Fonction numérique d'une variable réelle

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Licence 1 Administration Economique et Sociale

Sébastien Pommier

2007 - 2008

Définition

On définit une fonction f comme une relation numérique **telle qu'à chaque réel** x**, soit associée au plus une image** notée $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des réels admettant une image par f constitue **l'ensemble de définition** de la fonction f, noté D_f.

Notion d'Extrema

Définition

Soit x_0 un élément de D_f (on note aussi $x_0 \in D_f$)

On dit que f atteint un maximum en x_0 lorsque :
$\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que f atteint un minimum en x_0 lorsque :
$\forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0)$

Notion de limite

- Quelques précisions de notation...et d'expression
- On dira : f admet w pour limite en a ou bien f tend vers w lorsque x tend vers a. On écrira de manière équivalente :

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = w$$

- ou bien :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} w$$

Definition

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_*^+ \mid \forall x \in I \cap D_f, \ |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - w| \leq \epsilon$$

Propriétés

- On admet les propriétés suivantes (élémentaires)

$$f(x) \longrightarrow w \implies \lambda f(x) = \lambda w$$

$$\begin{array}{c} f(x) \longrightarrow w \\ g(x) \longrightarrow w' \end{array} \implies \begin{array}{c} f(x) + g(x) \longrightarrow w + w' \\ f(x)g(x) \longrightarrow ww' \end{array}$$

- et si $w' \neq 0$ et que $g(x)$ ne s'annule pas alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{w}{w'}$$

- et encore pour les limites infinies :

$$f(x) \longrightarrow +\infty \implies \begin{array}{c} f(x) + \lambda \longrightarrow +\infty \\ \lambda f(x) \longrightarrow +\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ \lambda f(x) \longrightarrow -\infty \text{ si } \lambda < 0 \\ \frac{1}{f(x)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Propriétés

ATTENTION

Il y a des cas pour lesquels les limites ne sont pas déterminées.

1. La différence de 2 fonctions tendant vers $\pm\infty$.
2. Le quotient de deux fonctions tendant vers 0
3. Le quotient de deux fonctions tendant vers l'infini
4. Le produit d'une fonction tendant vers 0 et d'une fonction tendant vers l'infini.

Limites d'une somme de fonctions

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

		$\lim_{x \to x_0} f$		
		$-\infty$	l	$+\infty$
$\lim_{x \to x_0} g$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
	l'	$-\infty$	$l + l\prime$	$+\infty$
	$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Limites d'un produit ou d'un quotient

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}^*$	0^-	0^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$	0^-	$\frac{1}{l}$	$-\infty$	$+\infty$	0^+

	$\lim\limits_{x\to x_0} f \times g$	$\lim\limits_{x\to x_0} f$				
		$-\infty$	$l \in \mathbb{R}^*_-$	0	$l \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
	$l' \in \mathbb{R}^*_-$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
	0	?	0	0	0	?
	$l' \in \mathbb{R}^*_+$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Formes Indéterminées

Il existe des règles assez simples pour 'lever' les formes indéterminées et calculer les limites, dans le cas de fonctions polynomiales

PROPOSITIONS

- QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS TENDANT VERS L'INFINI : ∞/∞ (ou PRODUIT $0 \times \infty$)
  Il faut mettre en facteur le terme qui croit le plus vite (x à la puissane la plus elevée possible) au numérateur et au dénominateur

- QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS TENDANT VERS 0 quand x tend vers x_0
  Il faut mettre en fateur le terme $(x - x_0)$ au plus haut degré possible

Formes Indéterminées

EXEMPLES

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$

2. $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

3. $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$

Les fonctions usuelles

1. Les fonctions affines : $f(x) = ax + b$
2. Les fonctions puissances rationnelles : $f(x) = Ax^r$ où $r \in \mathbb{Q}$
3. Les fonctions polynômes
4. La fonction logarithme népérien
5. La fonction exponentielle

Les fonctions affines

Definition

Pour $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightsquigarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & ax + b \end{array}$$

est une fontion affine qui à tout réel x associe une image $ax + b$

Propriétés

	x	$-\infty$		0		$+\infty$
$a > 0$	$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$
$a < 0$	$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	b	$\searrow$	$-\infty$
$a = 0$	$f(x)$	b		b		b

Les fonctions de puissances entières

Definition

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Propriétés

Trois cas doivent être distingués :

1. $n = 0$. La fonction est alors définie sur $\mathbb{R}*$, elle est constante :

$$\forall x \in \mathbb{R}*, \quad x^0 = 1$$

2. $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}*$, cette notation permet de désigner les fonctions de puissances paires.
3. $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}*$, c'est le cas des fonctions de puissances impaires.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \longrightarrow x^{2k}$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$x \longrightarrow x^{2k+1}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les fonctions de puissances relatives

Definition

$$\forall x \in \mathbb{R}*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Propriétés

x	$-\infty$		0		$-\infty$
$x \longrightarrow x^{-2k}$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
$x \longrightarrow x^{-(2k+1)}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Les fonctions de puissances rationnelles

Definition

Soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}*$, et $r \in \mathbb{Q}*$ tels que :

$$r = \frac{p}{q}$$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Propriétés

1. Si q est **pair**, la fonction racine q-ieme est la réciproque de la fonction $f(x) = y^q$ sur $\mathbb{R}*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall y \in \mathbb{R}_*^+ :\ x = y^q \Longleftrightarrow y = \sqrt[q]{x} \Longleftrightarrow y = x^{\frac{1}{q}}$$

2. Si q est **impair**, la fonction racine q-ieme est la réciproque de la fonction $f(x) = y^q$ sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} :\ x = y^q \Longleftrightarrow y = \sqrt[q]{x} \Longleftrightarrow y = x^{\frac{1}{q}}$$

Règles de calcul sur les puissances

Pour tout exposant $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ et pour tout réel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (et différents de zéro pour un exposant nul ou négatif) :

$$x^a.x^b = x^{a+b} \ ; \ (xy)^a = x^a.y^a \ ; \ (x^a)^b = x^{ab}$$

et pour tout $x \neq 0$

$$x^0 = 1 \ ; \ x^{-a} = (\tfrac{1}{x})^a = \tfrac{1}{x^a}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x.y)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{xy} = \sqrt[q]{x}.\sqrt[q]{y}$$

Exemple

Résoudre l'équation $x^n = \alpha$, avec $n \in \mathbb{N}*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Les fontions polynômes

Définition

1. On appelle monôme une fonction numérique d'une variable réelle de la forme : $f(x) = a_k x^k$ où $a_k \in \mathbb{R}*$ est le coefficient du monôme où $k \in \mathbb{N}$ est le degré du monôme
2. Une somme de monôme est un polynôme :
   $P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$
   $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$

Calculs usuels sur les fonctions polynomes

- Les quantités conjuguées : Cf exemples *supra*
- La division euclidienne, exple :

$$P(x) = \frac{x^4 - x^3 + x - 2}{x^2 - 2x + 4}$$

La fonction logarithme népérien

Définition

La fonction logarithme népérien est **la** primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de la fonction inverse : $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ qui s'annule en **1**.

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Formulaire

1. La fonction $\ln$ est strictement croissante, on vérifie :
   $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
   $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \approx 2,71828$
2. On admet les règles de calcul suivantes : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2}, \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \; ; \; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \; ; \; \ln\left(x^r\right) = r \ln x$$

3. Généralisation : changement de base

La fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x \longrightarrow e^x \end{array}$ est la réciproque de la fonction ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y$$

NB : Les règles usuelles de calcul sur les exposants s'appliquent.

Formulaire

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
3. $\forall (r) \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^r e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$