Suites réelles et limites

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Licence 1 Administration Economique et Sociale

Sébastien Pommier

2007 - 2008

Définition

Soit u le nom d'une telle suite, on note u_n l'image par u de n

$$u : n \in \mathbb{N} \longrightarrow u_n \in \mathbb{R}$$

Il existe deux grandes manières de définir les suites.

- La première exprime directement la relation entre n et u_n
- La seconde consiste à préciser une relation de récurence entre les termes consécutifs de la suite et de donner la valeur initiale de la suite
- Exemples :

Sens de variation

- Une suite $(u = u_n)$ est croissante (resp. décroissante) à partir du rang p si et seulement si :

$$\forall n \geq p, \quad u_{n+1} \geq u_n, \quad (resp.\ u_{n+1} \geq u_n\ )$$

- Pour déterminer le sens de variation d'une suite il est parfois plus facile de calculer le rapport entre deux termes successifs de la suite, que de calculer la différence.
- Exemple : Soit (u) définie par $u_n = 2^n$

Convergence

DEFINITION

- La suite (u_n) a pout limite l si pour un nombre réel $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-il, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \varepsilon$$

- Toute suite monotone et bornée est convergente.

EXEMPLES

$$Lim\ v_n = \frac{1}{n}$$

$$Lim\ u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$$

Propriétés 1

- La suite $u = (u_n)$ admet une limite infinie positive et l'on note

$$\lim u = +\infty$$

si pour tout réel A, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_n > A$$

- La suite $u = (u_n)$ admet une limite infinie négative et l'on note

$$\lim u = -\infty$$

si pour tout réel B, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_n < B$$

Propriétés 2

- Il faut remarquer que quelque soit un rationnel $r > 0$,

$$\begin{aligned} \lim n^r &= +\infty \\ \lim n^{-r} &= 0 \end{aligned}$$

- Soit u une suite réelle telle que

$$\lim u_n = l$$

alors si $l \neq 0$:

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

Propriétés 3

- Rappelons un certain nombre d'opérations sur les limites, pour des suites convergentes :

$$\begin{aligned} \lim\left(u_n + v_n\right) &= \lim u_n + \lim v_n \\ \lim \lambda u_n &= \lambda \lim u_n \\ \lim u_n v_n &= \lim u_n \times \lim v_n \end{aligned}$$

- Pour les limites infinies (avec des notations "simplifiées) :

$$\begin{aligned} l + \infty &= +\infty \\ l - \infty &= -\infty \\ +\infty + \infty &= +\infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \end{aligned}$$

Suites arithmétiques

- Une suite arithmétique u_n est définie par la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \mathbb{R}, \quad u_n = u_{n-1} + r$$

- Soit u une suite arithmétique de raison r avec $u_0 = a$, les termes suivants sont :

$$u_1 = a + r, \quad u_2 = a + 2r, \ldots, \quad u_p = a + pr$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a + nr$$

- Soit u_n une série arithmétique $u_n = a + nr$, on appelle série arithmétique, et l'on note s_n la grandeur :

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$$

$$s_n = a(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} r$$

Suites géométriques

- DEFINITION
- Une suite géomérique u_n est définie s'il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

- Le terme q est la raison de la suite. Si le premier terme de la suite est connu $u_0 = b$ alors tous les termes de la suite sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \mathbb{R}, \quad u_n = b \times q^n$$

Propriétés 1

- PROPRIETES
- Si $q = 1$ la suite est constante :

$$u_n = b, \forall n.$$

- Si $q > 1$ la suite est monotone croissante:

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = q > 1$$

- La suite géométrique ne converge pas :

$$Lim(u_n) = +\infty \; si \; b > 0$$
$$Lim(u_n) = -\infty \; si \; b < 0$$

Propriétés 2

- Si $0 < q < 1$:

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = q < 1$$

La suite est monotone :

- CROISSANTE si b<0
- DECROISSANTE si b>0
- La suite est convergente

$$Lim(u_n) = 0$$

- Si $-1 < q < 0$ les termes de la suite sont alternativement positifs puis négatifs. La suite n'est pas monotone mais converge vers 0.
- Si $q =_1$ Les termes de la suite sont alternativement b et $-b$ la suite est périodique.
- Si $q < -1$ La suite n'est pas bornée.
- Il faut retenir :

$$lim(u_n) = 0, \ ssi \ |q| < 1$$

Applications économiques et financières

- Les suites sont très présentes dans le calcul économique et financier. Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ servent à représenter différentes grandeurs réelles (agrégats macroéconomiques ou données microéconomiques) en fonction du temps dans les modèles discrets.
- Le temps est une variable entière (mesurée en heures, jour, mois, année) pour calculer un taux de croissance, les intérêts d'un placement, les mensualités d'un emprunt etc...

Equilibre Offre-Demande

- *Exercice de contrôle continu 2006-2007*
- Sur le marché d'une bien la demande D et l'offre S vérifient aux périodes successives ($t \in \mathbb{N}$) les relations suivantes

$$D_t = -6p_t + 26$$

$$S_t = 4(p_{t-1} - 1)$$

où p_t représente le prix du bien à la période t.

1. Interpréter les relations d'offre et de demande
2. Déterminer l'équation de récurrence de p_t à l'équilibre (i.e. $\forall t, D_t = S_t$)
3. Calculer la limite, si elle existe de (p_t) notée p
4. Etudier la convergence de la suite $(p* = p_t - p)$. Interpréter.

Actualisation 1

- *Seconde session 2006-2007*
- La valeur à la date t d'un revenu futur perçu en $t+1$ est calculée de la manière suivante :

$$R_t = \frac{1}{1,05} R_{t+1}$$

1. Exprimer R_t en fonction de R_{t+2} puis R_{t+3}.
2. Exprimer la valeur en t d'un flux de revenu perçu pendant 3 ans
3. Soit F la valeur de ce flux (somme) de revenus futurs. Quelle est la valeur en t d'un flux de revenu perçu durant n années ?
4. Quelle est la limite de cette valeur lorsque n tend vers l'infini.

Actualisation 2

- La capacité de remboursement d'un individu est de 10 000 euros par an (cette somme comprend une part du capital et les intérêts). Pour les prêts immobiliers à 20 ans, sa banque lui propose un taux d'intéret de 5
  1. Dans ces conditions quel montant de capital l'individu peut rembourser chaque année ?
  2. Quel montant de capital l'individu peut emprunter pour son acquisition immobilière ?
- *On donne*

$$\frac{1}{1,05} = 0,95 \ ; \ \frac{1}{0,05} = 20 \ ; \ \frac{1}{1,05^{20}} = 0,38$$