

Compléments sur les applications non uniformément dilatantes

19 juillet 2005

Résumé

On décrit les résultats de Pinheiro dans [Pin06] montrant que, sous des hypothèses très très faibles, la construction de structure markovienne décrite dans [Gou06] épuise Lebesgue presque tout point, et donne un temps de retour intégrable. En utilisant des idées analogues, on renforce les résultats de [Gou06], en éliminant un terme d'erreur $\log n$ inutile.

Soit $T : M \rightarrow M$ une application sur une variété compacte M (éventuellement avec bord) et $S \subset M$ un ensemble fermé de mesure nulle au voisinage duquel T est non plate (équations (2), (3) et (4) dans [Gou06]), tel que T est un difféomorphisme local C^2 sur $M \setminus S$. Soit $\delta : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Soit $\lambda > 0$. Pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, on note

$$h_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^0(x) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|DT(T^k x)^{-1}\|^{-1} \geq \frac{\lambda}{2} \right. \\ \left. \text{et pour } i = 1, 2, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} -\log \text{dist}_{\delta(\varepsilon_i)}(T^k x, S) \leq 2\varepsilon_i \right\}.$$

Soit $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0)$ donné par le lemme 2.2 de [Gou06]. On peut alors appliquer la construction de structure markovienne décrite dans [Gou06] en utilisant les temps hyperboliques correspondants. Si on part d'une triangulation U_1, \dots, U_N de M , on obtient des ensembles deux à deux disjoints W_j , chacun inclus dans l'un des U_i , et des temps de retour R_j tels que $T^{R_j}(W_j)$ soit l'un des U_k avec de bonnes propriétés de dilatation.

Le théorème 3.1 de [Gou06] ne s'applique pas sans hypothèse sur les queues, donc on ne sait même pas *a priori* si on obtient une partition de presque tout l'espace. Cependant, on a le théorème suivant sous des hypothèses très faibles :

Théorème 1 (Pinheiro, [Pin06]). *Supposons que, pour presque tout $x \in M$, $h_{\varepsilon^0}^0(x) < \infty$. Alors la structure markovienne recouvre presque toute la variété M .*

On notera $U_i \rightarrow U_k$ s'il existe l'un des $W_j \subset U_i$ avec $T^{R_j}(W_j) = U_k$. On a donc un graphe fini entre les U_i . L'ensemble U_i est *récurrent* s'il existe une chaîne finie telle que $U_i \rightarrow U_{k_1} \rightarrow \dots \rightarrow U_{k_p} \rightarrow U_i$. Les ensembles récurrents sont ceux qui portent les mesures invariantes.

Théorème 2 (Pinheiro, [Pin06]). *Sous les hypothèses du théorème 1, le temps de retour R est intégrable sur les ensembles récurrents.*

On en déduit aisément le résultat suivant (voir par exemple [Gou06]).

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 1, l'application T a un nombre fini de mesures de probabilité invariantes absolument continues ergodiques μ_1, \dots, μ_k , supportées par des ouverts deux à deux disjoints O_1, \dots, O_k . Presque tout point de M est dans le bassin d'attraction d'une de ces probabilités.*

Pour $1 \leq i \leq k$, il existe un entier r_i tel que $\mu_i = \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}$, où $\mu_{i,j}$ est la restriction de μ_i à un ouvert $O_{i,j}$, T envoie $\mu_{i,j}$ sur $\mu_{i,j+1}$, et $\mu_{i,j}$ est mélangeante pour T^{r_i} .

En utilisant des idées analogues aux arguments de Pinheiro, on renforce le théorème 3.1 de [Gou06], pour éviter la perte du facteur $\log n$:

Théorème 4. *Soient T une application non-uniformément dilatante sur une variété compacte M . Alors il existe $\lambda < 1$ tel que la structure markovienne vérifie :*

$$\text{Leb} \left(\bigcup_{R_j > n} W_j \right) = O(\lambda^n + \text{Leb}\{h_{\varepsilon_0}^2 > n\}).$$

Dans une dernière partie, je décris des résultats qui peuvent être obtenus en utilisant seulement des estimées sur le premier temps hyperbolique (ce qui veut dire qu'on est obligé de se passer du lemme de Pliss).

1 Preuve du théorème 1

Notons \mathbb{B}_n l'ensemble des points interdits à l'instant n , et non sélectionnés à ce moment. Autrement dit, $\mathbb{B}_n = I_n \setminus S_n$.

Lemme 5. *On a $\sum \text{Leb}(\mathbb{B}_n) < \infty$.*

Démonstration. Si $B = \tilde{I}_{\geq n+1}^n(x_i^n)$ est une boule interdite au temps n , alors les points de $I_{n+p}^n(x_i^n)$ seront interdits (au plus) pendant un temps p . Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum \text{Leb}(\mathbb{B}_n) &\leq \sum_{i,n} \sum_{p \geq 1} p \text{Leb}(I_{n+p}^n(x_i^n)) \leq \sum_{i,n} \sum_{p \geq 1} p C \sigma^{p/2} \text{Leb}(I_\infty^n(x_i^n)) \\ &= C \left(\sum p \sigma^{p/2} \right) \left(\sum_{i,n} \text{Leb}(I_\infty^n(x_i^n)) \right). \end{aligned}$$

Ce terme est fini, puisque les boules $I_\infty^n(x_i^n)$ sont deux à deux disjointes. □

Lemme 6. *Pour presque tout $x \in M$,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Card}\{1 \leq k \leq n \mid x \in H_k\} > 0.$$

Démonstration. Si A est un ensemble de mesure nulle, montrons que $T^{-1}(A)$ est encore de mesure nulle. Comme T est un difféomorphisme local sur $M \setminus S$, on a $T^{-1}(A) \setminus S$ de mesure nulle. De plus, la finitude de $h_{\varepsilon_0}^0$ pour presque tout x implique que S est de mesure nulle. Par conséquent, $T^{-1}(A)$ est de mesure nulle.

Soient A l'ensemble des points pour lesquels $h_{\varepsilon_0}^0 = +\infty$, et $A' = \bigcup T^{-n}(A)$. Il est de mesure nulle par ce qui précède.

Si $x \notin A'$, il existe une infinité d'instants n pour lesquels

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|DT(T^k x)^{-1}\|^{-1} \geq \frac{\lambda}{2} \text{ et pour } i = 1, 2, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} -\log \text{dist}_{\delta(\varepsilon_i)}(T^k x, S) \leq 2\varepsilon_i.$$

En effet, on peut prendre $h_{\varepsilon_0}^0(x)$, ainsi que $h_{\varepsilon_0}^0(x) + h_{\varepsilon_0}^0(T^{h_{\varepsilon_0}^0(x)}(x))$, et ainsi de suite.

Pour chacun de ces instants n , la proportion d'instants entre 1 et n pour lesquels $x \in H_k$ est supérieure à $\theta > 0$, par le lemme de Pliss [Gou06, lemme 2.2]. Cela conclut la preuve. \square

Par Borel-Cantelli et le lemme 5, presque tout point de M appartient à un nombre fini des \mathbb{B}_n . Soit x un tel point, pour lequel le lemme 6 s'applique. Le point x appartient à une infinité de H_n , il existe donc n tel que $x \in H_n \setminus \mathbb{B}_n$. Le point x sera alors sélectionné à l'étape n . Ainsi, presque tout point est sélectionné.

2 Preuve du théorème 2

Soit X l'extension de M construite en utilisant la partition W_j et les temps de retour R_j . Notons T'_Y l'application induite sur la base de cette extension : elle est markovienne et uniformément dilatante. En particulier, pour chaque classe récurrente \mathcal{U} d'ensembles U_i , T'_Y admet une unique mesure invariante μ absolument continue sur \mathcal{U} , et sa densité est bornée inférieurement et supérieurement. De plus, elle est ergodique.

Pour $x \in \mathcal{U}$, notons $R(x)$ son temps de retour, et $b(x) = 1 + \text{Card}\{1 \leq n < R(x) \mid x \in \mathbb{B}_n\}$. Cette fonction est intégrable pour μ d'après le lemme 5. On notera $S^Y f$ les sommes de Birkhoff d'une fonction f pour la fonction T'_Y . En particulier, $t_i(x) = S_i^Y R(x)$ est le nombre d'itérations de T' correspondant au $i^{\text{ème}}$ retour de x dans \mathcal{U} .

D'après le lemme 6, il existe des entiers n arbitrairement grands pour lesquels $\text{Card}\{1 \leq k \leq n \mid x \in H_k\} \geq \theta n$, pour un certain $\theta > 0$. Soit n un tel entier. Soit $i \geq 0$ tel que $t_i(x) \leq n < t_{i+1}(x)$. Alors

$$\theta t_i(x) \leq \theta n \leq \text{Card}\{1 \leq k \leq n \mid x \in H_k\} \leq \text{Card}\{1 \leq k < t_{i+1}(x) \mid x \in H_k\} \leq S_{i+1}^Y b(x).$$

La fonction b est intégrable. Pour presque tout x , il existe donc une constante C telle que $\forall i \in \mathbb{N}, S_{i+1}^Y b(x) \leq C(i+1)$. On obtient donc :

$$t_i(x) \leq C\theta^{-1}(i+1).$$

Finalement, pour presque tout x ,

$$\liminf t_i(x)/i < +\infty. \tag{1}$$

Rappelons que $t_i(x) = S_i^Y R(x)$. Si la fonction R n'était pas intégrable (pour μ ou Leb, ce qui est équivalent), le théorème de Birkhoff donnerait donc $i = o(t_i(x))$, ce qui est absurde d'après (1). \square

3 Preuve du théorème 4

La démonstration consiste à modifier un petit peu les estimées du paragraphe 3.3 de [Gou06]. Dans ce paragraphe, les références numérotées pointent vers les énoncés de [Gou06].

Lemme 7. *Si $0 < k \leq n$, on a*

$$U_1 \setminus S_n \subset \{x \in U_1 \setminus S_k \mid \forall k < i \leq n, x \notin SH_i\} \cup \left\{x \in U_1 \mid \text{dist}(x, \partial U_1) \leq \lambda_1^{\theta k/2}\right\} \cup Z^6(\theta k/2, n).$$

Démonstration. Si un point x n'est pas dans les deux premiers ensembles, il a un super temps hyperbolique i entre k et n . D'après le lemme 2.2, il a donc au moins θk temps hyperboliques entre 1 et n , donc au moins $\theta k/2$ entre $\theta k/2$ et n . Pour chacun de ces temps hyperboliques, il appartient en fait à $H_{t_i}(U_1)$ (puisqu'il est assez loin du bord de U_1). Puisqu'il n'est pas sélectionné à ces instants, c'est donc qu'il y était interdit. Finalement, $x \in Z^6(\theta k/2, n)$. \square

Dans la suite, on notera $\theta_0 = \theta(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0)$ donné par le lemme 2.2.

Lemme 8. *Soient $0 < k \leq n$. Alors*

$$\text{Leb}\{x \in U_1 \mid x \notin S_k \text{ et } \forall k < i \leq n, x \notin SH_i\} \leq C \text{Leb}\left\{x \mid h_{\varepsilon_0}^2(x) > \frac{n-k}{1-\theta_0}\right\}. \quad (2)$$

Démonstration. Pour $x \in U_1$, on notera j son dernier super temps hyperbolique dans $[0, k[$. Ainsi,

$$\{x \in U_1 \mid x \notin S_k \text{ et } \forall k < i \leq n, x \notin SH_i\} \subset \bigcup_{j=0}^{k-1} \{x \in U_1 \mid x \in SH_j \setminus S_j \text{ et } \forall j < i \leq n, x \notin SH_i\}.$$

Fixons j et majorons la mesure de ce dernier ensemble. Pour $j = 0$, c'est simplement l'ensemble des points de U_1 dont le premier super temps hyperbolique est $> n$. D'après le lemme 2.1, il est inclus dans $\{x \in U_1 \mid h_{\varepsilon_0}^2(x) > n/(1-\theta_0) - 1\}$: si un point x satisfait $h_{\varepsilon_0}^2(x) \leq p$, alors il a au moins $\theta_0 p$ super temps hyperboliques entre 1 et p , donc il en a un entre 1 et $p - \theta_0 p + 1$. On obtient bien une mesure majorée par le terme de droite de (2).

Soit maintenant $j \geq 1$. L'ensemble $SH_j \setminus S_j$ est recouvert par un nombre fini d'ensembles deux à deux disjoints $I_\infty^j(x_r)$, pour $r \in \{1, \dots, p\}$ et $x_r \in SH_j \setminus S_j$. Le point x_r est soit proche de ∂U_1 à λ_1^j près, soit interdit pour le temps j , par un certain ensemble sélectionné $I_\infty^{s(r)}(y_r)$ avec $s(r) < j$ (sinon, x_r serait sélectionné au temps j). Dans le deuxième cas, il est donc inclus dans une couronne autour de $I_\infty^{s(r)}(y_r)$, de taille relative $C\lambda_2^{j-s(r)}$. Notons $\tilde{S}_s = S_s \setminus S_{s-1}$ l'ensemble des points sélectionnés au temps exactement s . En sommant, on obtient :

$$\sum_{r=1}^p \text{Leb}(I_\infty^j(x_r)) \leq C\lambda_2^j + C \sum_{s=1}^{j-1} \lambda_2^{j-s} \text{Leb}(\tilde{S}_s).$$

Chaque ensemble $I_\infty^j(x_r)$ est envoyé par T^j sur l'un des ensembles U_q , avec distorsion bornée. Par conséquent,

$$\text{Leb}(I_\infty^j(x_r) \cap T^{-j}(\forall 0 < i \leq n-j, x \notin SH_i)) \leq C \text{Leb}(I_\infty^j(x_r)) \text{Leb}(\forall 0 < i \leq n-j, x \notin SH_i).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Leb} \left(\bigcup_{r=1}^p I_{\infty}^j(x_r) \cap T^{-j} (\forall 0 < i \leq n-j, x \notin SH_i) \right) \\ \leq C \left(\sum_{s=1}^{j-1} \lambda_2^{j-s} \text{Leb}(\tilde{S}_s) + \lambda_2^j \right) \text{Leb} (\forall 0 < i \leq n-j, x \notin SH_i). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} \text{Leb} \{x \in U_1 \mid x \in SH_j \setminus S_j \text{ et } \forall j < i \leq n, x \notin SH_i\} \\ \leq C \left(\sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{s=1}^{j-1} \lambda_2^{j-s} \text{Leb}(\tilde{S}_s) + \lambda_2^j \right) \right) \text{Leb} (\forall 0 < i \leq n-k+1, x \notin SH_i). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer d'une part que

$$\{x \mid \forall 0 < i \leq n-k+1, x \notin SH_i\} \subset \{h_{\varepsilon_0}^2 > (n-k)/(1-\theta_0)\},$$

d'après le lemme 2.1, et d'autre part que

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{s=1}^{j-1} \lambda_2^{j-s} \text{Leb}(\tilde{S}_s) + \lambda_2^j \right) \leq \frac{\text{Leb}(M) + 1}{\lambda_2^{-1} - 1},$$

puisque les ensembles \tilde{S}_s sont deux à deux disjoints. □

Les deux lemmes précédents et le lemme 3.7 donnent l'estimée suivante : il existe $C > 0$ et $\lambda < 1$ tels que, pour tous $0 < k \leq n$,

$$\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) \leq C\lambda^k + C \text{Leb}\{h_{\varepsilon_0}^2 > (n-k)/(1-\theta_0)\}.$$

Pour démontrer le théorème 4, il suffit finalement de choisir $k = \lfloor \theta_0 n \rfloor$.

4 Premier temps hyperbolique

Dans ce paragraphe, on discute de ce qu'on peut démontrer si on a seulement des hypothèses sur la distribution du premier temps hyperbolique (ce qui interdit d'appliquer le lemme de Pliss). On peut quand même dire beaucoup de choses, par le même type de technique que dans le paragraphe précédent.

Dans toute cette partie, on supposera que u_n est une suite décroissante majorant la mesure de l'ensemble des points dont le premier temps hyperbolique est $> n$.

Lemme 9. *Il existe $\lambda < 1$ tel que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a*

$$\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) \leq C\lambda^k + u_{n/4} + u_{n/(2k)} \text{Leb}(U_1 \setminus S_{n/8}). \quad (3)$$

Démonstration. Fixons une suite $t_1 < \dots < t_k = n$. Si un point de $U_1 \setminus S_n$ a strictement moins de k temps hyperboliques entre 1 et n , il existe un intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ dans lequel il n'a pas de temps hyperbolique. On considère i minimal, et on note A_i l'ensemble des points correspondants. Alors

$$\text{Leb}(A_1) \leq u_{t_1}$$

et pour $i \geq 2$, on obtient en considérant j le dernier temps hyperbolique de x avant t_i :

$$\text{Leb}(A_i) \leq \sum_{j=t_{i-1}}^{t_i-1} \left(\sum_{s=1}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} \right) u_{t_{i+1}-j}.$$

Par conséquent,

$$\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) \leq u_{t_1} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=t_{i-1}}^{t_i-1} \left(\sum_{s=1}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} \right) u_{t_{i+1}-j} + \lambda^k. \quad (4)$$

On prend $t_1 = n/2$, puis on espace les t_i de $n/(2k)$. Dans (4), le terme pour $i = 1$ vaut

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n/2} \left(\sum_{s=1}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} \right) u_{n/2+n/(2k)-j} \\ & \leq \sum_{j=1}^{n/4} \sum_{s=1}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} u_{n/4} + \sum_{j=n/4}^{n/2} \sum_{s=1}^{n/8} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} + \sum_{j=n/4}^{n/2} \sum_{s=n/8}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} u_{n/(2k)} \\ & \leq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \text{Leb}(M) u_{n/4} + \lambda_2^{n/8} \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \text{Leb}(M) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \text{Leb}(U_1 \setminus S_{n/8}) u_{n/(2k)}. \end{aligned}$$

Tous les termes rentrent dans le terme d'erreur de (3).

Pour $2 \leq i \leq k$, on majore $u_{t_{i+1}-j}$ par $u_{n/(2k)}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{j=n/2}^n \sum_{s=1}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} u_{n/(2k)} & \leq \sum_{j=n/2}^n \sum_{s=1}^{n/8} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} u_{n/(2k)} + \sum_{j=n/2}^n \sum_{s=n/8}^{j-1} \text{Leb}(\tilde{S}_s) \lambda_2^{j-s} u_{n/(2k)} \\ & \leq \lambda_2^{n/4} \text{Leb}(M) \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} + \text{Leb}(M) \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} u_{n/(2k)} \text{Leb}(M \setminus S_{n/8}). \end{aligned}$$

En sommant, on obtient bien la majoration annoncée. \square

Par exemple, si $u_n = 1/n^p$ avec $p > 0$, on applique le lemme en majorant $\text{Leb}(U_1 \setminus S_{n/8}) \leq C$, avec $k = \log n$, et on trouve $\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) = O((\log n)^p/n^p)$. Mais on peut réinjecter cette majoration dans le lemme, et obtenir :

$$\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) \leq \frac{1}{n^p} + \frac{(\log n)^p (\log n)^p}{n^p n^p}.$$

Comme $p > 0$, on obtient $\text{Leb}(U_1 \setminus S_n) = O(1/n^p)$.

Références

- [Gou06] S. GOUËZEL – « Decay of correlations for nonuniformly expanding systems », *Bull. Soc. Math. France* **134** (2006), no. 1, p. 1–31.
- [Pin06] V. PINHEIRO – « Sinai-Ruelle-Bowen measures for weakly expanding maps », *Nonlinearity* **19** (2006), p. 1185–1200.