Principes de l'optimisation

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Licence 1 Administration Economique et Sociale

Sébastien Pommier

2007 - 2008

- L'étude complète des fonctions permet de détecter les *extrema*.
- Les problèmes économiques se réduisent rarement à la minimisation ou à la maximisation d'une grandeur.
- Plus fréquemment, les économistes vont chercher à **optimiser**, c'est à dire à maximiser ou minimiser **sous contrainte**.
- Le programme de la firme concurrentielle est une simple maximisation du profit, puisqu'elle est atomistique, *price taker* et qu'elle n'a pas de problèmes de débouchés.
- Le programme du monopoleur consiste à maximiser son profit sous la contrainte d'écouler sa production, il intègre alors la fonction de demande dans l'écriture de la fonction de profit

Pour poser correctement le problème de l'optimisation il convient de définir certaines notions :

Quelques définitions

1. La fonction objectif : désigne l'expression dont on recherche l'extremum
2. La variable de contrôle : désigne la variable pour laquelle la fonction objectif atteint un extremum :
3. La contrainte : relation limitant les valeurs possibles de la variable de contrôle

Un exemple

Une firme cherche la quantité de travail l qu'elle doit embaucher pour produire sachant que sa fonction de production est : $y = Al^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$

1. La fonction objectif est la fonction de profit : $\Pi = py - wl$ avec p et w designant respectivement les prix de l'output et de l'input.
2. La variable de contrôle est l et la contrainte est la fonction de production
3. On cherche donc $l*$ solution de :

$$\begin{aligned} ArgMax \quad & \Pi = py - wl \\ s.c. \quad & y = Al^{\alpha} \end{aligned}$$

Résolution

La résolution est très simple dans le cas d'une fonction à une variable avec une contrainte, il suffit de substituer y par la contrainte dans l'expression de la fonction objectif.
Le problème revient à trouver $l*$ solution de :

$$ArgMax\Pi = pAl^{\alpha} - wl$$

La condition du premier ordre impose $\Pi'(l) = 0$ soit :

$$pA\alpha l *^{\alpha-1} - w = 0$$

Soit :

$$l* = \left(\frac{A\alpha}{w/p}\right)^{\alpha-1}$$

On vérifie que $\Pi'' = pA\alpha(\alpha-1)l*^{\alpha-2} < 0$
Il s'agit de la fonction de demande de travail, qui est décroissante avec le salaire réel w/p

Il n'y a plus qu'à vous entrainer

Just for fun

1. La somme de deux nombres positifs est égale à 100. Trouver le couple de nombres :
   - dont le produit est maximal
   - dont la somme des carrés est minimale

2. On construit une boîte de base rectangulaire, sans couvercle, ayant 2 faces carrées de 10 m^3 de volume. La base coûte 100 $euros/m^2$ et les côtés 60 $euros/m^2$
   - Euh... Commencer par faire un dessin !
   - Chercher les dimensions de la boîte qui permettent de minimiser le prix.

Choix de portefeuille

Un portefeuille boursier est composé de 2 titres A et B en proportions respectives a et b. La rentabilité R de ce portefeuille est donnée par

$$R = 4a + 8b - (a^2 + 4b^2)$$

1. Interpréter la relation R
2. Quelle diversification de portefeuille garantit la meilleure rentabilité ?

Régression linéaire

On cherche à déterminer l'équation de la droite $y = \alpha + \beta x$ qui passe au plus près du nuage de points formé par l'observation des couples x_i et y_i. Sous certaines hypothèses, une méthode d'estimation particulièrement efficace consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre y_i et $\alpha + \beta x_i$. Il s'agit de la méthode **des moindres carrés ordinaires**.

- Ce type de problème est plus complexe que ce que l'on a vu jusqu'à présent car la fonction-objectif compte désormais 2 variables de contrôle : α et β. En revanche il s'agit d'un problème d'optimisation 'libre' (*i.e.* sans contrainte).
- Pour clarifier un peu les choses, écrivons d'abord la fonction-objectif (à minimiser) :

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

Notions de dérivées partielles

Soit une fonction $z = f(x,y)$ que l'on peut représenter par une surface (rèpère en 3 dimensions). On appelle dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x,.) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

La dérivée partielle de f par rapport à y est :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(.,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

L'accroissement de f provient d'un accroissement de x ou de y ou des deux. La différentielle totale de f est définie comme :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Le calcul des dérivées partielles est basé sur les règles de dérivation habituelle par rapport à une variable, l'autre variable est considérée comme un scalaire.

Optimisation

Soit $z = f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$, cette fonction admet un extremum pour le couple $(x_0; y_0)$ si :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

NOTE, Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante (Cf. 2ème année). Dans les applications économiques, on supposera que la condition du second ordre est toujours vérifiée.

Estimateurs des moindres carrés ordinaires

Pour minimiser $S(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ il faut résoudre le système suivant :

$$\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{N} -2y_i + 2(\alpha + \beta x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N} -2x_i y_i + 2x_i(\alpha + \beta x_i) = 0$$

La solution est :

$$\alpha = \overline{y} - \beta \overline{x}$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum_i x_i . y_i}{N} - \overline{x}.\overline{y}}{\frac{\sum_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)}$$