Dérivation, accroissement et calcul marginal

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Licence 1 Administration Economique et Sociale

Sébastien Pommier

2007 - 2008

Un exemple introductif

- Une bille est lancée du haut d'une tour. Nous étudions la relation entre le temps t (mesuré en secondes) de sa chute et la distance parcourue $f(t)$ (mesurée en mètres).
- On se donne la forme analytique suivante :

$$f(t) = t^2$$

- La vitesse moyenne est de :

temps	distance	vitesse
1ere seconde	1 m	1 m/s
2ème seconde	4 m	2 m/s
3ème seconde	9 m	3 m/s
...	...	...
de la 4ème à la 5ème	$5^2 - 4^2 = 9$	9 m/s
de la 4ème à la 4,5ème	$(4,5)^2 - 4^2 = 4,25$	8,5 m/s
de la 4,5ème à la 5ème	$5^2 - (4,5)^2 = 4,75$	9,5 m/s

- La vitesse augmente avec le temps de la chute

Un exemple introductif

Définition

La vitesse moyenne est définie par la variation de la distance rapportée à la variation du temps (Δt) :

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

APPLICATION : Calcul de la vitesse moyenne à la 4eme seconde :

$$\frac{f(4+\Delta t)-f(4)}{\Delta t}=\frac{(4+\Delta t)^2-(4)^2}{\Delta t}=8+\Delta t$$

Vitesse instantanée

On appelle vitesse instantanée, la vitesse parcourue pendant une durée infinitésimale $\Delta t \to 0$

$$8+\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 8$$

Dérivée en un point

Soit une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle I

Définition

- Le taux d'accroissement de la fonction $f(x)$ est défini comme la variation de f rapportée à la variation de x.
- La taux d'accroissement de f en un point x_0 est la FONCTION définie sur $I - \{x_0\}$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- La fonction f est DERIVABLE en x_0 si le taux d'accroissement de f admet une limite finie en ce point. Cette limite est appelée dérivée de f en x_0, que l'on note $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Propriétés

Approximation linéaire

La dérivabilité de f en x_0 équivaut à l'existence d'une limite nulle en x_0 de la fonction $\epsilon(x)$:
$\forall x \in I$,

$$\begin{aligned}\epsilon(x) &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\\ f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x)\end{aligned}$$

Sachant $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

est la tangente de la courbe représentative de f au point x_0.

Remarques

Propositions

1. La dérivée en un point est unique. La limite finie d'un accroissement à droite est égale à la limite finie d'un accroissement à gauche.
2. Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque est fausse.
3.
   - Si f est définie sur I
   - Si f admet un extremum en $x_0 \in I$
   - Si f est dérivable en x_0

   Alors $f'(x_0) = 0$. La réciproque est fausse.
4. Cas particuliers de non-dérivabilité $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = |x|$ ne sont pas dérivables pour $x_0 = 0$

Calcul des dérivées

Note

La limite de l'accroissement de f quand $x \to x_0$ peut être difficile à calculer (car elle dépend de x_0). La fonction dérivée de $f(x)$, notée $f'(x)$ peut être définie de la manière suivante :
$\forall h \in I - \{0\},\ f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Utilisez la définition précédente pour calculer les dérivées suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1- & f(x) = & ax + b \\ 2- & g(x) = & cx^r \\ 3- & v(x) = & \ln x \\ 4- & p(x) = & u(x) \times v(x) \\ 5- & c(x) = & (u \circ v)'(x) \end{array}$$

Formulaire

A retenir

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = x^r & \Rightarrow & f'(x) = r \times x^{r-1} \\
f(x) = \ln x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) = u(x)v(x) & \Rightarrow & f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) \\
f(x) = u[v(x)] & \Rightarrow & f'(x) = v'(x) \times u'[v(x)]
\end{array}
$$

Utilisez le formulaire précédent pour calculer les dérivées suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
1- & f(x) = & \dfrac{u(x)}{v(x)} \\
2- & g(x) = & a^x
\end{array}
$$

Introduction

Il existe de nombreuses applications économiques au calcul des dérivées. En particulier :

- Le calcul de taux de croissance instantanée
- Le calcul d'élasticités
- Le calcul marginal (analyse de fonctions de coût)

Dans de nombreux manuels (Micro-économie, Macro-économie) la notation des dérivées est différente. A partir de la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée représente la variation de $f(x)$ consécutive à une variation infinitésimale de x, qui est fréquemment notée :

$$\frac{df(x)}{dx}$$

La notation d représente les "petits accroissements"

$$dx = \lim_{0} \Delta x$$

Taux de croissance instantanée

Définition

Soit $f(t)$ une fonction où t représente une mesure continue du temps ($t \in \mathbb{R}$). On appelle *taux de croissance instantanée* de f, et l'on note $\dot{f}$, la grandeur :

$$\dot{f} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\frac{df(t)}{dt}}{f(t)}$$

A QUOI CA SERT ?

Toutes les variables économiques peuvent être considérées comme des fonctions implicites du temps. Le taux de croissance instantanée permet de calculer le taux de croissance d'une combinaison de variables dont on connaît l'accroissement instantané.

En outre, ce calcul représente une bonne approximation des taux de croissance observés -si ceux si sont assez faibles.

Exemple

Considérons le cas de la dette publique (notée B) exprimée en pourcentage du PIB (noté Y), le ratio de dette publique b est :

$$b(t) = \frac{B(t)}{Y(t)}$$

avec :

$$B(t) = \quad Ae^{rt} \quad Y(t) = Be^{gt}$$

1. Calculez le TCI de la dette publique et du PIB. Interprétez
2. Calculez le TCI du ratio de la dette publique. Interprétez

Conclusion

A retenir

1. Si le taux de croissance d'une variable X est égal à z alors on peut écrire :

$$X(t) = X(0) \times e^{zt}$$

2. Pour calculer le TCI d'une combinaison de variables (produit, quotient ou puissance), il est souvent plus simple de passer par une linéarisation logarithmique :

$$\ln X(t)' = \frac{X'(t)}{X(t)}$$

Ainsi dans l'exemple du ratio de dette publique :
$\ln b(t) = \ln B(t) - \ln Y(t)$
$\ln b(t)' = \ln B(t)' - \ln Y(t)'$

$$\frac{b'(t)}{b(t)} = \frac{B'(t)}{B(t)} - \frac{Y'(t)}{Y(t)} = r - g$$

Elasticité

Lorsqu'une variable y s'exprime comme une fonction d'une autre variable x il peut être intéressant de mesurer l'impact de x sur y.
Pour mesurer cet effet, on peut penser à calculer la variation de y consécutive à une variation de x, soit le calcul : $\Delta y / \Delta x$

Exemple

On s'intéresse à l'impact du prix d'un bien (noté p) sur les quantités demandées de ce bien (notée y).
La fonction de demande est donnée par : $y(p) = \frac{3}{2p}$

p	1	2	3
y	1,5	0,75	0,5
$\frac{y(p)-y(1)}{p-1}$	-	-0,75	-0,5

La réaction des quantités demandées dépend de la l'ampleur de la variation des prix.

Elasticité

Pour que la mesure de l'effet de x sur y ne dépende pas de Δx, il suffit de choisir $\Delta x \to 0$, c'est-à-dire calculer la dérivée de $y(x)$

Exemple -suite

La dérivée de la fonction de demande est :

$$\frac{dy}{dp} = \frac{-3}{2p^2}$$

PROBLEME : La dérivée est sensible à l'échelle de mesure. (Si y est mesuré en dizaine d'unités de biens, la dérivée est également multipliée par 10).
Il convient alors de mesurer un effet relatif (sans dimension) plutôt qu'un effet absolu.

Elasticité

Définition

On appelle élasticité de f par rapport à x la variation relative de f consecutive à une variation relative et infinitésimale de x

$$\epsilon_{f/x} = \frac{df/f}{dx/x} = f'(x) \times \frac{x}{f(x)}$$

Exemple -suite

L'élasticité de la demande par rapport au prix :

$$\epsilon_{y/p} = \frac{-3}{2p^2} \times p \times \frac{2p}{3} = -1$$

Lorsque le prix augmente de 1%, la demande diminue de 1%

Calcul Marginal

Le raisonnement "à la marge" est également très fréquemment utilisé en économie. Il est notamment utile dans les problèmes d'optimisation.

Définition

1. Les coûts de production d'une entreprise sont pour partie indépendants des quantités produites (coûts fixes) et pour partie liés au niveau de production réalisé (coûts variables).
2. Soit $C(x)$ le coût total de production et x les quantités produites. On appelle coût moyen de production et l'on note $CM(x)$ la fonction :

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

3. On appelle coût marginal de production et l'on note $Cm(x)$ la fonction :

$$Cm(x) = \frac{dC(x)}{dx}$$

4. On peut aussi distinguer Recette Profit, Productivité, totales, moyennes, marginales etc...

Un exemple

Les experts du Ministère de l'économie pensent que la quantité de travail fournie par les actifs occupés (notée l) est reliée au niveau du PIB (noté y) par une relation du type :

$$y(l) = Al^{\alpha}$$

avec $A > 0$ et $\alpha > 0$

1. Calculer la productivité horaire moyenne, la productivité marginale
2. Etudier le sens de variation de la productivité moyenne
3. On fixe $A = 10$ et $\alpha = 0,8$, comment évolue la productivité moyenne si la quantité de travail diminue de 5% ?

Rappel

Les fonctions dérivées représentant la limite du taux d'accroissement d'une fonction, l'étude de leur signe permet de déterminer le sens de variation des fonctions.

On sait que

Soit $f(x)$ une fonction définie et dérivable sur I, alors :

1. La fonction f est croissante lorsque $f'(x) > 0$
2. La fonction f est décroissante lorsque $f'(x) < 0$

Le signe de la dérivée peut changer en fonction des valeurs de x, cela signifie qu'une fonction f peut être croissante puis decroissante et ainsi croître de moins en moins vite puis décroître d'abord lentement puis de plus en plus vite

Notion de dérivée successive

Les fonctions dérivées $f'(x)$ peuvent elles-mêmes être dérivables :

Définition

On appelle dérivée seconde de $f(x)$ et l'on note $f''(x)$:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Et de manière générale, on appelle dérivée n-ième (ou d'ordre n) de $f(x)$ et l'on note $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

Concrètement pour calculer la dérivée seconde de $f(x)$ il suffit de calculer $f'(x)$ puis de dériver une nouvelle fois $f'(x)$.

Notion de convexité

Définition

1. f est une fonction convexe sur un intervalle I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

2. f est une fonction concave sur un intervalle I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Interprétation et propriétés

D'après la définition :

1. f est convexe lorsque l'image du point moyen est inférieure à la moyenne des images. La pente de f est donc de plus en plus forte d'où : $f''(x) > 0$
2. f est concave lorsque l'image du point moyen est supérieur à la moyenne des images. La pente de f est donc de moins en moins forte d'où : $f''(x) < 0$

Recherche d'extrema

Propriétés

Une fonction f admet un extremum en x_0 lorsque :

1. sa dérivée s'annule en x_0 : $f'(x_0) = 0$,
2. change de signe au voisinage de x_0 : $f''(x_0) \neq 0$.

Intuitivement, lorsqu'une fonction atteind un maximum, elle est nécéssairement croissante puis décroissante. Sa pente est d'abord positive, puis diminue jusqu'à devenir nulle (la fonction ne croît pas au-delà de son maximum) enfin la pente devient négative. La pente de f est décroissante d'où $f'' < 0$

On retiendra :

Lorsque $f'(x_0) = 0$:

1. f admet un maximum en x_0 si $f''(x_0) < 0$,
2. f admet un minimum en x_0 si $f''(x_0) > 0$,
3. f admet un point d'inflexion en x_0 si $f''(x_0) = 0$ et si f'' change de signe au voisinage de x_0.

Analyse d'une fonction de coût

Enoncé

Un fabricant de postes de radio produit x postes par semaine pour un coût total de :

$$CT(x) = \frac{x^2}{25} + 3x + 100$$

Première partie

1. Calculer et étudier les fonctions de coût moyen et de coût marginal du fabricant
2. Quel est son seuil de rentabilité ?
3. Quel est le point mort ddu fabricant si le prix de vente est de 10 euros ?

Question 1

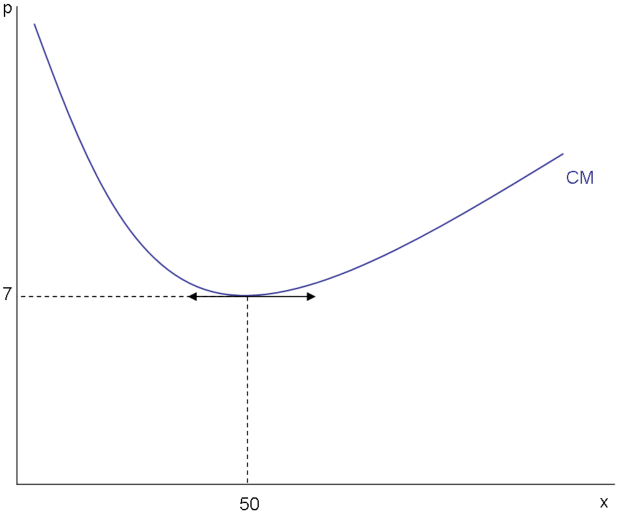
1. Le coût moyen est donné par :

$$CM(x) = \frac{CT(x)}{x}$$

2. L'étude du sens de variation de $CM(x)$ repose sur l'étude du signe de la dérivée : $CM'(x)$
3. Le coût marginal est donné par :

$$Cm(x) = \frac{dCT(x)}{dx} = CT'(x)$$

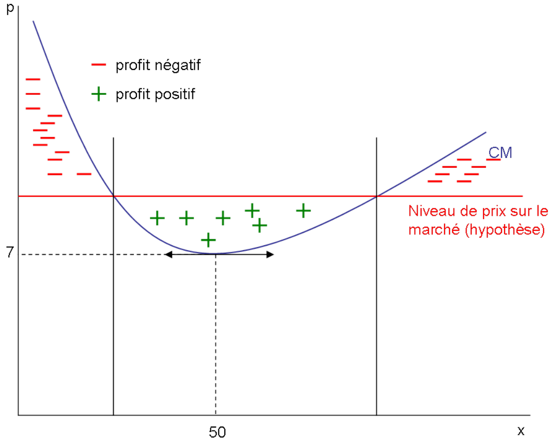
Graphique 1



Question 2

Le seuil de rentabilité correspond aux niveau de production à partir duquel la firme réalise un profit positif.

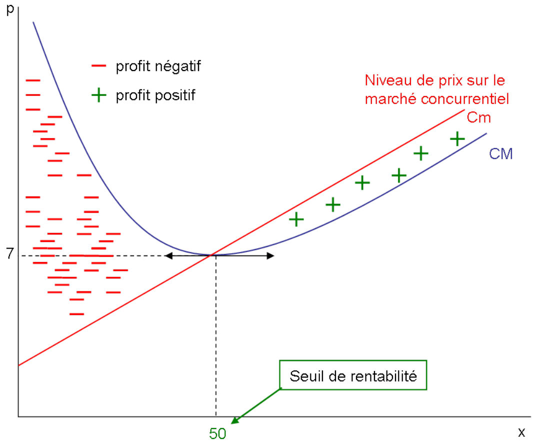
$$\Pi(x) = p.x - CT(x)$$



Question 2 (suite)

Dans un univers concurrentiel, le profit $\Pi(x)$ est maximal lorsque :

$$\Pi'(x) = 0 \Rightarrow p = Cm$$



Question 3

Dans un univers qui n'est pas parfaitement concurrentiel, le fabricant peut "'choisir"' son prix de vente, on détermine alors le **point mort** du fabricant (Cf. graphique précédent)

Analyse d'un équilibre partiel

Deuxième partie

La demande de postes de radio est donnée par :

$$x^d(p) = 75 - 3p$$

L'énoncé concernant les coûts de production est inchangé.

Question

1. Déterminer le prix et les quantités d'équilibre dans une situation de concurrence pure et parfaite
2. Etudier les fonctions de recettes moyenne et marginale du fabricant en situation de monopole
3. Déterminer le prix et les quantités d'équilibre dans une situation de monopole

Question 1

Concurrence Pure et Parfaite

Le prix et les quantités d'équilibre sont obtenus à l'intersection des courbes d'offre et de demande. L'offre est déterminée par le programme de maximisation du profit d'où il vient $p = Cm$

$$x* = 75 - 3p*$$
$$p* = \frac{2}{25}x* + 3$$

Question 2

Monopole

La recette des entreprises concurrentielles s'écrit $R(x) = p \times x$ Ce qui suppose que quelle que soit les quantités produites, elles seront écoulées au prix p. Cette représentation est réaliste si beaucoup d'offreurs interviennent sur le marché et que la demande qui s'adresse à chacun d'eux est inélastique.
S'il existe un seul offreur le prix auquel il peut écouler certaines quantité dépend de la disposition à payer des consommateurs $p(x)$ (fonction de demande réciproque)

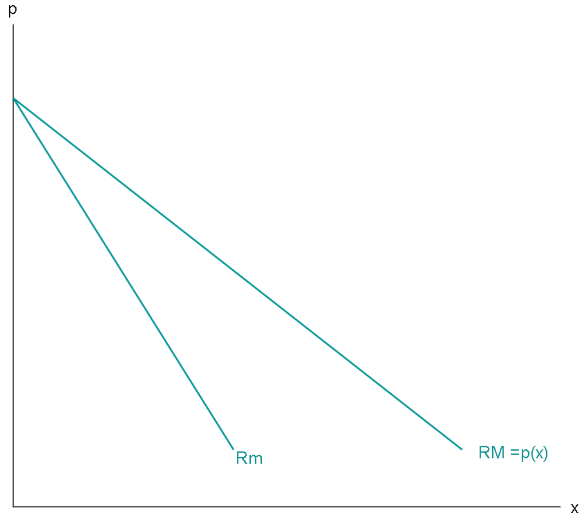
1. La recette du monopoleur s'écrit alors

$$RT(x) = p(x) \times x$$

2. La recette moyenne correspond à la fonction de demande inverse
3. La recette marginale est donnée par :

$$Rm(x) = p'(x).x + p(x)$$

Graphique



Question 3

Le programme du monopoleur

La maximisation du profit $\Pi(x) = p(x) \times x - CT(x)$ conduit à la condition du premier ordre :

$$\Pi'(x) = Rm(x) - Cm(x) = 0 \Rightarrow Rm(x) = Cm(x)$$

Graphique