

COCYCLES SOUS-ADDITIFS ET HOROFONCTIONS

par

Sébastien Gouëzel

Résumé. — L'objectif de ce texte, correspondant à l'exposé que j'ai donné à l'occasion du premier congrès de la SMF à Tours, est de présenter et de mettre en perspective les résultats obtenus avec Anders Karlsson dans l'article [4]. Le thème général de cet article est l'étude dans un contexte de théorie ergodique de certaines propriétés de sous-additivité, et leur lien avec des questions de dynamique nettement plus géométriques concernant le comportement asymptotique de semi-contractions aléatoires sur des espaces métriques généraux.

Abstract (Subadditive cocycles and horofunctions). — The aim of this text is to present and put in perspective the results we have proved with Anders Karlsson in the article [4]. The topic of this article is the study, in an ergodic theoretic context, of some subadditivity properties, and their relationships with dynamical questions with a more geometric flavor, dealing with the asymptotic behavior of random semi-contractions on general metric spaces.

Classification mathématique par sujets (2010). — 37A30, 37H15.

Mots clefs. — Cocycles sous-additifs, théorie ergodique, théorème de Kingman, horofonctions, semi-contractions.

Table des matières

1. Itération d'une semi-contraction sur l'espace euclidien . . .	20
2. Horofonctions	23
3. Itération de semi-contractions aléatoires	28
4. Théorie ergodique et sous-additivité	32
Références	38

1. Itération d'une semi-contraction sur l'espace euclidien

Afin d'éclairer un peu les problématiques que nous voulons considérer, il est utile de commencer par un exemple plus élémentaire qui montre comment des techniques sous-additives peuvent être utiles pour comprendre une semi-contraction, déterministe cette fois.

Définition 1.1. — Une transformation T d'un espace métrique X est une *semi-contraction* si elle est 1-lipschitzienne, *i.e.*, si pour tous $x, y \in X$, on a

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y).$$

Si T est une semi-contraction, ses itérés le sont également. Ainsi, pour tous points x et y , la distance entre $T^n(x)$ et $T^n(y)$ reste uniformément bornée par $d(x, y)$ (où l'on note $T^n = T \circ \dots \circ T$). Le comportement asymptotique de $T^n(x)$ (à erreur bornée près) est donc indépendant de x .

Dans \mathbb{R}^d euclidien, les premiers exemples de semi-contractions sont fournis par les translations (où $T^n(x)$ tend vers l'infini comme $nv + O(1)$ où v est le vecteur de translation) ou les homothéties de rapport ≤ 1 (pour lesquelles $T^n(x)$ reste borné). Le théorème suivant, démontré en 1981 dans [9] sous des hypothèses très légèrement plus fortes, montre que ces exemples sont significatifs puisqu'il existe dans tous les cas un vecteur asymptotique de translation. La preuve que nous en donnons est due à Karlsson [5].

Théorème 1.2. — *Considérons une transformation $T : X \rightarrow X$ sur une partie X de \mathbb{R}^d euclidien. On suppose que T est une semi-contraction. Il existe alors un vecteur v tel que $T^n(x)/n$ converge vers v , pour tout $x \in X$.*

Notons que le comportement asymptotique de $T^n(x)/n$ ne dépend pas de x , si bien qu'il suffit de prouver le résultat pour un point x fixé. Quitte à tout translater, on peut supposer $0 \in X$ et prendre $x = 0$.

La preuve repose de manière centrale sur les propriétés de sous-additivité de la suite $u_n = d(0, T^n(0))$.

Définition 1.3. — Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre réels est dite *sous-additive* si, pour tous k, ℓ , on a

$$u_{k+\ell} \leq u_k + u_\ell.$$

La propriété centrale d'une telle suite est le lemme suivant, dit lemme de Fekete :

Lemme 1.4. — Soit u_n une suite sous-additive. Alors u_n/n converge vers

$$\inf \{u_n/n, n > 0\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Démonstration. — Fixons un entier positif N . Il découle de la sous-additivité de u_n que $u_{kN+r} \leq ku_N + u_r$. En écrivant un entier arbitraire n comme $kN + r$ avec $r < N$, puis en divisant par n et en passant à la limite, on obtient $\limsup u_n/n \leq u_N/N$. Ainsi, $\limsup u_n/n \leq \inf\{u_N/N\}$. Le résultat en découle puisque $\liminf u_n/n \geq \inf\{u_N/N\}$. \square

Reprenant la notation $u_n = d(0, T^n(0))$, on a

$$(1) \quad \begin{aligned} u_{k+\ell} &= d(0, T^{k+\ell}(0)) \leq d(0, T^k(0)) + d(T^k(0), T^k(T^\ell(0))) \\ &\leq d(0, T^k(0)) + d(0, T^\ell(0)) = u_k + u_\ell, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la semi-contraction de T^k . Ainsi, le lemme de Fekete montre que u_n/n converge vers une limite $A \geq 0$. Au temps n , $T^n(0)$ est proche de la sphère de rayon An . Si $A = 0$, cela démontre le théorème 1.2. En revanche, si $A > 0$, il faut en plus montrer la convergence en direction de $T^n(0)$. Pour cela, on va utiliser des temps où la suite u_n est presque additive, donnés par le lemme suivant :

Lemme 1.5. — Fixons $\varepsilon > 0$. Soit u_n une suite sous-additive telle que u_n/n tend vers $A \in \mathbb{R}$. Il existe alors des entiers n arbitrairement grands tels que, pour tout $1 \leq \ell \leq n$,

$$(2) \quad u_n \geq u_{n-\ell} + (A - \varepsilon)\ell.$$

Comme u_ℓ est de l'ordre de $A\ell$, cette inégalité peut se lire informellement comme $u_n \geq u_{n-\ell} + u_\ell + \delta$, où δ est petit. Elle assure bien l'additivité de la suite à tous les temps intermédiaires, à une erreur bien contrôlée près.

Démonstration. — La suite $u_n - (A - \varepsilon)n$ est équivalente à εn , et tend donc vers l'infini. Ainsi, il existe des temps n arbitrairement grands qui sont des records pour cette suite, *i.e.*, qui surpassent toutes les valeurs prises précédemment. Pour un tel n , on a pour $\ell \leq n$ l'inégalité $u_{n-\ell} - (A - \varepsilon)(n - \ell) \leq u_n - (A - \varepsilon)n$, équivalente à l'inégalité annoncée. \square

Pour $\varepsilon_i = 2^{-i}$, considérons une suite correspondante de temps n_i donnés par le lemme 1.5, qui tend vers l'infini. Soit h_i une forme linéaire de norme 1 qui vaut $-\|T^{n_i}(0)\|$ en $T^{n_i}(0)$. Alors, pour tout $\ell \leq n_i$,

$$h_i(T^\ell(0)) = h_i(T^\ell(0) - T^{n_i}(0)) + h_i(T^{n_i}(0)) \leq \|T^\ell(0) - T^{n_i}(0)\| - \|T^{n_i}(0)\| \leq \|T^{n_i-\ell}(0)\| - \|T^{n_i}(0)\| = u_{n_i-\ell} - u_{n_i} \leq -(A - \varepsilon_i)\ell,$$

où la dernière inégalité provient de (2). Dans l'inégalité $h_i(T^\ell(0)) \leq -(A - \varepsilon_i)\ell$ qu'on vient d'obtenir, il est à noter que toute mention de n_i a disparu.

Considérons maintenant h une limite (faible ou forte puisqu'on est en dimension finie) de la suite h_i , c'est une forme linéaire de norme 1. Comme ε_i tend vers 0 avec i , on déduit de ce qui précède l'inégalité

$$(3) \quad \text{pour tout entier } \ell, \quad h(T^\ell(0)) \leq -A\ell.$$

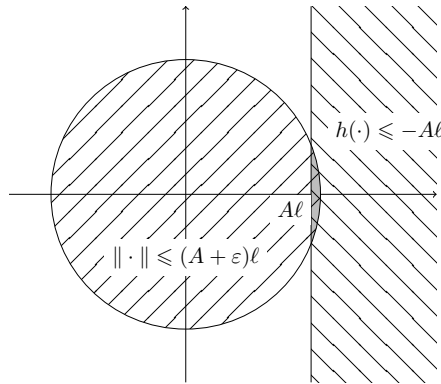


FIGURE 1. $T^\ell(0)$ appartient à l'intersection des deux zones hachurées

Cette inégalité affirme que $T^\ell(0)$ appartient au demi-espace dirigé par h , à distance $A\ell$ de l'origine. Comme il est aussi essentiellement de norme $A\ell$, on en déduit qu'il pointe essentiellement dans la direction définie par h (voir la figure 1). Cela démontre la convergence de $T^\ell(0)/\ell$. Si l'on veut un argument

plus explicite, on peut par exemple considérer une valeur d'adhérence v de $T^\ell(0)/\ell$. C'est un vecteur de norme A , satisfaisant $h(v) = -A$. Comme h est de norme 1, ceci détermine uniquement v par stricte convexité de l'espace euclidien. Ainsi, $T^\ell(0)/\ell$ a une unique valeur d'adhérence, et converge donc. Cela conclut la démonstration du théorème 1.2. \square

Remarque 1.6. — La preuve n'a pas utilisé la dimension finie, quitte à utiliser des limites faibles au lieu des limites. Ainsi, le résultat est encore vrai dans un espace de Hilbert, ou plus généralement dans un espace de Banach uniformément convexe.

Remarque 1.7. — La plus grande partie de la preuve fonctionne dans un espace vectoriel général : il existe toujours une forme linéaire h de norme au plus 1 telle que $h(T^\ell(0)) \leq -A\ell$ pour tout ℓ (ce qui implique des résultats non triviaux, par exemple que la suite $(T^\ell(0))_{\ell \geq 0}$ est contenue dans un demi-espace si $A > 0$, la forme linéaire h étant alors nécessairement non nulle). Seule la conclusion de la preuve, reposant sur la stricte convexité de la boule, fait défaut en général.

On peut se demander si c'est un défaut de la preuve, ou si celle-ci capture tous les phénomènes à l'œuvre. En réalité, le résultat est faux sans hypothèse sur la norme.

Décrivons rapidement un contre-exemple dû à [9]. Dans \mathbb{R}^2 muni de la norme du sup, fixons deux vecteurs $v_+ = (1, 1)$ et $v_- = (1, -1)$, tous deux de norme 1. On définit un chemin continu $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ partant de 0 de la forme $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$ en suivant la direction v_+ pendant un temps S_0 , puis v_- pendant un temps $S_1 \gg S_0$, puis v_+ pendant un temps $S_2 \gg S_1$, etc. On peut ainsi faire en sorte que l'angle de $\gamma(t)$ avec l'origine oscille entre $-\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{4}\pi$. Notons que, comme la pente de v_+ et v_- est 1, le chemin γ est une isométrie de \mathbb{R}_+ sur son image. Soit $h(x_1, x_2) = x_1$ la forme linéaire première coordonnée. Alors la fonction $T : x \mapsto \gamma(|h(x)| + 1)$ est une semi-contraction comme composée de fonctions 1-lipschitziennes. On vérifie aisément que $T^n(0) = \gamma(n)$. Ainsi, $T^n(0)/n$ ne converge pas, par construction.

2. Horofonctions

Nombre d'espaces géométriques intéressants, qui ne sont pas des espaces vectoriels, sont munis de semi-contractions. On aimerait donc avoir un analogue du théorème 1.2 dans des espaces plus généraux. La conclusion du théorème ne pourra pas être de la forme « $T^n(x)/n$ converge » puisque la

division par n n'a pas de sens. Il est toujours vrai que $d(T^n(x), x)/n$ converge vers une limite $A \geq 0$, par sous-additivité. En revanche, le sens à donner à la convergence directionnelle est beaucoup moins clair. De tels théorèmes existent déjà dans différents contextes. Mentionnons par exemple le théorème de Denjoy-Wolff [3], [11]:

Théorème 2.1. — *Soit T une application holomorphe du disque unité \mathbb{D} de \mathbb{C} dans lui-même. Alors, soit T a un point fixe dans le disque, soit $T^n(0)$ converge vers un point du cercle unité.*

Cet énoncé est effectivement un cas particulier de la discussion précédente puisqu'une application holomorphe du disque unité est une semi-contraction pour la distance hyperbolique.

Dans le cas général, le contre-exemple de la remarque 1.7 montre qu'on ne peut pas espérer avoir de convergence à l'infini en un sens fort sans rajouter des hypothèses de nature géométrique sur l'espace considéré. Si l'on reprend la preuve du théorème 1.2 dans un contexte métrique général, on voit en revanche qu'on peut donner un sens à tous les arguments jusqu'à l'inégalité (3) incluse, en termes d'horofonctions.

Définition 2.2. — Soit (X, d) un espace métrique muni d'un point base x_0 . On appelle *horofonction interne basée en $x \in X$* la fonction

$$h_x : y \mapsto d(x, y) - d(x, x_0).$$

Une *horofonction* est un élément de l'adhérence de l'ensemble des horofonctions internes pour la topologie de la convergence simple.

Pour chaque $x \in X$, l'horofonction interne h_x s'annule en x_0 , et elle est 1-lipschitzienne. Ainsi, $h_x(y)$ appartient à $[-d(y, x_0), d(y, x_0)]$, qui est un intervalle compact. Un produit d'ensembles compacts étant compact pour la topologie de la convergence simple (*i.e.*, la topologie produit), on en déduit que l'ensemble $\overline{X^B}$ des horofonctions, muni de la topologie de la convergence simple, est un espace compact, dans lequel X (vu comme l'ensemble des horofonctions internes) est dense. Une horofonction s'annule en x_0 et est 1-lipschitzienne, ces propriétés étant invariantes par convergence simple.

De même qu'on distingue un point $x \in X$ de l'horofonction interne correspondante h_x , on distinguera par les notations un point abstrait $\xi \in \overline{X^B}$ de l'horofonction correspondante h_ξ .

Remarque 2.3. — En général, X n'est pas un ouvert de \overline{X}^B , contrairement à ce que l'on demande habituellement à une compactification. Considérons par exemple pour X une infinité de rayons \mathbb{R}^+ issus d'un même point x_0 , avec la distance de graphe. Si une suite converge vers l'infini le long d'un des rayons (disons d'indice i), alors la suite d'horofonctions internes converge vers une horofonction (externe) notée h_i . Lorsque i tend vers l'infini, on vérifie aisément que h_i tend vers h_{x_0} .

En revanche, si l'espace est propre (*i.e.*, toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est compacte) et géodésique (entre deux points x et y quelconques, il existe une géodésique, *i.e.*, un chemin isométrique au segment $[0, d(x, y)]$), alors \overline{X}^B est une compactification de X au sens usuel du terme.

Il faut penser aux horofonctions comme à des analogues des formes linéaires sur des espaces métriques généraux. Dans le cas d'un espace euclidien, les deux notions coïncident d'ailleurs exactement. En termes géométriques, ce n'est pas tant l'horofonction h qui est intéressante que la suite des horoboules $\{x : h(x) \leq c\}$ qu'elle définit, pour $c \in \mathbb{R}$. Il faut y penser comme à une famille de demi-espaces croissant avec c , qui définit une direction à l'infini lorsque $c \rightarrow -\infty$.

La notion d'horofonction est exactement celle qui permet d'étendre la démonstration du théorème 1.2 à un espace métrique général :

Théorème 2.4 (Karlsson [5]). — Soit T une semi-contraction d'un espace métrique pointé (X, d, x_0) . Alors $d(T^n(x_0), x_0)/n$ converge vers une limite $A \geq 0$. De plus, il existe une horofonction h telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on ait

$$h(T^\ell(x_0)) \leq -A\ell.$$

Démonstration. — La preuve est exactement la même que celle de l'inégalité (3), en remplaçant la notion de forme linéaire (qui utilisait la linéarité de l'espace sous-jacent) par la notion d'horofonction. En effet, définissons A comme dans la preuve de ce théorème, par sous-additivité, puis posons $\varepsilon_i = 2^{-i}$ et choisissons une suite n_i strictement croissante telle que, pour tout $\ell \leq n_i$, on ait

$$d(x_0, T^{n_i} x_0) \geq d(x_0, T^{n_i - \ell} x_0) + (A - \varepsilon_i)\ell,$$

grâce au lemme 1.5. On utilise alors l'horofonction interne basée en $T^{n_i}x_0$. Elle vérifie, pour $\ell \leq n_i$,

$$\begin{aligned} h_{T^{n_i}(x_0)}(T^\ell(x_0)) &= d(T^{n_i}(x_0), T^\ell(x_0)) - d(T^{n_i}(x_0), x_0) \\ &\leq d(T^{n_i-\ell}(x_0), x_0) - d(T^{n_i}(x_0), x_0) \\ &\leq -(A - \varepsilon_i)\ell. \end{aligned}$$

Cela montre que l'ensemble des horofonctions vérifiant $h(T^\ell(x_0)) \leq -(A - \varepsilon_i)\ell$ pour tout $\ell \leq n_i$ est non vide. C'est de plus un compact, décroissant avec i . L'ensemble des horofonctions étant compact, l'intersection de ces ensembles est donc non vide. Tout élément h de cette intersection vérifie $h(T^\ell(x_0)) \leq -A\ell$ pour tout ℓ , comme annoncé. (Dans le cas où l'espace X est séparable, la topologie sur \bar{X}^B est métrisable, et il suffit alors de prendre pour h une valeur d'adhérence de $h_{T^{n_i}(x_0)}(\cdot)$. \square)

Ce théorème affirme que $T^\ell(x_0)$ est dans l'intersection de la boule de rayon $(A + \varepsilon)\ell$ et du demi-espace $\{h \leq -A\ell\}$ pour ℓ assez grand, comme sur la figure 1. À la différence près que la forme de la boule et du demi-espace dépendent de la géométrie de (X, d) . Savoir si l'on peut déduire de cet énoncé une convergence plus forte vers l'infini dépendra donc de X . Par exemple, c'est vrai dans un espace de Banach uniformément convexe d'après la remarque 1.6, tandis que c'est faux dans \mathbb{R}^2 muni de la norme du sup, d'après la remarque 1.7.

On peut donc dire que le théorème 2.4 découple la dynamique de la géométrie, en capturant la partie dynamique de l'itération des semi-contractions, et réduit la question de leur convergence à l'infini à une question géométrique sur la forme des horofonctions.

Exemple 2.5. — Une classe importante d'espaces métriques est formée des espaces CAT(0), *i.e.*, des espaces métriques (pas nécessairement des variétés) de courbure négative ou nulle en un sens étendu, voir [1]. Dans un tel espace, on a une notion naturelle de bord à l'infini géométrique, en bijection naturelle avec les horofonctions externes. De plus, on peut y décrire les horofonctions avec suffisamment de précision pour étendre l'argument donné plus haut dans l'espace euclidien : si une suite x_n vérifie $d(x_n, x_0)/n \rightarrow A > 0$ et $h(x_n)/n \rightarrow -A$ où h est une horofonction, alors x_n converge vers le point du bord à l'infini donné par h . Ceci s'applique à $x_n = T^n(x_0)$ si T est une semicontraction. On obtient ainsi une généralisation du théorème 1.2 à une classe beaucoup plus grande d'espaces.

Un défaut du résultat précédent est qu'il n'affirme pas grand chose lorsque $A = 0$. Par exemple, à première vue, il ne redonne pas le théorème 2.1 de Denjoy-Wolff lorsque $A = 0$ (alors que la convergence vers un point du bord s'obtient directement lorsque $A > 0$, puisque le disque muni de la métrique hyperbolique est un espace $\text{CAT}(0)$ – et même $\text{CAT}(-1)$). En fait, on peut bien déduire le théorème 2.1 du théorème 2.4 en utilisant le lemme suivant dû à Calka [2], dont on donne une preuve directe.

Lemme 2.6. — *Soit T une semi-contraction d'un espace métrique propre X . Soit $x_0 \in X$. S'il existe une sous-suite n_i telle que $d(x_0, T^{n_i}x_0)$ reste borné, alors la suite entière $d(x_0, T^n x_0)$ est bornée.*

Démonstration. — Soit \mathcal{O} l'orbite de x_0 . Elle admet par hypothèse un point d'accumulation x_1 . Notons $B = \overline{\mathcal{O}} \cap \overline{B}(x_1, 1)$. Par compacité locale, B est recouvert par un nombre fini de boules $B_i = \overline{\mathcal{O}} \cap \overline{B}(x_i, \frac{1}{2})$ pour $x_i \in \mathcal{O}$. Pour chaque i , on peut trouver $k_i > 0$ tel que $T^{k_i}(x_i) \in \overline{B}(x_1, \frac{1}{2})$ puisque x_1 est point d'accumulation de \mathcal{O} . Alors $T^{k_i}(B_i) \subset B$ puisqu'on a une semi-contraction.

Soit maintenant $n > \max k_i$. Alors

$$T^n(B) \subseteq \bigcup_i T^n(B_i) = \bigcup_i T^{n-k_i}(T^{k_i}B_i) \subseteq \bigcup_i T^{n-k_i}B \subseteq \bigcup_{m < n} T^m(B).$$

On en déduit, par récurrence, que

$$T^n(B) \subseteq \bigcup_{m \leq \max k_i} T^m(B).$$

Ainsi, $\bigcup_n T^n(B)$ est à distance bornée de x_0 . Enfin, il existe un itéré de x_0 qui rentre dans B . Tous les itérés ultérieurs de x_0 y restent alors. \square

Démonstration du théorème 2.1 de Denjoy-Wolff. — On munit le disque unité de la distance hyperbolique, pour laquelle toute application holomorphe est une semi-contraction.

Supposons d'abord que $T^n(0)$ reste borné pour cette distance. Alors

$$K = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} T^m(0)}$$

est un compact non vide vérifiant $T(K) = K$. L'ensemble K est contenu dans une unique boule de rayon minimal (c'est une propriété générale de la courbure négative ou nulle, voir [1, Proposition 2.7]) que nous notons $\overline{B}(x, r)$. Alors $K = T(K)$ est inclus dans $\overline{B}(T(x), r)$ puisque T est une semi-contraction. Par unicité, $x = T(x)$, et T a un point fixe comme annoncé.

Supposons ensuite que $T^n(0)$ est non borné. D'après le lemme 2.6, $T^n(0)$ tend donc vers l'infini du disque hyperbolique, *i.e.*, le cercle unité S^1 dans \mathbb{C} . De plus, le théorème 2.4 montre que la suite $T^n(0)$ reste dans une horoboule $\{x : h(x) \leq 0\}$ pour une certaine horofonction h . Dans ce cadre, les horoboules sont des disques euclidiens passant par 0 et tangents au cercle unité. En particulier, l'adhérence d'une telle horoboule rencontre S^1 en un unique point, vers lequel la suite $T^n(0)$ doit tendre. \square

3. Itération de semi-contractions aléatoires

Le problème qui nous intéresse est le cas d'une composition aléatoire de semi-contractions. Décrivons-le dans le cas le plus simple. Fixons un espace métrique (X, d) muni d'un point base x_0 , considérons un nombre fini de semi-contractions T_1, \dots, T_I de X , et fixons une mesure de probabilité \mathbb{P}_0 sur $\{1, \dots, I\}$, *i.e.*, une suite de réels $p_i > 0$ avec $\sum p_i = 1$. On peut alors décrire une marche aléatoire à gauche L_n (avec L pour *left*) sur X de la manière suivante. Au temps 0, on pose $L_0 = x_0$. On choisit ensuite une semi-contraction $T^{(1)}$ parmi T_1, \dots, T_I aléatoirement, en prenant T_i avec probabilité p_i . On se déplace alors vers $L_1 = T^{(1)}(x_0)$. On choisit ensuite $T^{(2)}$ comme $T^{(1)}$, indépendamment des choix déjà effectués, et on saute en $L_2 = T^{(2)}(L_1)$. Et on continue le processus. Formellement,

$$L_n = T^{(n)} \circ \dots \circ T^{(1)}(x_0),$$

où les $T^{(k)}$ sont des semi-contractions indépendantes identiquement distribuées de loi \mathbb{P}_0 . On devrait écrire $T^{(k)} = T^{(k)}(\omega)$ et $L_n = L_n(\omega)$ où ω est un aléa, *i.e.*, un élément d'un espace de probabilité servant à paramétrer tous les objets qui apparaissent (on peut prendre ici $\Omega = \{1, \dots, I\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de probabilité $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^{\otimes \mathbb{N}}$). Comme d'habitude en probabilités, nous n'écrivons pas explicitement l'aléa ω , pour alléger les formules (mais il réapparaîtra dans le contexte général plus bas).

On peut également considérer une marche aléatoire à droite R_n (avec R pour *right*) donnée par

$$R_n = T^{(1)} \circ \dots \circ T^{(n)}(x_0),$$

dont le sens géométrique est moins clair à première vue, mais dont les propriétés de convergence sont bien meilleures comme on va l'expliquer

maintenant. Notons que, en général, L_n peut être très loin de L_{n-1} , tandis que

$$\begin{aligned} d(R_n, R_{n-1}) &= d(T^{(1)} \circ \dots \circ T^{(n)}(x_0), T^{(1)} \circ \dots \circ T^{(n-1)}(x_0)) \\ &\leq d(T^{(n)}(x_0), x_0), \end{aligned}$$

l'inégalité découlant du fait que $T^{(1)} \circ \dots \circ T^{(n-1)}$ est une semi-contraction. Ainsi R_n est à distance uniformément bornée de R_{n-1} , *i.e.*, la marche R_n fait des sauts de taille uniformément bornée, contrairement à L_n .

Exemple 3.1. — Les isométries du disque hyperbolique sont de trois types : *elliptique* (avec un point fixe à l'intérieur du disque), *parabolique* (avec un unique point fixe au bord, autour duquel la dynamique tourne le long des horosphères), *loxodromique* (avec deux points fixes au bord, l'un attractif et l'autre répulsif). Supposons que tous les T_i soient des isométries loxodromiques, de point fixe attractif ξ_i . On s'attend à ce que, indépendamment de la position de L_{n-1} , l'application $T^{(n)} = T_{i_n}$ l'envoie près de son point fixe attractif ξ_{i_n} . Ainsi, la suite L_n devrait tendre vers le cercle à l'infini, mais alterner entre divers points limite possibles puisque, presque sûrement, i_n prendra toutes les valeurs dans $\{1, \dots, I\}$ une infinité de fois lorsque n tend vers l'infini. En particulier, on ne s'attend pas à avoir convergence pour L_n . Au contraire, dans R_n , c'est toujours $T^{(1)}$ qui a le dernier mot, si bien que R_n devrait être proche de ξ_{i_1} , à une erreur près donnée par les termes suivants de la suite. Comme les applications qu'on compose sont des contractions au bord (loin de leur point répulsif), l'influence du n -ième terme devrait être exponentiellement petite. Ainsi, R_n devrait typiquement être une suite de Cauchy dans $\overline{\mathbb{D}}$, donc convergente (vers une limite aléatoire, *i.e.*, qui dépend de l'aléa ω).

Dans ce contexte géométrique, cette description heuristique est vraie (le théorème de convergence presque sûre de R_n vers un point du bord est dû à Furstenberg, dans un contexte plus général).

Nous allons considérer un cadre plus général, qui contient le précédent, où les semi-contractions que l'on compose ne sont en général plus indépendantes les unes des autres.

Considérons un espace Ω muni d'une mesure de probabilité \mathbb{P} et d'une transformation mesurable U qui préserve la mesure (*i.e.*, on a $\mathbb{P}(U^{-1}B) = \mathbb{P}(B)$, pour tout ensemble mesurable B). On supposera de plus la transformation ergodique : tout ensemble mesurable B vérifiant $U^{-1}(B) = B$ est de mesure 0 ou 1. Fixons enfin une application $\omega \mapsto T(\omega)$ associant à $\omega \in \Omega$ une semi-contraction $T(\omega)$ de l'espace (X, d) , de manière mesurable. On peut alors définir

des « marches aléatoires » sur (X, d) comme suit : en notant x_0 un point base de X , on pose

$$\begin{aligned} L_n(\omega) &= T(U^{n-1}\omega) \circ \cdots \circ T(\omega)(x_0), \\ R_n(\omega) &= T(\omega) \circ \cdots \circ T(U^{n-1}\omega)(x_0). \end{aligned}$$

On s'intéressera principalement à $R_n(\omega)$ puisque c'est pour cette marche qu'on peut espérer des résultats de convergence, comme expliqué dans l'exemple 3.1. On posera donc

$$T^n(\omega) = T(\omega) \circ \cdots \circ T(U^{n-1}\omega).$$

Ce cadre généralise le cas des compositions indépendantes : on le retrouve en prenant $\Omega = \{1, \dots, I\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0^{\mathbb{N}}$ et U le décalage à gauche (donné par $U((\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (\omega_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$) et $T((\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}) = T_{\omega_0}$. Le cas non-indépendant est en général plus délicat à étudier car un certain nombre d'outils probabilistes ne sont plus disponibles (par exemple, la preuve de Furstenberg dans l'exemple 3.1 repose sur le théorème de convergence des martingales, qui fait défaut en général).

Le cas étudié dans les sections 1 et 2 d'une unique semi-contraction est également un cas particulier de ce cadre, en prenant Ω réduit à un point. On peut se demander dans quelle mesure les énoncés démontrés dans ce cas particulier s'étendent au cas général.

Le premier résultat (comportement asymptotique de la distance à l'origine) découle directement d'un théorème ergodique, le théorème de Kingman, qui est l'analogie du lemme de Fekete 1.4 dans ce contexte, et sur lequel on reviendra plus loin (c'est le théorème 4.2 ci-dessous). On obtient le fait suivant :

Proposition 3.2. — *Il existe $A \geq 0$ tel que, pour presque tout ω , on a*

$$d(x_0, T^n(\omega)x_0)/n \longrightarrow A.$$

Pour aller plus loin et obtenir une convergence en direction, on voudrait l'analogie du théorème 2.4, *i.e.*, obtenir pour presque tout ω une horofonction h^ω décrivant le comportement asymptotique de la marche. Ce résultat est nettement plus délicat, nous l'avons obtenu avec Karlsson dans [4] après plusieurs résultats partiels :

Théorème 3.3 (Karlsson-Margulis [7]). — *Dans le contexte précédent, soit $\varepsilon > 0$. Pour presque tout ω , il existe une horofonction h^ω telle que les valeurs d'adhérence de la suite $h^\omega(T^n(\omega)x_0)/n$ appartiennent toutes à $[-A, -A + \varepsilon]$.*

Théorème 3.4 (Karlsson-Ledrappier [6]). — Dans le contexte précédent, supposons en plus que les $T(\omega)$ sont tous des isométries de X . Pour presque tout ω , il existe une horofonction h^ω telle que $h^\omega(T^n(\omega)x_0)/n \rightarrow -A$.

Théorème 3.5 (Gouëzel-Karlsson [4]). — Dans le contexte précédent, pour presque tout ω , il existe une horofonction h^ω telle que $h^\omega(T^n(\omega)x_0)/n \rightarrow -A$.

Ce dernier résultat réalise le découplage entre dynamique et géométrie déjà expliqué dans la partie 2 pour une unique semi-contraction : supposons que, pour $A > 0$, une suite vérifiant $d(x_n, x_0) \sim An$ et $h(x_n) \sim -An$ converge nécessairement vers un point du bord d'une compactification donnée de X (ce qui est une propriété purement géométrique de X et de sa compactification). On en déduit alors que, pour presque tout ω , on a convergence de $T^n(\omega)$ vers un point du bord. C'est par exemple le cas lorsque X est $\text{CAT}(0)$, comme expliqué dans l'exemple 2.5. Notons toutefois que, dans le cas $\text{CAT}(0)$, le théorème 3.3 suffit à obtenir cette convergence (voir [7]), grâce à des arguments géométriques supplémentaires que le théorème 3.5 permet de court-circuiter complètement.

Ces théorèmes ont de nombreuses applications dans différents contextes. Par exemple, si on les applique à l'espace symétrique associé à $\text{GL}(d, \mathbb{R})$ (qui est $\text{CAT}(0)$, si bien que n'importe lequel de ces énoncés s'applique), on peut retrouver le théorème d'Oseledets sur les produits aléatoires de matrices. On obtient aussi une version aléatoire du théorème 2.1 de Denjoy-Wolff, ou des applications en théorie des opérateurs, en théorie de Teichmüller, etc. Notre propos dans cette note n'est pas tourné vers les applications, nous renvoyons aux articles mentionnés ci-dessus pour cela. Nous voulons plutôt explorer un peu les preuves de ces énoncés : contrairement aux apparences, ces preuves n'ont rien de géométrique, elles reposent exclusivement sur des arguments de sous-additivité (comme les preuves des sections 1 et 2).

Ce n'est pas tout à fait vrai pour la preuve donnée par Karlsson et Ledrappier du théorème 3.4 : on peut tirer parti du fait qu'on a des isométries en utilisant le fait que, contrairement aux semi-contractions générales, les isométries agissent sur l'espace des horofonctions. On peut alors exploiter un cocycle sur cet espace, ce qui est plus géométrique par nature. Mais c'est vrai des preuves des théorèmes 3.3 et 3.5, que nous esquissons dans la partie suivante.

Remarque 3.6. — Le théorème 3.5 produit une horofonction vérifiant

$$h^\omega(T^n(\omega)x_0) \leq -An + o(n),$$

ce qui est plus faible que la conclusion $h(T^n x_0) \leq -An$ du théorème 2.4 dans le cas d'une seule semi-contraction. On voit facilement qu'on ne peut en fait pas avoir une conclusion aussi forte dans le cas aléatoire : elle impliquerait par exemple que les $T^n(\omega)x_0$ resteraient presque sûrement dans une horoboule, ce qui n'est pas le cas si les $T(\omega)$ peuvent aller dans toutes les directions, par exemple si on choisit sur \mathbb{R} de manière équiprobable la translation de 2 et la translation de -1 (on a pris deux vecteurs de norme différente pour assurer que A ne soit pas nul).

4. Théorie ergodique et sous-additivité

L'analogue des suites sous-additives dans un cadre dynamique est donné par la notion de cocycle sous-additif (ce nom est très mauvais car un cocycle sous-additif n'est pas un cocycle, mais il est trop tard pour en changer).

Définition 4.1. — Soient (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé et $U : \Omega \rightarrow \Omega$ une transformation préservant la mesure, ergodique. Une fonction mesurable $u : \mathbb{N} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un *cocycle sous-additif* si, pour tous k, ℓ et pour presque tout ω ,

$$u(k + \ell, \omega) \leq u(k, \omega) + u(\ell, U^k \omega).$$

Un cocycle sous-additif est *intégrable* si $\int u^+(1, \omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty$, où u^+ désigne la partie positive de u .

Considérons par exemple une famille de semi-contractions $T(\omega)$ dépendant mesurablement de $\omega \in \Omega$. Posons

$$u(n, \omega) = d(x_0, T^n(\omega)(x_0)).$$

C'est un cocycle sous-additif : pour tous k, ℓ et tout ω , on a

$$\begin{aligned} u(k + \ell, \omega) &= d(x_0, T^{k+\ell}(\omega)x_0) = d(x_0, T^k(\omega)(T^\ell(U^k \omega)(x_0))) \\ &\leq d(x_0, T^k(\omega)(x_0)) + d(T^k(\omega)(x_0), T^k(\omega)(T^\ell(U^k \omega)(x_0))) \\ &\leq d(x_0, T^k(\omega)(x_0)) + d(x_0, T^\ell(U^k \omega)(x_0)) = u(k, \omega) + u(\ell, U^k \omega), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour passer de la première à la deuxième ligne, et le fait que $T^k(\omega)$ soit une semi-contraction pour passer de la deuxième à la troisième. C'est précisément le même calcul que pour une unique semi-contraction, en (1), avec une dépendance supplémentaire en ω qu'il s'agit d'écrire correctement.

De même que les résultats sur les suites sous-additives (lemmes 1.4 et 1.5) ont permis dans les sections 1 et 2 de décrire les itérés d'une semi-contraction, on pourra comprendre les familles aléatoires de semi-contractions si l'on dispose de résultats assez précis sur les cocycles sous-additifs.

Le premier résultat, central, remplace le lemme de Fekete 1.4 dans ce contexte.

Théorème 4.2 (Kingman [8]). — *Soit u un cocycle sous-additif intégrable. Il existe alors $A \in [-\infty, \infty[$ tel que, presque sûrement, $u(n, \omega)/n \rightarrow A$. De plus, si $A > -\infty$, la convergence a aussi lieu dans L^1 . Enfin, A est la limite de la suite $(\int u(n, \omega) d\mathbb{P}(\omega))/n$, qui converge par sous-additivité.*

Au vu de la sous-additivité de $d(x_0, T^n(\omega)(x_0))$ lorsque les $T(\omega)$ sont des contractions, ce résultat implique la proposition 3.2, *i.e.*, la convergence presque sûre de $d(x_0, T^n(\omega)(x_0))/n$.

Il existe dans la littérature de très nombreuses preuves du théorème de Kingman. La plus simple est probablement celle de Steele [10] que nous allons esquisser.

Esquisse de démonstration. — Considérons la fonction mesurable

$$f(\omega) = \liminf u(n, \omega)/n.$$

La sous-additivité de u implique que $f(\omega) \leq f(U\omega)$ presque partout. On en déduit grâce au théorème de récurrence de Poincaré que $f(\omega) = f(U\omega)$ presque partout. En effet, d'après ce théorème, presque tout point de $V_a = f^{-1}([-\infty, a])$ revient une infinité de fois dans V_a sous l'itération de U . Un point avec $f(\omega) < f(U\omega)$ appartiendrait, pour chaque a rationnel dans $]f(\omega), f(U\omega)[$, à V_a , mais ne pourrait y revenir que s'il appartient à un ensemble de mesure nulle.

La fonction f , étant presque partout invariante, est presque partout constante par ergodicité, égale à un certain $A \in [-\infty, +\infty[$. Supposons pour simplifier $A > -\infty$, et fixons $\varepsilon > 0$. Fixons aussi $N > 0$. Pour presque tout ω , il existe un entier $n(\omega) > 0$ avec $u(n(\omega), \omega) \leq n(\omega)(A + \varepsilon)$ par définition de la liminf. Le point ω étant fixé, on définit alors une suite d'entiers comme suit : on part de $n_0 = 0$. Si $n(U^{n_0}\omega) > N$ (*i.e.*, on doit attendre trop longtemps pour voir la liminf presque se réaliser), alors on n'a pas la patience d'attendre : on pose $n_1 = n_0 + 1$. Sinon, on pose $n_1 = n_0 + n(U^{n_0}\omega)$, de telle sorte que $u(n_1 - n_0, U^{n_0}\omega) \leq (n_1 - n_0)(A + \varepsilon)$. On continue cette construction par récurrence, partitionnant ainsi les entiers en intervalles $[n_i, n_{i+1} - 1]$. Sur

la plupart de ceux-ci, la valeur de u est bornée par $(n_{i+1} - n_i)(A + \varepsilon)$ par construction. Sur les autres, on n'a pas de bon contrôle, mais ces intervalles apparaissent extrêmement rarement si N est assez grand.

En combinant ces deux estimées et en utilisant la sous-additivité de u pour borner $u(n_i, \omega)$ par la somme des contributions de ces intervalles pris séparément, on obtient

$$u(n_i, \omega) \leq n_i(A + \varepsilon) + o_N(1)n_i.$$

Ceci est borné par $n_i(A + 2\varepsilon)$ si N est assez grand. Finalement, on obtient $\limsup u(n, \omega)/n \leq A + 2\varepsilon$ (d'abord le long de la sous-suite des n_i , puis pour tout entier car deux termes consécutifs de cette sous-suite sont séparés de au plus N). Finalement, en faisant tendre ε vers 0, on trouve

$$\limsup u(n, \omega)/n \leq A = \liminf u(n, \omega)/n,$$

ce qui conclut la preuve de la convergence presque sûre. \square

On peut noter que cette preuve ressemble beaucoup à celle du lemme 1.4 de Fekete, la différence étant qu'au lieu d'utiliser la sous-additivité par rapport au même temps N (qui réalise presque la liminf) à chaque fois, il faut choisir un temps qui dépend du point considéré. À ce détail près, on peut écrire les deux preuves de manière complètement parallèle.

Pour démontrer le théorème 3.5, on aurait besoin d'un substitut au lemme 1.5 si l'on veut suivre la stratégie de preuve de la partie 1. L'analogie de ce lemme dans notre contexte serait l'énoncé suivant :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit u un cocycle sous-additif intégrable, tel que

$$u(n, \omega)/n \rightarrow A > -\infty$$

presque partout. Pour presque tout ω , il existe des entiers n arbitrairement grands tels que, pour tout $1 \leq \ell \leq n$, on ait

$$u(n, \omega) \geq u(n - \ell, U^\ell(\omega)) + (A - \varepsilon)\ell.$$

Cependant, un tel énoncé est faux : si

$$u(n, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} v(U^k \omega)$$

pour une certaine fonction v (c'est un cocycle additif, dont la limite A est égale à $\int v$), alors l'inégalité demandée donne, en prenant $\ell = 1$, que $v(\omega) \geq A - \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on trouve $v(\omega) \geq A = \int v$ presque partout, ce qui est faux dès que v n'est pas presque sûrement constant.

Cet argument montre que tout énoncé valide doit autoriser des fluctuations pour chaque ℓ . Parallèlement, il est crucial pour l'application aux semi-contractions d'avoir un énoncé qui contrôle tous les temps intermédiaires entre 1 et n . Le résultat principal de [4] est le théorème suivant, qui répond à ces deux contraintes.

Théorème 4.3. — *Soit u un cocycle sous-additif intégrable, tel que*

$$u(n, \omega)/n \longrightarrow A > -\infty$$

presque partout. Pour presque tout ω , il existe une suite $\delta_\ell \rightarrow 0$ et des entiers n arbitrairement grands tels que, pour tout $1 \leq \ell \leq n$, on ait

$$u(n, \omega) \geq u(n - \ell, U^\ell(\omega)) + (A - \delta_\ell)\ell.$$

Dans un cadre de semi-contractions, en appliquant ce théorème au cocycle sous-additif $u(n, \omega) = d(x_0, T^n(\omega)(x_0))$ et en suivant la preuve de la partie 2, on obtient directement le théorème 3.5.

Notons que la sous-additivité de u garantit que

$$u(n, \omega) \leq u(n - \ell, U^\ell(\omega)) + u(\ell, \omega).$$

Comme $u(\ell, \omega) \sim A\ell$ d'après le théorème de Kingman, une borne supérieure $u(n, \omega) \leq u(n - \ell, U^\ell(\omega)) + (A + \delta_\ell)\ell$ est donc automatique. La difficulté dans le théorème 4.3 est qu'on recherche au contraire une borne inférieure, qui assure que le cocycle sous-additif u est en fait presque additif à tous les temps intermédiaires entre 1 et n , pour certains bons temps n .

Pour démontrer ce théorème, une première idée à essayer est de reprendre l'idée des records au cœur de la preuve du lemme 1.5. Elle fonctionnerait très bien pour prouver l'existence d'une infinité de temps n tels que

$$u(n, \omega) \geq u(n - \ell, \omega) + (A - \delta_\ell)\ell$$

pour tout temps intermédiaire ℓ . Malheureusement, ce n'est pas l'énoncé qui nous intéresse : on ne veut pas faire intervenir $u(n - \ell, \omega)$, mais $u(n - \ell, U^\ell(\omega))$ car c'est cette quantité qui est pertinente pour l'application aux semi-contractions. Il faut donc utiliser d'autres arguments.

La preuve du théorème 3.3 par Karlsson et Margulis dans [7] reposait sur un énoncé un peu plus faible que le théorème 4.3 : dans le même contexte, ils montrent que, $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe presque sûrement un temps $k(\omega)$ et des entiers n arbitrairement grands tels que, pour tout $k(\omega) \leq \ell \leq n$, on ait

$$u(n, \omega) \geq u(n - \ell, U^\ell(\omega)) + (A - \varepsilon)\ell.$$

Cela suffit pour démontrer le théorème 3.3 en suivant la preuve de la partie 2. À première vue, on pourrait penser cet énoncé très proche du théorème 4.3 : une stratégie pour prouver ce théorème pourrait être de partir de l'énoncé de Karlsson et Margulis pour $\varepsilon_i = 2^{-i}$, puis d'appliquer une sorte de procédé diagonal pour obtenir des temps n qui conviennent à la fois pour $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ (avec N arbitrairement grand). Le problème de cette approche est que le théorème de Karlsson-Margulis n'est pas du tout quantitatif : il ne garantit pas qu'il existe beaucoup de bons temps n (et leur preuve donne en fait un ensemble très petit de bons temps). Typiquement, il n'y aura aucun entier qui soit bon à la fois pour ε_0 et ε_1 , ce qui ruine l'argument diagonal !

Si l'on veut faire fonctionner ce type d'approche, il faut donc obtenir de gros ensembles de bons temps, à ε fixé. C'est ce qu'on va faire pour démontrer le théorème 4.3, où la notion de grosseur est donnée par la densité asymptotique inférieure

$$\underline{\text{Dens}} B = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(B \cap \{1, \dots, N\})}{N}.$$

Les étapes principales de la preuve sont les suivantes. On peut supposer U inversible. On définit alors un nouveau cocycle sous-additif

$$\tilde{u}(n, \omega') = u(n, U^{-n}\omega')$$

(il est sous-additif pour U^{-1}). Son intérêt est que, si on pose $\omega' = U^n\omega$, alors

$$u(n, \omega) - u(n - \ell, U^\ell\omega) = \tilde{u}(n, \omega') - \tilde{u}(n - \ell, \omega').$$

Dans le terme de droite, c'est le même point ω' qui apparaît dans les deux instances de \tilde{u} . Cela va rendre possible certains arguments combinatoires qui ne fonctionnent pas pour u . Le prix à payer est que les bons temps pour \tilde{u} ne sont pas des bons temps pour u : il faudra un argument de changement de variables, qui ne fonctionne pas si on a seulement des informations qualitatives sur les bons temps, mais qui fonctionne bien si on a des informations quantitatives en termes de densité asymptotique.

Ensuite, on montre que \tilde{u} a beaucoup de bons temps, avec les lemmes suivants :

Lemme 4.4. — *Soit $\delta > 0$. Il existe alors $C > 0$ tel que, pour presque tout ω ,*

$$\underline{\text{Dens}} \{n \in \mathbb{N} : \forall \ell \in [1, n], \quad \tilde{u}(n, \omega) - \tilde{u}(n - \ell, \omega) \geq (A - C)\ell\} \geq 1 - \delta$$

Lemme 4.5. — Soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier k tel que, pour presque tout ω ,

$$\underline{\text{Dens}} \{n \in \mathbb{N} : \forall \ell \in [k, n], \quad \tilde{u}(n, \omega) - \tilde{u}(n - \ell, \omega) \geq (A - \varepsilon)\ell\} \geq 1 - \delta$$

Le deuxième lemme est essentiellement une variante plus précise du premier. Leurs preuves sont essentiellement combinatoires, et ressemblent un peu à la preuve de Steele du théorème de Kingman que nous avons donnée plus haut.

Comme l'intersection de deux ensembles de densité asymptotique proche de 1 a encore une densité asymptotique proche de 1, on va ensuite pouvoir intersecter les ensembles de bons temps produits par ces lemmes (et, dans le cas du lemme 4.5, pour différentes valeurs de ε) tout en conservant de gros ensembles de bons temps. Cela permet d'implémenter l'argument diagonal évoqué ci-dessus. Après un changement de variables pour revenir au cocycle de départ u , on obtient finalement le théorème 4.3. Les détails, assez délicats, seront épargnés au lecteur, qui est renvoyé à [4] s'il veut en savoir plus.

Références

- [1] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER. — *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [2] A. CALKA. — On conditions under which isometries have bounded orbits. *Colloq. Math.* **48**, no. 2 (1984), p. 219–227.
- [3] A. DENJOY. — Sur l’itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **182** (1926), p. 255–257.
- [4] S. GOUËZEL & A. KARLSSON. — *Subadditive and multiplicative ergodic theorems*. Preprint, 2015.
- [5] A. KARLSSON. — Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), p. 1447–1457.
- [6] A. KARLSSON & F. LEDRAPPIER. — On laws of large numbers for random walks. *Ann. Probab.* **34**, no. 5 (2006), p. 1693–1706.
- [7] A. KARLSSON & A. MARGULIS. — A multiplicative ergodic theorem and nonpositively curved spaces. *Comm. Math. Phys.* **208**, no. 1 (1999), p. 107–123.
- [8] JOHN F. C. KINGMAN. — The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **30** (1968), p. 499–510.
- [9] E. KOHLBERG & A. NEYMAN. — Asymptotic behavior of nonexpansive mappings in normed linear spaces. *Israel J. Math.* **38** (1981), p. 269–275.
- [10] J. M. STEELE. — Kingman’s subadditive ergodic theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), p. 93–98.
- [11] J. WOLFF. — Sur l’itération des fonctions bornées. *C. R. Acad. Sci. Paris* **182** (1926), p. 200–201.

SÉBASTIEN GOUËZEL, Laboratoire Jean Leray, CNRS UMR 6629, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44322 Nantes, France. *E-mail* : `sebastien.gouezel@univ-nantes.fr`