peuvent apparaître lorsque la variété homogène n'est pas kählérienne.

Exemple 5.1. L'exemple le plus simple de variété homogène qui ne soit pas kählérienne est la surface de Hopf, obtenue en quotientant $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par les homothéties de rapport λ^n, $n \in \mathbb{Z}$, λ étant un nombre complexe non nul. Cette surface S_λ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Elle fibre sur $\mathbb{P}^1$, les fibres étant isomorphes à la courbe elliptique $\mathbb{C}^* / \langle \lambda \rangle$.

En voici une seconde construction qui montre directement que cette variété est homogène. Soit H_λ le sous-groupe de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ défini par

$$H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^n & z \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{Z},\, z \in \mathbb{C} \right\}. \tag{12}$$

Le quotient de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ par H_λ est isomorphe à la surface de Hopf S_λ (voir l'exemple 5.1). La fibration elliptique de S_λ sur $\mathbb{P}^1$ coïncide avec sa fibration de Tits et provient de l'inclusion de H_λ dans le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Si $P(X,Y)$ et $Q(X,Y)$ sont deux polynômes homogènes de degré d qui n'ont que l'origine comme zéro commun, la transformation

$$\phi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

passe au quotient en un endomorphisme de degré d^3 sur la surface de Hopf. On construit ainsi de nombreux exemples d'endomorphismes ; l'invariance de la fibration de Tits résulte immédiatement de l'homogénéité de P et Q.

Exemple 5.2. Le deuxième exemple de variétés complexes compactes non kählériennes est celui donné par Eugenio Calabi et Beno Eckmann dans [11]. Il s'agit de variétés de dimension 3 difféomorphes à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Chacune des sphères fibre en cercles sur $\mathbb{P}^1$ et le produit de ces deux fibrations donne naissance à une fibration elliptique localement triviale. L'invariant modulaire de la fibre peut être fixé de manière arbitraire lors de la définition de la structure complexe sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Si cet invariant est égal à τ, nous noterons M_τ la variété de Calabi-Eckmann correspondante.

Ces variétés peuvent être construites de la manière suivante. Soit $V = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$. L'action de $\mathbb{C}$ sur V donnée par

$$t \star ((u,v),(x,y)) = ((e^{-t/2}u, e^{t/2}v), (e^{-\tau t/2}x, e^{\tau t/2}y)) \tag{13}$$

est fidèle dès que le nombre complexe τ appartient au demi-plan de Poincaré. L'espace des orbites est alors une variété isomorphe à M_τ. Cette construction a l'avantage de montrer directement que M_τ est homogène et possède de nombreux endomorphismes. Pour en construire, il suffit en effet d'exhiber des transformations holomorphes de V qui permutent les orbites de l'action (13). Par exemple,

$$((u,v),(x,y)) \mapsto ((u^3 + u^2 v, u^3 + v^3), (xy^2 + x^3, y^3)) \tag{14}$$

détermine un endomorphisme de M_τ dont le degré topologique est égal à 3^4.

Il est facile de constater sur cet exemple que la fibration elliptique de M_τ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est équivariante : l'endomorphisme permute les fibres et induit une transformation polynômiale de degré 3 sur chaque $\mathbb{P}^1$. C'est une illustration de l'invariance de la fibration de Tits. L'égalité entre les degrés des deux endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ illustre un autre phénomène. Notons E_τ la fibre elliptique de M_τ. La suite exacte longue des groupes d'homotopie

$$...\to \pi_2\left(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\right)\to \pi_1(E_\tau)\to \pi_1(M_\tau)\to \pi_1\left(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\right)\to ... \tag{15}$$

montre que la simple connexité de M_τ résulte du caractère surjectif de la flèche $\pi_2\left(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\right)\to\pi_1(E_\tau)$. L'action d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$ sur le second groupe d'homotopie $\pi_2(\mathbb{P}^1)\simeq\mathbb{Z}$ coïncide avec la multipliation par le degré de l'endomorphisme. Celle d'un endomorphisme holomorphe de E_τ sur $\pi_1(E_\tau)\simeq\mathbb{Z}^2$ se fait par une similitude dont le rapport α est égal à la racine carrée du degré topologique. Puisque la suite exacte est équivariante, il s'ensuit que le degré de l'endomorphisme sur chaque $\mathbb{P}^1$ est égal à α. En particulier, tous les endomorphismes de $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ ne se relèvent pas en des endomorphismes de M_τ.

E. Calabi et B. Eckmann construisent des structures complexes similaires sur $\mathbb{S}^{2p+1}\times\mathbb{S}^{2q+1}$ pour toute paire d'entiers positifs (p,q) (voir [11], [20]). Une étude analogue à la précédente peut-être effectuée pour toutes ces variétés.

Exemple 5.3. Donnons maintenant un exemple pour lequel les fibres de Tits sont des nilvariétés (et pas des tores). Soit $\mathcal{H}_3(\mathbb{C})$ le groupe de Heisenberg constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{16}$$

où x, y et z sont trois nombres complexes. Le quotient de $\mathcal{H}_3(\mathbb{C})$ par $\mathcal{H}_3(\mathbb{Z}[i])$ est une variété complexe compacte que nous noterons M_3.

Soit P le sous-groupe de $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ formé par les matrices triangulaires supérieures. Si τ appartient à $\mathbb{Z}[i]$, on note ρ_τ la représentation de P dans $\mathrm{Aut}^0(M_3)$ déterminée par la translation à gauche par l'élément

$$\rho_\tau\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\log(a)}{2i\pi}\tau\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Puisque l'"image" de ρ_τ est dans le centre de $\mathcal{H}_3(\mathbb{C})$, il est facile de voir que ρ_τ définit bien une représentation à valeurs dans $\mathrm{Aut}(M_3)$ et que la variété X_τ obtenue par suspension de cette représentation au-dessus de $\mathbb{P}^1=\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})/P$ est homogène. La fibration de Tits de X_τ coïncide avec la projection sur $\mathbb{P}^1$ et n'est pas triviale. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'image du second groupe d'homologie de $\mathbb{P}^1$ dans la fibre M_3 est engendrée par la matrice de paramètres $x=y=0$, $z=\tau$.

Si p et q sont deux entiers et $\overline{f}$ est un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$ de degré pq, la transformation

$$f([u:v], \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \mapsto (\overline{f}([u:v]), \begin{pmatrix} 1 & p.x & pq.z \\ 0 & 1 & q.y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \tag{18}$$

détermine un endomorhisme de X_τ de degré $(pq)^5$. Tous les endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ se relèvent donc en des endomorphismes de M_3. Les endomorphismes ainsi construits n'ont pas de facteur inversible.

Exemple 5.4. Donnons maintenant un exemple de variété homogène non kählérienne ne possédant pas d'endomorphisme de degré supérieur à 1. Soit X le quotient de $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ par un sous-groupe discret cocompact Γ. Pour montrer que tout endomorphisme $f : X \to X$ est un automorphisme, utilisons que X est parallélisable, son fibré cotangent étant trivialisé par les 1-formes invariantes par translation à droites sur $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$. L'action de f sur les formes différentielles induit ainsi un endomorphisme f^* de l'algèbre de Lie $\mathbf{sl}(n,\mathbb{C})$, dont le déterminant est égal au degré topologique de f. Tout endomorphisme de $\mathbf{sl}(n,\mathbb{C})$ étant un automorphisme intérieur (*voir* [16], prop. 1.98), le déterminant de f^* est égal à 1 et f est un automorphisme.

6. Existence de facteurs inversibles.

Nous démontrons maintenant le théorème énoncé dans l'introduction. Les idées principales sont déjà apparues dans la partie précédente.

6.1. **Structure de la fibration de Tits.** Supposons que la base de la fibration de Tits est un espace projectif $\mathbb{P}^m$. La fibre F est une variété parallélisable : nous noterons L_0 la composante connexe de l'identité de son groupe d'automorphismes et L son revêtement universel. Il existe un sous-groupe discret cocompact Γ_0 de L_0 tel que $F = L_0/\Gamma_0$. L'image réciproque de Γ_0 par l'application de revêtement $L \to L_0$ sera notée Γ.

Si l'on écrit X sous la forme G/H, où G est un groupe de Lie complexe simplement connexe agissant holomorphiquement sur X, on récupère un morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^m)$ dont l'image S agit transitivement sur $\mathbb{P}^m$. En particulier, S coïncide avec le groupe $\mathbf{PGL}(n,\mathbb{C})$ ou éventuellement avec le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(n/2,\mathbb{C})$ si n est pair (*voir* [2]). Ces groupes sont simples, ce qui permet d'appliquer le théorème de Levi-Malcev et de trouver une section $\sigma : S \to G$ du morphisme ρ. Nous noterons encore S l'image dans G du groupe S.

Fixons un point q_0 de $\mathbb{P}^m$, par exemple celui de coordonnées $[1 : 0 : ... : 0]$, et notons P le stabilisateur de q_0 dans S, de sorte que $\mathbb{P}^m$ s'identifie à S/P. L'action de S sur X (via $\sigma : S \to G$) permute transitivement les fibres de la fibration de Tits. Nous pouvons donc reconstruire X comme la suspension de la représentation

$$P \to \mathrm{Aut}(F_{q_0})^0 = L_0 \tag{19}$$

obtenue par l'action de P sur la fibre F_{q_0} au-dessus du point Q. L'action de P ainsi construite se fait par translation à gauche.

Si S est le groupe spécial linéaire, alors P est (conjugué à)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ 0 & A \end{pmatrix} : \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n,\, A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}),\, a = \det(A)^{-1} \right\}, \tag{20}$$

et lorsque S est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(q, \mathbb{C})$,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \star\star\star \\ 0 & a^{-1} & \star\star\star \\ & & \\ & 0 & A \end{pmatrix} : A \in \mathbf{Sp}(q-1, \mathbb{C}) \right\}. \tag{21}$$

Soit f un endomorphisme de X, $\overline{f}$ l'endomorphisme induit sur $\mathbb{P}^m$ et q un point de $\mathbb{P}^m$. Si s est un élément de S qui envoie F_q sur $F_{\overline{f}(q)}$, $s^{-1} \circ f$ détermine un endomorphisme de la fibre F_q. Ce dernier ne dépend du choix de s que modulo P : son action sur les groupes d'homotopies et d'homologie de F_q n'en dépend donc pas. Cette remarque permet de définir la notion d'*endomorphisme agissant par translation, par automorphisme ou par endomorphisme de degré d dans les fibres*.

6.2. **Un théorème de Jörg Winkelmann.** Sur une variété parallélisable compacte L/Γ, les champs de vecteurs holomorphes globaux sont en correspondance bi-univoque avec les éléments de l'algèbre de Lie $\mathbf{l}$ de L. Tout endomorphisme ϕ de L/Γ détermine alors un endomorphisme d'algèbre de Lie $\phi_* : \mathbf{l} \to \mathbf{l}$ (*voir* [29]). Si L est simplement connexe, il existe donc un automorphisme Φ de L qui stabilise Γ (*i.e.* $\Phi(\Gamma) \subset \Gamma$) et un élément a de L tel que $\phi(g\Gamma) = a\Phi(g)\Gamma$.

Puisque ϕ_* est un morphisme d'algèbre de Lie, il préserve le radical résoluble de $\mathbf{l}$. Ceci permet de trouver une fibration équivariante de L/Γ à valeurs dans S/Γ' où S est semi-simple. Puisque tous les endomorphismes des algèbres de Lie simples sont intérieurs, l'endomorphisme induit sur la base est un automorphisme et l'un de ses itérés est une translation à gauche. Ce raisonnement peut être poussé un cran plus loin et conduit au théorème suivant de J. Winkelmann [29] :

Théorème 6.1 (J. Winkelmann). *Soit $F = L/\Gamma$ une variété complexe compacte parallélisable et f un endomorphisme holomorphe de F. Si N désigne* *le nilradical de* L, *il existe un automorphisme* $f' : L/N\Gamma \to L/N\Gamma$ *qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} L/\Gamma & \xrightarrow{f} & L/\Gamma \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ L/\left(N\Gamma\right) & \xrightarrow[f']{} & L/\left(N\Gamma\right) \end{array}$$

Reprenons l'étude de la fibration de Tits commencée au paragraphe 6.1. Le théorème précédent s'applique simultanément à l'action du groupe parabolique P et à celle induite par l'endomorphisme f sur les fibres. Nous pouvons donc énoncer une version fibrée du théorème de J. Winkelmann. Si nous notons L/Γ la fibre de Tits (où Γ est un réseau du groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe L), et N le radical nilpotent de L, nous obtenons un diagramme commutatif de fibrations,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{morphisme fibré}} & Y \\ {\scriptstyle\Pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Pi} \\ \mathbb{P}^m & \xrightarrow[id]{} & \mathbb{P}^m \end{array}$$

qui est équivariant sous l'action de f ; la variété Y est un espace homogène complexe compact dont la base de Tits est isomorphe à $\mathbb{P}^m$ et la fibre à $L/(N\Gamma)$; cette variété Y est munie d'un endomorphisme f_Y agissant par automorphisme dans les fibres.

6.3. Endomorphismes agissant par automorphisme dans les fibres.

Proposition 6.2. *Soit* X *une variété homogène complexe compacte dont la fibration de Tits a pour base un espace projectif. Si* f *est un endomorphisme de degré strictement supérieur à* 1 *qui agit par automorphisme dans les fibres, la fibration de Tits est un produit.*

Démonstration. **Première étape.** Conservons les notations du paragraphe 6.1 et supposons pour commencer que la fibre de Tits F est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe L. Dans ce cas, quitte à remplacer l'endomorphisme f par l'un de ses itérés, l'action de f dans les fibres se fait par translation. En particulier, son action sur le groupe fondamental des fibres est triviale. Le degré de f étant supérieur à 1, l'action de $\overline{f}$ sur $\pi_2(\mathbb{P}^m)$ est la multiplication par un entier strictement plus grand que 1. L'équivariance de la suite exacte

$$(22)\qquad \ldots \to \pi_2(\mathbb{P}^m) \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbb{P}^m) = \{0\} \to \ldots$$

montre donc que la première flèche a une image finie. Quitte à changer X par un revêtement fini, on peut donc supposer que le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de X.

Si nous passons au revêtement universel $\tilde{X}$ de X, la fibre de la fibration de Tits est alors remplacée par le groupe de Lie simplement connexe L et $\tilde{X}$ est l'espace total d'un fibré principal sous l'action de L par translations à droite. L'endomorphisme f s'y relève en un morphisme d'espaces fibrés $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$, qui est équivariant pour l'action de L par multiplication à droite à la source et par multiplication à droite après composition par un automorphisme de L au but. On obtient donc un morphisme $\tilde{f}$ au-dessus de f entre deux fibrés principaux équivalents. Les classes caractéristiques du fibré principal $\tilde{X}$ doivent être invariantes par $\overline{f}$ et sont donc nulles, car $\overline{f}$ agit par multiplication par un entier positif strictement plus grand que 1 sur chaque espace de cohomologie. Nous allons employer cette propriété à plusieurs reprises pour montrer que la fibration de Tits est en fait un produit.

Soit W le fibré vectoriel obtenu en faisant le produit fibré du fibré principal $\tilde{X}$ par la représentation adjointe de L. Il suffit de montrer que ce fibré vectoriel est trivial. Par construction, $\tilde{X}$ est un fibré principal obtenu par la suspension d'une représentation

$$\rho : P \to L \tag{23}$$

où P est le stabilisateur du point $[1 : 0 : ... : 0]$ pour l'action de $\mathbf{PGL}(m+1, \mathbb{C})$ (resp. $\mathbf{Sp}((m+1)/2, \mathbb{C})$) sur $\mathbb{P}^m$. Le fibré W est donc un fibré vectoriel homogène : il est obtenu par suspension de la représentation $ad_L \circ \rho$ où ad_L désigne la représentation adjointe de L.

L'endomorphisme $\tilde{f}$ détermine un endomorphisme de W (au-dessus de f) qui agit par isomorphisme linéaire dans les fibres. L'argument relatif aux classes caractéristiques du fibré $\tilde{X}$ affirme ainsi que les classes de Chern de W sont nulles et, en particulier, que sa pente

$$\mu(W) = \frac{c_1(W)}{\mathrm{rang(W)}} \tag{24}$$

est nulle. Si V était un sous-faisceau de W de pente $\mu(V)$ strictement supérieure à 0, son image réciproque par $\tilde{f}^n$ serait de pente $d^n\mu(V)$, ce qui contredirait l'existence d'une borne supérieure pour les pentes des sous-faisceaux de W (*voir* [17], §V.7). Ceci montre que W est un fibré semi-stable et permet de trouver une décomposition de W en somme directe de sous-faisceaux

$$W = \bigoplus_{i=1, \dots, k} W_i \tag{25}$$

telle que chaque W_i est stable et de pente nulle [24]. L'image réciproque d'une telle décomposition par $\tilde{f}$ est une nouvelle décomposition de W en faisceaux stables : par le corollaire 2.8 de [24], chaque $\tilde{f}^*(W_i)$ est donc isomorphe à l'un des W_j. Ceci montre que toutes les classes de Chern des W_i sont nulles. Puisque $\mathbb{P}^n$ est simplement connexe, la nullité des classes de Chern et la stabilité assurent la trivialité. Les W_i, et donc W lui même, sont triviaux.

Ceci démontre la proposition lorsque la fibre de Tits est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par un réseau : la fibration étant triviale, f admet un facteur inversible.

Seconde étape. Lorsque L est un groupe de Lie connexe simplement connexe quelconque, l'argument qui vient d'être donné montre que le fibré principal associé à sa partie semi-simple est trivial.

Dans la suite exacte (22) nous pouvons donc supposer que l'image de la première flèche est contenue dans l'intersection de Γ avec le radical de L. On peut donc supposer pendant quelques lignes que L est résoluble.

Un automorphisme d'un tore agit sur le groupe fondamental $\mathbb{Z}^n$ en ne possédant aucune valeur propre entière strictement plus grande que 1. Plus généralement, si L est résoluble, il n'existe pas de sous-groupe cyclique infini $A = \{..., a^{-1}, 1, a, a^2, ...\}$ dans Γ tel que $f_*(a) = a^d$ avec $|d| > 1$. L'équivariance de la suite exacte (22) montre alors que l'image de la première flèche est triviale. Comme dans la première étape, on peut donc relever la dynamique au revêtement universel de X et supposer que les fibres de la projection sur $\mathbb{P}^m$ sont isomorphes au groupe de Lie simplement connexe L.

La variété $\tilde{X}$ est obtenue en faisant une suspension à partir d'un morphisme du groupe parabolique P dans L et la première étape permet de supposer que le morphisme du groupe parabolique P à valeurs dans L est en fait à valeurs dans le radical résoluble $Rad(L)$ de L.

Supposons pour commencer que P est le stabilisateur de $[1 : 0 : ... : 0]$ dans $\mathbf{SL}(m+1,\mathbb{C})$. Un tel morphisme est trivial sur le sous-groupe simple constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbf{SL}(m,\mathbb{C}). \tag{26}$$

Il est donc trivial sur le plus petit sous-groupe distingué contenant cette copie de $\mathbf{SL}(m,\mathbb{C})$ et il est facile d'en déduire que le morphisme factorise à travers la représentation de P dans $\mathbb{C}^*$ donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto \alpha. \tag{27}$$

Si l'un des poids de la représentation associée est non nul, nous pouvons construire un fibré en droites $\tilde{f}$-équivariant de classe de Chern non nulle, ce qui est impossible. Tous les poids de la représentation sont donc nuls et le morphisme de P dans L est trivial.

Supposons maintenant que P est le stabilisateur de $[1 : 0 : ... : 0]$ dans le groupe $\mathbf{Sp}(q, \mathbb{C})$, avec $m + 1 = 2q$. Dans ce cas, le morphisme de P dans $Rad(L)$ est trivial sur le sous-groupe de Lie simple

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{28}$$

où A décrit $\mathbf{Sp}(q-1, \mathbb{C})$ et Id est l'élément neutre de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$. Le morphisme de P dans $Rad(L)$ est donc trivial sur le plus petit sous-groupe algébrique distingué qui contient ce groupe. Il transite ainsi par

$$\begin{pmatrix} M & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto M, \tag{29}$$

où M est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

Là encore, l'argument sur les classes de Chern permet de conclure que la représentation est triviale : les matrices M diagonales sont dans le noyau et le sous-groupe distingué qu'elles engendrent coïncide avec le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Nous avons donc montré dans tous les cas que la représentation de P était triviale, ce qui assure que X est un produit. Le théorème est démontré. □

Exemple 6.1. Pour les surfaces de Hopf, le revêtement universel coïncide avec le fibré tautologique de $\mathbb{P}^1$ (de fibre $\mathbb{C}^*$ et de classe de Chern -1). Cette surface n'a donc aucun endomorphisme non injectif qui soit de degré 1 dans les fibres. Nous pourrions le montrer directement en travaillant sur le revêtement universel $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

6.4. **Application.** Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit maintenant de juxtaposer le paragraphe 6.2, la proposition 6.2 et le théorème de K.H. Paranjape et V. Srinivas : si f est un endomorphisme sans facteur inversible, la base de la fibration de Tits doit être un produit d'espaces projectifs et f induit un produit d'endomorphismes non inversibles donc la fibre est une nilvariété.

Remarque 6.1. Certains endomorphismes de la base $\Pi_i \mathbb{P}^{m_i}$ ne se relèvent pas en des endomorphismes de X, même si la fibre de Tits est une nilvariété.

Si l'on suppose que la fibre F est un quotient d'un groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, une condition nécessaire et suffisante est que les endomorphismes $f_i : \mathbb{P}^{m_i} \to \mathbb{P}^{m_i}$ aient tous même degré pour les indices i tels que la suspension de F au-dessus de $\mathbb{P}^{m_i}$ est non triviale. Ce résultat peut être obtenu en utilisant les arguments présentés au cours des exemples 5.2 et 5.3. Nous le laissons en exercice.

7. Endomorphismes irréductibles

Dans [10], J.-Y. Briend et J. Duval montrent que les endomorphismes non inversibles de l'espace projectif possèdent tous une unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale. De plus, cette mesure coïncide avec la limite, lorsque k tend vers l'infini, des mesures de moyenne sur les points périodiques de période inférieure à k. Il s'agit d'un résultat particulièrement frappant. De surcroît, il n'est pas nécessaire de supposer que la variété ambiante M soit un espace projectif pour employer la méthode mise en œuvre par J.-Y. Briend et J. Duval. Les hypothèses essentielles sont que

1.- M soit projective (ou kählérienne)
2.- le degré topologique $\deg(f)$ de l'endomorphisme majore strictement les autres valeurs spectrales de la transformation linéaire
$$f_* : H_*(M;\mathbb{R}) \to H_*(M;\mathbb{R})$$
obtenue par l'action de f sur l'homologie de M.

Ces deux propriétés sont satisfaites par les endomorphismes de l'espace projectif et par les endomorphismes (affines) des tores dont la partie linéaire est une similitude. La question est : existe-t-il d'autres exemples ? Nous cherchons donc en priorité à décrire les endomorphismes qui ne préservent pas de fibration non triviale.

Nous ne supposerons plus que la variété étudiée est homogène, mais qu'elle est kählérienne et que sa dimension de Kodaira est positive ou nulle (*cf.* §2).

Proposition 7.1. *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension n dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Soit $f : M \to M$ un endomorphisme dont le degré topologique $deg(f)$ est strictement plus grand que* 1. *Si $deg(f)$ n'appartient pas au spectre de $f_* : H_{n-1,n-1}(M,\mathbb{R}) \to H_{n-1,n-1}(M,\mathbb{R})$ alors, après un revêtement étale fini de M, ou bien M est un tore, ou bien f a un facteur inversible (voir la définition 1.1).*

Ce résultat montre que pour trouver de nouveaux endomorphismes redevables de la méthode Briend-Duval il faut chercher parmi les variétés de dimension de Kodaira négative. À priori, on peut d'ailleurs se contenter d'étudier celles qui sont rationnellement connexes (*voir* [12]).

Démonstration. D'après le théorème 2.2, f est un revêtement étale de M.

Soit k un entier strictement positif pour lequel $K_M^{\otimes k}$ possède une section non identiquement nulle. Puisque l'espace des sections holomorphes de $K_M^{\otimes k}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe une section Ω de $K_M^{\otimes k}$ et un nombre complexe non nul α tel que

$$f^*\Omega = \alpha\,\Omega. \tag{31}$$

En particulier, le diviseur des zéros de Ω est invariant à la fois par f et par f^{-1} ; au niveau homologique, ceci se traduit par l'équation

$$f_*[(\Omega)_0] = \deg(f)\,[(\Omega)_0]. \tag{32}$$

L'hypothèse faite dans l'énoncé montre alors que $[(\Omega)_0]$ est nulle ; la forme Ω ne s'annule donc pas et le fibré en droites K_M est un fibré de torsion ($K_M^{\otimes k}$ est trivial).

D'après un théorème célèbre de Fedor A. Bogomolov (*voir* [7], partie I), la variété M possède un revêtement fini M' qui est le produit d'un tore A par une variété simplement connexe Q. La projection sur A coïncide avec le morphisme d'Albanese et détermine donc une fibration f-équivariante. La variété Q est simplement connexe et sa dimension de Kodaira est nulle, donc tout endomorphisme de Q est un automorphisme (*cf.* thm. 2.2) ; en outre, le groupe des automorphismes de Q est discret [7]. L'argument donné pour démontrer la proposition 3.3 montre alors que f agit diagonalement sur le produit $M' = A \times Q$ et que la projection de M' sur Q fournit un facteur inversible de f. □

Remarque 7.1. Nous pensons que l'hypothèse reliant le degré de f au spectre de f_* n'est pas essentielle. En effet, supposons que la dimension de Kodaira de M est nulle, car sinon on peut réduire le problème à l'aide du théorème 2.1. Si f ne préserve aucune fibration, nous pouvons supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale (*cf.* §2.3). Dans ce cas, Frédéric Campana conjecture que le groupe fondamental de M est fini. Le revêtement universel de M serait alors une variété complexe compacte simplement connexe dont la dimension de Kodaira est nulle : tous ses endomorphismes sont donc des automorphismes (*cf.* les arguments relatifs à Q ci-dessus).

Proposition 7.2. *Soit $f : M \to M$ un endomorphisme non inversible d'une variété kählérienne compacte. Supposons que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle et qu'il existe une classe de cohomologie kählérienne $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha]$ soit proportionnelle à $[\alpha]$. Il existe alors un revêtement fini de M qui est un tore.*

Démonstration. Notons q le nombre réel positif tel que

$$f^*[\alpha] = q[\alpha]. \tag{33}$$

J.P.-Serre a montré dans [26] que les valeurs propres de f^* sur chaque groupe de cohomologie $H^{p,p}(M;\mathbf{C})$ sont de module q^p. Le degré topologique de f est égal à q^n où n est la dimension de M : nous sommes donc dans le cadre de la proposition précédente, dont nous poursuivons la démonstration avec les mêmes notations. Notons au passage que q est strictement plus grand que 1 car f n'est pas inversible. Soit a un point de la variété d'Albanese A de M' et Q_a la fibre du produit $M' = A \times Q$ au-dessus de a. Puisque f agit par automorphisme sur Q, $f^{-1}(Q_a)$ est constitué d'exactement q^n fibres. Celles-ci sont toutes homologues à Q_a et, M' étant kählérienne, la classe d'homologie $[Q]$ n'est pas nulle. Puisque la valeur propre q^n n'apparaît pas sur les homologies de dimension intermédiaire, ceci montre que Q est réduite à un point. Autrement dit, M' est un tore. □

Références

[1] Dmitri N. Akhiezer. Homogeneous complex manifolds. In *Several complex variables IV, Encyclopaedia, Math. Sci., 10*, pages 195–244. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[2] Dmitri N. Akhiezer. *Lie group actions in complex analysis.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.

[3] Ekaterina Amerik. Maps onto certain Fano threefolds. *Doc. Math.*, 2 :195–211 (electronic), 1997.

[4] Ekaterina Amerik. On a problem of Noether-Lefschetz type. *Compositio Math.*, 112(3) :255–271, 1998.

[5] Ekaterina Amerik. On endomorphisms of projective bundles. *Prépublications d'Orsay*, (28) :1–14, 2002.

[6] Ekaterina Amerik, Marat Rovinsky, and Antonius Van de Ven. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(2) :405–415, 1999.

[7] Arnaud Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4) :755–782 (1984), 1983.

[8] Arnaud Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :53–58, 2001.

[9] Armand Borel and Reinhold Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145 :429–439, 1961/1962.

[10] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. *Pub. Math. I.H.E.S.*, 93 :145–159, 2001.

[11] Eugenio Calabi and Beno Eckmann. A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. *Ann. of Math. (2)*, 58 :494–500, 1953.

[12] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[13] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry. 2nd ed.* Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1994.

[14] Mikhail Gromov. On the entropy of holomorphic map. *Manuscrit*, 1980.

[15] Alan T. Huckleberry. Complex homogeneous manifolds. In *Several complex variables VI, Encyclopaedia, Math. Sci., 69*, pages viii+310. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[16] Anthony W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2002.

[17] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

[18] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[19] Robert Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive vector bundles. In *Complete intersections (Acireale, 1983)*, pages 29–61. Springer, Berlin, 1984.

[20] Laurent Meerseman. *Construction de variétés complexes*. Thèse de doctorat de l'Université de Lille, 1998.

[21] Noboru Nakayama. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math.*, 56(2) :433–446, 2002.

[22] Kapil H. Paranjape and Vasudevan Srinivas. Self-maps of homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 98(2) :425–444, 1989.

[23] Klaus Peters. Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.*, 15 :222–231, 1964.

[24] R. F. Rohmfeld. Stability of homogeneous vector bundles on $\mathbf{c}\mathrm{p}_n$. *Geom. Dedicata*, 38(2) :159–166, 1991.

[25] Eiichi Sato and Yoshio Fujimoto. On smooth projective threefolds with non-trivial surjective endomorphisms. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 74(10) :143–145, 1998.

[26] Jean-Pierre Serre. Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil. *Ann. of Math. (2)*, 71 :392–394, 1960.

[27] Jacques Tits. Espaces homogènes complexes compacts. *Comment. Math. Helv.*, 37 :111–120, 1962/1963.

[28] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.

[29] Jörg Winkelmann. Holomorphic self-maps of parallelizable manifolds. *Transform. Groups*, 3(1) :103–111, 1998.