manuscripta math. 106, 365 – 403 (2001)

Sébastien Gouëzel

Spectre de l'opérateur de transfert en dimension 1

Received: 8 May 2001

Abstract We study spectral properties of a transfer operator $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{\omega} g_{\omega}(x)\Phi(\psi_{\omega}x)$ acting on functions of bounded variation. Using a symmetrical integral, we first obtain bounds on its spectral and essential spectral radii. We then consider the dynamical determinant $\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id} + z\mathcal{M})$. Our main theorem generalizes to discontinuous weights the result of Baladi and Ruelle (for continuous weights) on the link between zeroes of the sharp determinant and eigenvalues of the transfer operator. The proof is based on regularizing the weights and uses a (new) spectral result giving the surjectivity of some applications between eigenspaces of operators.

1. Introduction

Pour obtenir des mesures invariantes pour une transformation f agissant sur un espace X, il est utile de considérer un opérateur, appelé opérateur de transfert, défini par $\mathcal{L}\Phi(x) = \sum_{f(y)=x} \Phi(y)$. Pour étudier des flots, ou pour faire intervenir le jacobien de f dans le cas différentiable, il faut même considérer des opérateurs de transfert avec poids, de la forme $\mathcal{L}\Phi(x) = \sum_{f(y)=x} g(y)\Phi(y)$.

Dans cet article, on s'intéressera à une généralisation de ces opérateurs, en dimension 1. Plus précisément, on posera

$$\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{\omega\in\Omega} g_{\omega}(x)\Phi(\psi_{\omega}x)$$

Dans le cas des opérateurs notés $\mathcal{L}$ ci-dessus, les ψ_{ω} seront les branches inverses de la fonction f, définies sur des intervalles Λ_{ω}, et les poids g_{ω} seront nuls hors de ces intervalles. On va étudier les propriétés spectrales de ces opérateurs.

Un des problèmes est de savoir sur quel espace faire agir $\mathcal{M}$: comme en général les poids ne seront pas continus on ne peut pas prendre l'espace C^0 (et même dans le cas des poids continus on n'aura en général pas de trou spectral pour l'action de $\mathcal{M}$ sur C^0, par manque de régularité des fonctions continues). D'autre part, si on étudie l'action de $\mathcal{M}$ sur L^1 il n'y a presque jamais de valeur propre isolée. Un bon compromis est de prendre un espace de fonctions pas forcément continues mais

S. Gouëzel: ENS Paris, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France. e-mail: sebastien.gouezel@ens.fr

Mathematics Subject Classification (2000): 37C30, 37A30

ayant néanmoins une certaine régularité, l'espace des fonctions à variation bornée, noté $\mathcal{B}$. Pour que cet espace soit stable par $\mathcal{M}$, on supposera que les poids g_ω sont également à variation bornée (c'est par exemple vrai si ils sont C^1 par morceaux).

Les renseignements spectraux intéressants sont liés aux valeurs propres isolées et de multiplicité finie de $\mathcal{M}$ ([Bal00]). Pour les détecter, on s'intéresse au rayon spectral de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{B}$ (noté $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$), et à son rayon spectral essentiel (dont la définition est rappelée au début de l'appendice B) : si le premier majore strictement le second, on aura au moins une valeur propre isolée (et un trou spectral, qui pourra donner des informations sur la décroissance des corrélations). Si R désigne le rayon spectral de $\mathcal{M}$ pour son action sur les fonctions bornées (et $\widehat{R}$, $\widehat{R^\varepsilon}$ les rayons spectraux de deux opérateurs duaux, définis dans la partie 2), on montre que

Théorèmes 3.2.1, 3.4.4. *On a* $\widehat{R^\varepsilon} \leqslant r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \max(R, \widehat{R})$ *et* $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R}$.

Ce résultat est intéressant car R, $\widehat{R}$ et $\widehat{R^\varepsilon}$ sont beaucoup plus faciles à estimer dans la pratique que $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$ et $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$. Ce théorème est dû essentiellement à Ruelle ([Rue96a]) mais la preuve exposée ici dans la partie 3 est formellement un peu différente et utilise une intégrale construite dans l'appendice A. Cette amélioration permet des preuves plus naturelles.

Pour obtenir des renseignements spectraux supplémentaires, on considère un déterminant noté $\mathrm{Det}^\#$ (définition 4.1.3). Ce déterminant peut être vu comme l'inverse d'une fonction zêta dynamique, mais ne nécessite aucune hypothèse du type "nombre de points fixes finis", et il rend effectivement compte des propriétés spectrales de $\mathcal{M}$. On prouve en effet

Théorème 5.5.2. *Si les poids sont continus aux points périodiques du système (condition (G), page 388), alors* $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$ *est holomorphe pour* $|z| < \widehat{R}^{-1}$, *ses zéros y sont les inverses des valeurs propres de* $\mathcal{M}$, *et les multiplicités (comme zéro et comme valeur propre) coïncident.*

Dans l'article [BR96], où ce déterminant est introduit, ce résultat est prouvé en supposant de plus les poids g_ω continus à support compact, en montrant que $\mathrm{Det}^\#$ est égal au déterminant (régularisé) d'un opérateur de Hilbert–Schmidt, analogue aux matrices de kneading de Milnor et Thurston introduites dans [MT88]. La partie 4 rappelle rapidement la preuve de Viviane Baladi et David Ruelle, jusqu'à l'obtention de leur résultat principal dans le théorème 4.4.5.

L'objet de cet article est d'affaiblir cette hypothèse de continuité des poids. En effet, ce résultat ne s'applique pas dans des cas très naturels, par exemple quand on étudie un opérateur $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{f(y)=x} \Phi(y)$. Ici, le poids g_ω vaut 1 sur l'intervalle où la branche inverse ψ_ω de f est définie, et 0 ailleurs ; il n'est donc pas continu !

Le cas des poids discontinus a déjà été étudié dans la littérature, par exemple dans l'article [BK90], ou dans le livre [Rue94a], pour des branches inverses de fonctions monotones par morceaux ; mais la définition des fonctions zêta dynamiques introduites dans ces articles nécessite que f^n ait un nombre de points fixes fini pour tout n, ou un choix arbitraire de représentants. Le cadre plus général de cet article permet d'éviter ces problèmes.

On prouve dans la partie 5 (théorèmes 5.4.1 et 5.5.2) que les propriétés de $\mathrm{Det}^\#$ restent vraies lorsque les poids (à variation bornée) sont seulement continus aux points périodiques du système. L'idée de la démonstration, due à Ruelle([Rue94b]) et mentionnée brièvement dans l'article [BR96], est de remplacer les points où les poids sont discontinus par des petits intervalles, et de se ramener ainsi au théorème dans le cas des poids continus. Le problème principal est en fait de vérifier que cette transformation ne modifie pas les rayons spectraux.

Dans le cours de la preuve, on utilisera un résultat spectral général, démontré dans l'appendice B (théorème B.0.2), qui donne automatiquement la surjectivité de certaines applications entre sous-espaces caractéristiques d'opérateurs. Ce théorème, apparemment nouveau, peut être utile dès qu'on modifie un système, pour voir que les propriétés spectrales ne changent pas.

On verra également que tous les résultats restent vrais si l'on considère l'action de l'opérateur de transfert sur les fonctions définies à un ensemble dénombrable près.

Notons qu'il existe des généralisations de ces résultats en plus grande dimension (avec des conclusions un peu moins complètes), en particulier dans [BKRS97] (cas holomorphe) et [Bai01] (cas des dimensions impaires).

Je tiens à remercier Viviane Baladi, particulièrement pour m'avoir suggéré à plusieurs reprises des pistes pour affaiblir les hypothèses dans la partie 5, jusqu'à la version actuelle qui semble la plus naturelle possible, ainsi que Mathieu Baillif et Jérôme Buzzi pour leurs commentaires.

2. Action de l'opérateur de transfert sur les fonctions bornées

2.1. Introduction

On considère une application $f : [0,1] \to [0,1]$ continue par morceaux et monotone par morceaux. On peut alors définir, pour une fonction Φ, $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{f(y)=x} \Phi(y)$: $\mathcal{M}$ est l'opérateur de transfert associé à f. Il agit sur différents espaces, par exemple les fonctions bornées ou les fonctions à variation bornée. On va essayer de relier ses rayons spectraux sur ces deux espaces.

En fait, il est utile de rajouter un poids g, ce qui transforme la définition de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{f(y)=x} g(y)\Phi(y)$.

Finalement, pour être dans un cadre plus général (nécessaire pour les preuves qui vont suivre, et qui permet entre autres facilement de considérer des branches inverses d'applications multivaluées en certains points), il convient de modifier encore un peu ces définitions, en considérant séparément chaque branche inverse de f.

On aura alors Ω un ensemble au plus dénombrable (le cas Ω espace mesuré non nécessairement dénombrable est aussi considéré dans la littérature, par exemple dans [Rue96b]) et, pour $\omega \in \Omega$, Λ_ω un intervalle de $\mathbb{R}$, g_ω une fonction à variation bornée définie sur Λ_ω, et ψ_ω un homéomorphisme de Λ_ω sur son image, incluse dans $X = \bigcup \Lambda_\omega$. L'opérateur de transfert est alors défini par $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_{x\in\Lambda_\omega} g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$ (on note $\psi_\omega x$ au lieu de $\psi_\omega(x)$ pour alléger les notations).

On peut aussi supposer que tous les Λ_ω sont inclus dans $(-1, 1)$: on considère f un plongement de $\mathbb{R}$ dans $(-1, 1)$ et on remplace g_ω par $g_\omega \circ f^{-1}$, ψ_ω par $f \circ \psi_\omega \circ f^{-1}$, et Φ par $\Phi \circ f^{-1}$. Cela ne modifie pas les variations des g_ω ou de Φ.

Cela permet de prolonger tous les ψ_ω en des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On prolonge également les g_ω par 0 hors de Λ_ω (ce qui ne modifie pas $\operatorname{Var} g_\omega$; rappelons qu'on note Var la norme de la variation totale sur l'espace $\mathcal{B}$ des fonctions à variation bornée, ces notations étant introduites dans l'appendice A). La formule pour $\mathcal{M}$ devient alors $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum_\omega g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$ (sans restriction du type $x \in \Lambda_\omega$).

2.2. *L'espace des fonctions bornées*

On notera $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \|_\infty$ qui en fait un espace de Banach. On note $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}/\mathcal{F}_\infty$ et $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_c$ la projection canonique, où $\mathcal{F}_\infty$ désigne les fonctions bornées nulles hors d'un ensemble au plus dénombrable. Comme $\mathcal{F}_\infty$ est fermé, $\| \|_\infty$ induit une norme sur $\mathcal{F}_c$. Plus précisément, soit $\Phi \in \mathcal{F}$, et $\pi(\Phi) = \Phi_c$ sa classe dans $\mathcal{F}_c$. Alors $\|\Phi_c\|_{\infty,c}$ est le sup des réels r tels qu'il existe un nombre indénombrable de x avec $|\Phi(x)| \geqslant r$.

Proposition 2.2.1. *Si $\chi \in \mathcal{F}_c$, alors il existe $\Phi \in \mathcal{F}$ avec $\Phi_c = \chi$ et $\|\Phi\|_\infty = \|\chi\|_{\infty,c}$.*

Démonstration. Soit $\Psi \in \mathcal{F}$ telle que $\Psi_c = \chi$. $A = \{x \mid |\Psi(x)| > \|\Psi_c\|_{\infty,c}\}$ est au plus dénombrable, comme réunion des ensembles $\{x \mid |\Psi(x)| \geqslant \|\Psi_c\|_{\infty,c} + 1/n\}$, chacun étant au plus dénombrable par définition. En posant $\Phi = \Psi$ hors de A, et $\Phi = 0$ sur A, on obtient le résultat. $\square$

Remarque 2.2.2. En fait, dans la suite, tout ce qui importera sera que $\mathcal{F}$ soit un Banach pour $\| \|_\infty$ et qu'il contienne $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions à variation bornée. On pourrait donc aussi prendre pour $\mathcal{F}$ l'adhérence pour $\| \|_\infty$ de $\mathcal{B}$. Ce sont les fonctions réglées, c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui en tout point de $\overline{\mathbb{R}}$ admettent une limite à droite et une limite à gauche. Un des intérêts de considérer plutôt cet espace serait qu'une fonction de $\mathcal{F}_c$ aurait un représentant canonique dans $\mathcal{F}$, celui dont les discontinuités seraient symétriques (la considération de ce représentant donne immédiatement l'équivalent de la proposition 2.2.1). Par contre, on ne gagnerait pas au niveau des rayons spectraux : pour tous les opérateurs qui vont suivre, leurs rayons spectraux sur l'espace des fonctions bornées ou sur l'espace des fonctions réglées seront les mêmes.

2.3. *Les notations*

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable ; pour $\omega \in \Omega$ on suppose donnés g_ω une fonction à variation bornée définie sur $\mathbb{R}$ nulle hors de $(-1, 1)$, et ψ_ω un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. On suppose

$$V = \sum_\omega \operatorname{Var} g_\omega < +\infty$$

On notera $\varepsilon_\omega = 1$ si ψ_ω est croissante, -1 si elle est décroissante.

Pour $\Phi \in \mathcal{F}$, on note $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$.

Proposition 2.3.1. *$\mathcal{M}$ est un opérateur de $\mathcal{F}$ dans lui-même. Il est continu, et vérifie même $\|\mathcal{M}\|_\infty \leqslant V/2$.*

Démonstration. Comme $\|g_\omega\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{Var} g_\omega$ d'après la proposition A.1.4, on a pour $\Phi \in \mathcal{F}$

$$|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant \sum \|g_\omega\|_\infty \|\Phi\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\sum \operatorname{Var} g_\omega \|\Phi\|_\infty = \frac{V}{2}\|\Phi\|_\infty < +\infty. \qquad \square$$

On définit d'autres opérateurs : soit $\mathcal{M}^\varepsilon\Phi(x) = \sum \varepsilon_\omega g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$, ainsi que $\widehat{\mathcal{M}}\Phi(x) = \sum \varepsilon_\omega g_\omega(\psi_\omega^{-1}x)\Phi(\psi_\omega^{-1}x)$, et enfin $\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\Phi(x) = \sum g_\omega(\psi_\omega^{-1}x)\Phi(\psi_\omega^{-1}x)$. Les opérateurs avec chapeau correspondent à renverser le sens de l'écoulement du temps, en rajoutant éventuellement des signes qui interviendront dans des formules de changement de variables. Ces opérateurs sont intéressants car ce sont en quelque sorte des duaux par rapport à l'opérateur $\mathcal{M}$ (pour $\widehat{\mathcal{M}}$, voir le théorème 3.1.1 ; pour $\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}$, la preuve du théorème 3.3.1). Les deux opérateurs essentiels dans la suite seront $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$, mais les deux autres interviendront naturellement dans certaines preuves (essentiellement par le biais du lemme 3.6.1).

Les quatre opérateurs $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^\varepsilon$, $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}$ sont tous continus, de $\mathcal{F}$ dans lui-même (pour $\| \|_\infty$). Comme ils envoient tous $\mathcal{F}_\infty$ dans lui-même, ils induisent des opérateurs sur $\mathcal{F}_c$ (les fonctions bornées modulo les ensembles dénombrables), que l'on notera avec un indice c.

On note R le rayon spectral de $\mathcal{M}$ pour son action sur $(\mathcal{F}, \| \|_\infty)$, et on définit de façon analogue R^ε, $\widehat{R}$ et $\widehat{R^\varepsilon}$. En considérant le rayon spectral de $\mathcal{M}_c$ pour son action sur $(\mathcal{F}_c, \| \|_{\infty,c})$, on définit aussi R_c et tous ses analogues.

Si $\underline{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, on note $|\underline{\boldsymbol{\omega}}| = m$. On note aussi $\varepsilon_{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \varepsilon_{\omega_1} \dots \varepsilon_{\omega_m}$, ainsi que $g_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(x) = g_{\omega_1}(x)g_{\omega_2}(\psi_{\omega_1}x)\dots g_{\omega_m}(\psi_{\omega_{m-1}}\circ\dots\circ\psi_{\omega_1}x)$, et $\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \psi_{\omega_m}\circ\dots\circ\psi_{\omega_1}$. On vérifie alors que $\mathcal{M}^m\Phi(x) = \sum_{|\underline{\boldsymbol{\omega}}|=m} g_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(x)\Phi(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}x)$, et qu'on a des formules analogues pour les autres opérateurs (simplement, tous les ω de la formule au rang 1 sont remplacés par des $\underline{\boldsymbol{\omega}}$).

2.4. *Propriétés spectrales élémentaires*

Dans ce paragraphe, on va étudier les liens entre les divers rayons spectraux $R, \widehat{R}, R_c, \dots$, et on va ce faisant établir un certain nombre de lemmes qui nous seront utiles par la suite. C'est souvent un peu fastidieux, donc les preuves des deux premiers résultats sont bien détaillées, et les suivantes un peu moins.

Proposition 2.4.1. *On a $R \geqslant R_c$ et $\widehat{R} \geqslant \widehat{R}_c$.*

Démonstration. Comme $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_c$ est continue surjective, il suffit d'appliquer le théorème B.0.2. $\square$

Proposition 2.4.2. *On a $R_c = R_c^\varepsilon$, et $\widehat{R}_c = \widehat{R_c^\varepsilon}$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $R_c = R_c^\varepsilon$, l'autre égalité étant analogue. Comme $\mathcal{M}_c$ et $\mathcal{M}_c^\varepsilon$ jouent le même rôle, il suffit même de prouver que $R_c \leqslant R_c^\varepsilon$.

On va démontrer que $\|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} \leqslant \|\mathcal{M}_c^\varepsilon\|_{\infty,c}$. La même preuve s'appliquera à $\mathcal{M}_c^n$ et $(\mathcal{M}_c^\varepsilon)^n$, et en prenant la puissance $1/n$ et la limite en n on pourra conclure. Comme $\mathcal{M}_c$ est la limite uniforme des mêmes opérateurs où on se restreint à des parties finies de Ω, il suffit même de se restreindre au cas où Ω est fini.

Fixons $\Phi \in \mathcal{F}$ telle que $\|\mathcal{M}_c\Phi_c\|_{\infty,c} > \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$, et $\|\Phi_c\|_{\infty,c} = 1$. D'après la proposition 2.2.1, on peut supposer que $\|\Phi\|_\infty = 1$.

Notons B l'ensemble des points x tels qu'il existe ω avec ψ_ω croissante, et ω' avec $\psi_{\omega'}$ décroissante, tels que $\psi_\omega(x) = \psi_{\omega'}(x)$. Comme, pour chaque couple (ω, ω'), il y a un seul x qui vérifie $\psi_\omega(x) = \psi_{\omega'}(x)$, B est fini. Soit C l'ensemble des discontinuités des g_ω ; il est au plus dénombrable. Comme $\|\mathcal{M}_c\Phi_c\|_{\infty,c} > \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$, l'ensemble $\{x \mid |\mathcal{M}\Phi(x)| > \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta\}$ est indénombrable, donc il contient un point x_0 qui n'appartient ni à B ni à C.

Soit $D = \{\psi_\omega(x_0)\}$ pour ψ_ω croissante, et $E = \{\psi_{\omega'}(x_0)\}$ pour $\psi_{\omega'}$ décroissante. Ces deux ensembles sont finis (car Ω est fini) et disjoints (car $x_0 \notin B$). Soit $\eta > 0$ tel que les intervalles $[y-\eta, y+\eta]$ pour y dans $D \cup E$ soient deux à deux disjoints.

On définit alors une fonction $\Psi \in \mathcal{F}$. Pour $y \in D$, on pose $\Psi(z) = \Phi(y)$ pour $z \in [y-\eta, y+\eta]$. Pour $y \in E$, on pose $\Psi(z) = -\Phi(y)$ pour $z \in [y-\eta, y+\eta]$. Enfin, ailleurs, on pose $\Psi(z) = 0$. Ψ est alors bien définie, et elle vérifie $\mathcal{M}^\varepsilon\Psi(x_0) = \mathcal{M}\Phi(x_0)$ (car on a rajouté à la main les signes, pour les éléments de E), donc $|\mathcal{M}^\varepsilon\Psi(x_0)| > \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$. Mais, comme $x_0 \notin C$, $\mathcal{M}^\varepsilon\Psi$ est continue en x_0. Il existe donc un voisinage de x_0 sur lequel $|\mathcal{M}^\varepsilon\Psi(x)| > \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$.

Ainsi, $\|\mathcal{M}_c^\varepsilon\Psi_c\|_{\infty,c} \geqslant \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$, et $\|\Psi_c\|_{\infty,c} \leqslant \|\Psi\|_\infty \leqslant 1$ (car les valeurs prises par Ψ sont aussi prises, au signe près, par Φ, et $\|\Phi\|_\infty = 1$). On en déduit $\|\mathcal{M}_c^\varepsilon\|_{\infty,c} \geqslant \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} - \delta$, et on conclut en faisant tendre δ vers 0. □

Lemme 2.4.3. *Si $\delta > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une partie finie A de $\mathbb{R}$ telle que, si $\Phi \in \mathcal{F}$ et $x \notin A$, $|\mathcal{M}^m\Phi(x)| \leqslant (\|\mathcal{M}_c^m\|_{\infty,c} + \delta)\,\|\Phi\|_\infty$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^m$ sont du même type, il suffit de le prouver pour $m = 1$. Si on a prouvé le résultat pour des Ω finis, on se restreint dans le cas général à une partie finie de Ω, assez grande pour que $|\mathcal{M}\Phi(x)|$ et $\|\mathcal{M}_c\|_{c,\infty}$ soient approchés à δ près, et on obtient le résultat à 3δ près.

Ainsi, on peut supposer Ω fini, de cardinal N. On note A l'ensemble des discontinuités des g_ω plus grandes que δ/N ; il est fini puisque les poids sont à variation bornée et en nombre fini.

Soit $x \notin A$ et $\Phi \in \mathcal{F}$. Il existe un voisinage de x sur lequel $|g_\omega(y) - g_\omega(x)| \leqslant \delta/N$ pour tout ω, puisqu'on a écarté les discontinuités trop importantes. On définit une fonction Ψ, égale à $\Phi(\psi_\omega x)$ au voisinage de chacun des $\psi_\omega x$, et nulle ailleurs. En particulier, $\mathcal{M}\Psi(x) = \mathcal{M}\Phi(x)$. Sur un voisinage de x,

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}\Psi(y) - \mathcal{M}\Psi(x)| &= \left|\sum (g_\omega(y) - g_\omega(x))\Phi(\psi_\omega x)\right| \\ &\leqslant \sum |g_\omega(y) - g_\omega(x)|\,\|\Phi\|_\infty \leqslant N\frac{\delta}{N}\,\|\Phi\|_\infty = \delta\,\|\Phi\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Ainsi, $|\mathcal{M}\Psi(y)| \geqslant |\mathcal{M}\Psi(x)| - \delta \|\Phi\|_\infty$ sur un voisinage de x, donc $\|\mathcal{M}_c\Psi_c\| \geqslant |\mathcal{M}\Psi(x)| - \delta \|\Phi\|_\infty$. Mais

$$\|\mathcal{M}_c\Psi_c\| \leqslant \|\mathcal{M}_c\| \, \|\Psi_c\| \leqslant \|\mathcal{M}_c\| \, \|\Psi\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}_c\| \, \|\Phi\|_\infty .$$

En combinant ces deux résultats, et en utilisant $\mathcal{M}\Psi(x) = \mathcal{M}\Phi(x)$, on trouve $|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant (\|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} + \delta) \|\Phi\|_\infty$. □

Remarque 2.4.4. En décomposant une fonction $\Phi \in \mathcal{F}$ comme somme d'une fonction nulle hors de A (ce qui correspond à un opérateur de rang fini) et d'une fonction nulle sur A, on en déduit par le théorème de Nussbaum que, pour l'action de $\mathcal{M}$ sur $(\mathcal{F}, \| \ \|_\infty)$, $r_{ess}(\mathcal{M}) \leqslant R_c$.

Proposition 2.4.5. *Si les poids g_ω sont continus, on a $R = R_c$ (et les trois égalités analogues pour R^ε, $\widehat{R}$, $\widehat{R^\varepsilon}$). En particulier, $R = R^\varepsilon$ et $\widehat{R} = \widehat{R^\varepsilon}$.*

Démonstration. Montrons que $R = R_c$. On sait déjà (proposition 2.4.1) que $R \geqslant R_c$, il suffit de prouver que $R \leqslant R_c$.

Il découle de la preuve du lemme précédent que, quand les poids sont continus, on peut prendre $A = \emptyset$. Dans ce cas, on obtient $\|\mathcal{M}^m\|_\infty \leqslant \left\|\mathcal{M}_c^m\right\|_{\infty,c}$, ce qui donne en passant à la limite sur m que $R \leqslant R_c$.

Les trois autres égalités $R^\varepsilon = R_c^\varepsilon$, $\widehat{R} = \widehat{R_c}$ et $\widehat{R^\varepsilon} = \widehat{R_c^\varepsilon}$ sont identiques. Comme on sait déjà que $R_c = R_c^\varepsilon$ (proposition 2.4.2), on en déduit $R = R^\varepsilon$, et de la même façon $\widehat{R} = \widehat{R^\varepsilon}$. □

Remarque 2.4.6. On peut prouver cette proposition directement sans utiliser le lemme ; cela revient à refaire la preuve du lemme, sans les problèmes techniques dus aux discontinuités. Simplement, on pose Ψ égale à $\Phi(\psi_\omega x)$ au voisinage de chaque $\psi_\omega x$ (après s'être ramené au cas où Ω est fini).

La proposition qui précède a été énoncée pour des poids continus. Elle sera généralisée (ainsi que d'autres résultats) dans la partie 5 sous une hypothèse plus faible de continuité aux points périodiques (en se ramenant par une construction annexe au cas continu).

Mentionnons pour finir deux lemmes, qui nous seront utiles par la suite, et qui utilisent les mêmes idées que les résultats précédents :

Lemme 2.4.7. *Si $\Phi \in \mathcal{F}$, $|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{M}\|_\infty \sup |\Phi(\psi_\omega x)|$.*

Démonstration. On définit Ψ égale à Φ en chacun des $\psi_\omega x$, et nulle ailleurs. Alors $\mathcal{M}\Phi(x) = \mathcal{M}\Psi(x)$, donc $|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{M}\|_\infty \|\Psi\|_\infty = \|\mathcal{M}\|_\infty \sup |\Phi(\psi_\omega x)|$. □

Lemme 2.4.8. *Soit $\Phi \in \mathcal{F}$. Alors il existe un ensemble A dénombrable tel que, pour tout réel x n'appartenant pas à A, $|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} \sup |\Phi(\psi_\omega x)|$.*

Démonstration. On applique le lemme 2.4.3 à $\delta = 1/n$ et $m = 1$ pour obtenir une partie A_n. Alors $A = \bigcup A_n$ convient (car dans la preuve du lemme 2.4.3 on montre en fait que, hors de A_n, $|\mathcal{M}\Phi(x)| \leqslant (\|\mathcal{M}_c\|_{\infty,c} + 1/n) \sup |\Phi(\psi_\omega x)|$).

Directement, on peut aussi prendre pour A les discontinuités des poids, et, si $x \notin A$, poser Ψ égale à Φ au voisinage des $\psi_\omega x$, et nulle ailleurs. Il faut pour cela avoir Ω fini, donc faire aussi un raisonnement à δ près. □

3. Action de l'opérateur de transfert sur les fonctions à variation bornée

Dans cette partie, on utilisera librement les notations et les résultats de l'appendice A. Rappelons seulement que $\mathcal{B}$ désigne l'espace des fonctions à variation bornée, muni de la norme $\operatorname{Var}\varphi = \sup\left\{|\varphi(a_0)| + \sum |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| + |\varphi(a_n)|\right\}$, le sup étant pris sur toutes les subdivisions $a_0 < \ldots < a_n$. Rappelons aussi qu'on définit dans cet appendice une intégrale $\int \psi \, \nabla\varphi \, \chi$ pour des fonctions à variation bornée ψ, φ et χ, qui vérifie des théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties.

$\mathcal{M}$ agit sur $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions à variation bornée. Cette action est continue, et on a même $\|\mathcal{M}\|_{\mathrm{Var}} \leqslant V$, où $V = \sum \|g_\omega\|_\infty$. De la même façon, les trois autres opérateurs $\mathcal{M}^\varepsilon$, $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}$ agissent également sur $\mathcal{B}$.

On notera $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$ le rayon spectral de $\mathcal{M}$ pour son action sur $(\mathcal{B}, \mathrm{Var})$. Dans cette partie, on va étudier le lien entre ce rayon spectral et R et $\widehat{R}$, en utilisant essentiellement l'intégrale construite dans l'appendice A.

3.1. Lien entre $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$

Le lien entre $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ s'exprime bien par une formule intégrale :

Théorème 3.1.1. *Soient $\psi, \Phi \in \mathcal{B}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\int \psi \, \nabla(\mathcal{M}^m \Phi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega_k} \int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1} \psi \, \nabla(g_{\omega_k}) \, (\mathcal{M}^{m-k}\Phi) \circ \psi_{\omega_k} + \int \widehat{\mathcal{M}}^m \psi \, \nabla \Phi.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la propriété pour $m = 1$; ensuite, on conclut par récurrence en écrivant $\mathcal{M}^m \Phi = \mathcal{M}(\mathcal{M}^{m-1}\Phi)$, et en utilisant le résultat au rang 1.

Si $\psi, \Phi \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}
\int \psi \, \nabla(\mathcal{M}\Phi) &= \sum_\omega \int \psi \, \nabla(g_\omega \cdot \Phi \circ \psi_\omega) \\
&= \sum_\omega \left(\int \psi \, \nabla(g_\omega) \Phi \circ \psi_\omega + \int \psi g_\omega \, \nabla(\Phi \circ \psi_\omega) \right) \\
&= \sum_\omega \int \psi \, \nabla(g_\omega) \Phi \circ \psi_\omega + \sum_\omega \varepsilon_\omega \int \psi \circ \psi_\omega^{-1} \cdot g_\omega \circ \psi_\omega^{-1} \, \nabla \Phi \\
&= \sum_\omega \int \psi \, \nabla(g_\omega) \Phi \circ \psi_\omega + \int \widehat{\mathcal{M}} \psi \, \nabla \Phi.
\end{aligned}$$

On a utilisé $\nabla(f \cdot g) = \nabla(f) g + f \, \nabla(g)$, qui vient de la proposition A.2.3, ainsi que la propriété de changement de variables A.2.4. □

3.2. Majoration du rayon spectral

On a déjà vu que $\mathcal{M}$ agissait sur les fonctions à variation bornée. De plus, si $\Phi \in \mathcal{B}$, alors $\mathcal{M}\Phi \in \mathcal{B}_0$ l'ensemble des fonctions à variation bornée qui tendent vers 0 à l'infini (car tous les poids ont leur support dans $[-1, 1]$).

Théorème 3.2.1. *$\mathcal{M}$ agit sur $\mathcal{B}$. Son rayon spectral (pour la norme* Var*) est majoré par* $\max(R, \widehat{R})$.

Remarque 3.2.2. On a un énoncé identique pour $\widehat{\mathcal{M}}$, puisque les deux opérateurs jouent le même rôle.

Démonstration. Etant donnée une fonction $\Phi \in \mathcal{B}$, on veut majorer $\operatorname{Var} \mathcal{M}^m \Phi$. Pour cela, il suffit d'après le théorème A.3.2 de majorer des expressions du type $\int \psi\, \nabla(\mathcal{M}^m \Phi)$ (car $\mathcal{M}^m \Phi \in \mathcal{B}_0$), ce qui se fait en utilisant le théorème 3.1.1.

Si $\psi \in \mathcal{B}$, on a d'après ce théorème

$$\int \psi\, \nabla(\mathcal{M}^m \Phi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega_k} \int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1} \psi\, \nabla(g_{\omega_k})\, (\mathcal{M}^{m-k} \Phi) \circ \psi_{\omega_k} + \int \widehat{\mathcal{M}}^m \psi\, \nabla \Phi.$$

Soient $C > \max(R, \widehat{R})$ et K une constante telle que $\|\mathcal{M}^m\|_\infty \leqslant K C^m$ et $\left\|\widehat{\mathcal{M}}^m\right\|_\infty \leqslant K C^m$ pour tout m. En utilisant $\|\Phi\|_\infty \leqslant \operatorname{Var} \Phi/2$ et le fait que $\left|\int \psi_1\, \nabla\varphi\, \psi_2\right| \leqslant \|\psi_1\|_\infty \|\psi_2\|_\infty \operatorname{var} \varphi$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\left|\int \psi\, \nabla(\mathcal{M}^m \Phi)\right| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega} \operatorname{var} g_\omega \left\|\widehat{\mathcal{M}}^{k-1} \psi\right\|_\infty \left\|\mathcal{M}^{m-k} \Phi\right\|_\infty + \operatorname{var} \Phi \left\|\widehat{\mathcal{M}}^m \psi\right\|_\infty \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega} \operatorname{Var} g_\omega K C^{k-1} \|\psi\|_\infty K C^{m-k} \|\Phi\|_\infty + K C^m \operatorname{Var} \Phi \|\psi\|_\infty \\
&\qquad \leqslant (m V K^2/(2C) + K) C^m \operatorname{Var} \Phi \|\psi\|_\infty .
\end{aligned}$$

Le théorème A.3.2 donne donc que $\operatorname{Var} \mathcal{M}^m \Phi \leqslant 3(m V K^2/(2C) + K) C^m \operatorname{Var} \Phi$, ce qui montre que $\|\mathcal{M}^m\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 3(m V K^2/(2C) + K) C^m$. Prenant la puissance $1/m$, on trouve que le rayon spectral de $\mathcal{M}$ est majoré par C. C'est valable pour tout $C > \max(R, \widehat{R})$, ce qui permet de conclure. □

3.3. Minoration du rayon spectral

Dans [Rue96a], théorème B.1 (a), Ruelle affirme que $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \geqslant \widehat{R}$, mais ce résultat est faux. Considérons par exemple $\psi_1 = \mathrm{Id}$, $g_1 = \delta_0$, $\psi_2 = -\mathrm{Id}$ et $g_2 = -\delta_0$ (où δ_0 est la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs). Alors $\mathcal{M} = 0$, donc $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} = 0$, tandis que $\widehat{\mathcal{M}} \Phi(0) = 2\Phi(0)$, donc $\widehat{R} = 2$.

En fait, il vaut mieux comparer $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$ à $\widehat{R^\varepsilon}$.

Théorème 3.3.1. *Le rayon spectral de $\mathcal{M}$ vérifie $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \geqslant \widehat{R^\varepsilon}$.*

Démonstration. Si ψ est une fonction bornée et Φ une fonction de $\mathcal{B}_\infty$, i.e. une fonction à variation bornée nulle hors d'un ensemble dénombrable, notons, suivant [BR96],

$$\langle \psi, \Phi\rangle = \sum_x \psi(x)\Phi(x).$$

Cette notation a un sens, et la somme vérifie même $|\langle \psi, \Phi\rangle| \leqslant \|\psi\|_\infty \operatorname{Var}\Phi/2$ (car $\sum |\Phi(x)| \leqslant \operatorname{Var}\Phi/2$, ce qui se voit en considérant une subdivision obtenue en intercalant des points où $\Phi = 0$, qui sont denses, et des points où $\Phi \neq 0$).

On a alors

$$\langle \widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi, \Phi\rangle = \langle \psi, \mathcal{M}\Phi\rangle.$$

Pour le prouver, on calcule :

$$\begin{aligned}\langle \psi, \mathcal{M}\Phi\rangle &= \sum_{x,\omega} \psi(x) g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x) = \sum_{y,\omega} \psi(\psi_\omega^{-1}y) g_\omega(\psi_\omega^{-1}y)\Phi(y)\\ &= \langle \widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi, \Phi\rangle.\end{aligned}$$

Considérons maintenant ψ une fonction bornée et δ_x le Dirac en x, i.e. la fonction qui vaut 1 en x et 0 ailleurs. Alors

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi(x)\right| = \left|\langle \widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi, \delta_x\rangle\right| = \left|\langle \psi, \mathcal{M}\delta_x\rangle\right| &\leqslant \|\psi\|_\infty \operatorname{Var}(\mathcal{M}\delta_x)/2\\ &\leqslant \|\psi\|_\infty \|\mathcal{M}\|_{\mathrm{Var}} \operatorname{Var}(\delta_x)/2 = \|\psi\|_\infty \|\mathcal{M}\|_{\mathrm{Var}}.\end{aligned}$$

En passant au sup sur x, on trouve $\left\|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi\right\|_\infty \leqslant \|\psi\|_\infty \|\mathcal{M}\|_{\mathrm{Var}}$, donc $\left\|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\right\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}\|_{\mathrm{Var}}$. Comme ce résultat s'applique aussi aux itérés des deux opérateurs, cela permet de conclure. □

Remarque 3.3.2. On déduit de $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \max(R, \widehat{R})$ et $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \geqslant \widehat{R^\varepsilon}$ que $\widehat{R^\varepsilon} \leqslant \max(R, \widehat{R})$, un résultat qui n'est pas du tout évident *a priori*.

Dans les bons cas (poids continus, ou encore branches inverses d'une fonction) où $\widehat{R} = \widehat{R^\varepsilon}$, on retrouve l'affirmation de Ruelle.

3.4. *Majoration du rayon spectral essentiel*

Lemme 3.4.1. *Soit $U : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ un opérateur continu. Si $\mathcal{N} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est défini par $\mathcal{N}\Phi(x) = \int U\chi_{(-\infty,x)} \nabla\Phi$, alors $\|\mathcal{N}\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 3\|U\|_\infty$.*

Démonstration. Soit $a_0 < \ldots < a_n$ une subdivision de $\mathbb{R}$. Alors, pour certains signes δ_0, δ_1 et ε_i, on a

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{N}\Phi(a_0)| + \sum |\mathcal{N}\Phi(a_i) - \mathcal{N}\Phi(a_{i-1})| + |\mathcal{N}\Phi(a_n)| \\
&\quad = \delta_0 \mathcal{N}\Phi(a_0) + \sum \varepsilon_i (\mathcal{N}\Phi(a_i) - \mathcal{N}\Phi(a_{i-1})) + \delta_1 \mathcal{N}\Phi(a_n) \\
&\quad = \delta_0 \int U \chi_{(-\infty,a_0)} \nabla\Phi + \int U\Big(\sum \varepsilon_i \chi_{[a_{i-1},a_i)}\Big) \nabla\Phi + \delta_1 \int U \chi_{(-\infty,a_n)} \nabla\Phi \\
&\quad \leqslant \Big(\|U\chi_{(-\infty,a_0)}\|_\infty + \Big\| U\Big(\sum \varepsilon_i \chi_{[a_{i-1},a_i)}\Big)\Big\|_\infty + \|U\chi_{(-\infty,a_n)}\|_\infty \Big) \operatorname{Var}\Phi \\
&\quad \leqslant 3\,\|U\|_\infty \operatorname{Var}\Phi.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en passant au sup sur la subdivision. □

Remarque 3.4.2. Ce lemme reste vrai pour des opérateurs qui sont de la forme $\mathcal{N}\Phi(x) = \lim_{y\nearrow x} \int U\chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi$, on l'obtient en fait simplement par passage à la limite simple.

Théorème 3.4.3. *Le rayon spectral essentiel de $\mathcal{M}$ pour son action sur $\mathcal{B}$ vérifie $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R}$.*

Démonstration. Le théorème 3.1.1 donne que, si $\psi, \Phi \in \mathcal{B}$

$$\int \psi\, \nabla(\mathcal{M}^m\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega_k} \int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1}\psi\, \nabla(g_{\omega_k})\, (\mathcal{M}^{m-k}\Phi)\circ\psi_{\omega_k} + \int \widehat{\mathcal{M}}^m \psi\, \nabla\Phi.$$

La proposition A.3.1 (qui affirme que si f est à variation bornée et tend vers 0 à l'infini alors $f(x) = 2\int \chi_{(-\infty,x)} \nabla f - \lim_{y\nearrow x} \int \chi_{(-\infty,y)} \nabla f)$ permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^m\Phi(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\omega_k} \Big[2\int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1}\chi_{(-\infty,x)}\, \nabla(g_{\omega_k})\, (\mathcal{M}^{m-k}\Phi)\circ\psi_{\omega_k} \\
- \lim_{y\nearrow x} \int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1}\chi_{(-\infty,y)}\, \nabla(g_{\omega_k})\, (\mathcal{M}^{m-k}\Phi)\circ\psi_{\omega_k} \Big] \\
+ 2\int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,x)}\, \nabla\Phi - \lim_{y\nearrow x} \int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)}\, \nabla\Phi.
\end{aligned}$$

On a pu intervertir somme et limite puisque tout converge absolument. Ainsi, on peut décomposer $\mathcal{M}^m$ comme somme de deux opérateurs A_1 et A_2.

On va voir que le premier opérateur est compact. Il suffit de vérifier que chaque terme de la somme est compact. Pour cela, on va utiliser les théorèmes A.4.1 et A.4.2. Il suffit de vérifier que $y \mapsto \widehat{\mathcal{M}}^k \chi_{(-\infty,y)}(x)$ a sa variation bornée par une constante indépendante de x. Mais

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{M}}^k \chi_{(-\infty,y)}(x) &= \sum_{|\underline{\boldsymbol{\omega}}|=k} \varepsilon_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\, g_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{-1}x)\, \chi_{(-\infty,y)}(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{-1}x) \\
&= \sum_{|\underline{\boldsymbol{\omega}}|=k} \varepsilon_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\, g_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{-1}x)\, \chi_{(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}^{-1}x,+\infty)}(y).
\end{aligned}$$

À x fixé, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles, de variation bornée par 1. Ainsi, la variation de $y \mapsto \widehat{\mathcal{M}}^k \chi_{(-\infty,y)}(x)$ est majorée par $\sum \left\| g_{\underline{\omega}} \right\|_\infty \leqslant V^k$. Cela montre que l'opérateur intégral $T\Phi(y) = \int \widehat{\mathcal{M}}^{k-1} \chi_{(-\infty,y)} \nabla(g_\omega) \Phi$ est compact, et sa composée avec $\mathcal{M}^{m-k}$ l'est aussi. En sommant, A_1 est compact.

De plus, on a $\|A_2\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 9\|\widehat{\mathcal{M}}^m\|_\infty$, en utilisant le lemme 3.4.1 (et la remarque qui le suit). Ainsi, $r_{ess}(\mathcal{M}^m) \leqslant 9\|\widehat{\mathcal{M}}^m\|_\infty$, i.e. $r_{ess}(\mathcal{M}) \leqslant \left(9\|\widehat{\mathcal{M}}^m\|_\infty\right)^{1/m}$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient bien $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R}$. $\square$

Théorème 3.4.4. *Le rayon spectral essentiel de $\mathcal{M}$ pour son action sur $\mathcal{B}$ vérifie $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R}_c$.*

Démonstration. Dans la preuve du théorème 3.4.3, on a montré que, pour un certain opérateur compact K (qui ne joue pas de rôle pour le rayon spectral essentiel), $\mathcal{M}^m$ s'écrit

$$\mathcal{M}^m\Phi(y) = K\Phi(y) + 2\int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi - \lim_{z \nearrow y} \int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,z)} \nabla\Phi.$$

Notons $\mathcal{N}\Phi(y) = \int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi$; on va le décomposer comme somme d'un opérateur de rang fini et d'un opérateur de norme de l'ordre de $\|\widehat{\mathcal{M}}_c^m\|_{\infty,c}$.

On applique le lemme 2.4.3 à $\widehat{\mathcal{M}}^m$, pour obtenir une partie finie A telle que si $\Phi \in \mathcal{F}$ et $x \notin A$, $|\widehat{\mathcal{M}}^m\Phi(x)| \leqslant (\left\|\widehat{\mathcal{M}}_c^m\right\|_{\infty,c} + \delta) \|\Phi\|_\infty$. On définit alors, pour $\chi \in \mathcal{F}$, $T\chi(x) = \chi(x)$ si $x \notin A$, 0 si $x \in A$, et on pose $U = \mathrm{Id} - T$. Alors $\|T\widehat{\mathcal{M}}^m \chi\|_\infty \leqslant (\|\widehat{\mathcal{M}_c}^m\|_{\infty,c} + \delta) \|\chi\|_\infty$: c'est clair hors de A, d'après sa définition, et ça reste vrai sur A par construction de T.

Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\Phi(y) &= \int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi \\
&= \int T\widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi + \int U\widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,y)} \nabla\Phi \\
&= \mathcal{N}_1\Phi(y) + \mathcal{N}_2\Phi(y).
\end{aligned}$$

Le lemme 3.4.1 garantit que $\|\mathcal{N}_1\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 3\|T\widehat{\mathcal{M}}^m\|_\infty \leqslant 3(\|\widehat{\mathcal{M}_c}^m\|_{\infty,c} + \delta)$. De plus, comme $U\widehat{\mathcal{M}}^m\chi$ est nulle hors de A, $\mathcal{N}_2\Phi$ ne dépend que des valeurs de Φ en a, a_- et a_+ pour a dans A, donc $\mathcal{N}_2$ se factorise par un opérateur de rang fini, et est lui-même de rang fini.

De la même façon, si on pose $\mathcal{N}'\Phi(y) = \lim_{z\nearrow y} \int \widehat{\mathcal{M}}^m \chi_{(-\infty,z)} \nabla\Phi$, on décompose $\mathcal{N}'$ comme somme de deux opérateurs $\mathcal{N}_1'$ et $\mathcal{N}_2'$, le premier étant de norme $\leqslant 3(\|\widehat{\mathcal{M}_c}^m\|_{\infty,c} + \delta)$ et le second de rang fini.

Finalement, on peut écrire $\mathcal{M}^m = K' + 2\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1'$, où K' est compact. Donc $r_{ess}(\mathcal{M}^m) \leqslant 2\|\mathcal{N}_1\| + \left\|\mathcal{N}_1'\right\| \leqslant 9(\|\widehat{\mathcal{M}_c}^m\|_{\infty,c} + \delta)$. On conclut en faisant tendre δ vers 0 puis m vers l'infini. $\square$

On peut récapituler les inégalités entre les rayons spectraux :

$$r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R}_c = \widehat{R_c^\varepsilon} \leqslant \widehat{R^\varepsilon} \leqslant r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \max(R, \widehat{R}).$$

Dans de nombreux cas, ces inégalités permettent de calculer $r(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$, ou de montrer l'existence d'un trou spectral pour l'action de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{B}$.

3.5. *Action sur le quotient*

On a des analogues des théorèmes précédents au niveau du quotient :

Théorème 3.5.1. *On a* $r(\mathcal{M}_c)_{\mathrm{Var}_c} \leqslant \max(R_c, \widehat{R_c})$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 3.2.1, mais en remplaçant toutes les intégrales $\int$ par des intégrales $\int_c$, et en utilisant le théorème A.5.1. □

Théorème 3.5.2. *On a* $r(\mathcal{M}_c)_{\mathrm{Var}_c} \geqslant \widehat{R_c^\varepsilon} (= \widehat{R_c})$.

Démonstration. On montre que $\|\mathcal{M}_c\|_{\mathrm{Var}_c} \geqslant \left\|\widehat{\mathcal{M}_c^\varepsilon}\right\|_{\infty,c}$ comme dans la démonstration du théorème 3.3.1. On suit le même schéma de preuve, le seul problème étant que dans le cas non quotienté on prend un Dirac, tué dans le quotient, ce qu'il faut éviter. On peut supposer Ω fini.

On prend ψ avec $\|\psi\|_\infty = 1$ et $\left\|\widehat{\mathcal{M}_c^\varepsilon}\psi_c\right\|_{\infty,c}$ grand. Soit x un point de continuité des $g_\omega \circ \psi_\omega^{-1}$ en lequel $\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi$ est grand. Si φ est égale à 1 sur un petit voisinage de x (c'est l'analogue de δ_x), on vérifie alors que $\mathcal{M}\varphi$ tend vers $\mathcal{M}\delta_x$ en chacun des $\psi_\omega^{-1}x$ (par continuité), et qu'elle s'annule entre deux de ces points (si on a pris le voisinage de x où φ vaut 1 suffisamment petit, et en utilisant Ω fini). Donc $\mathrm{Var}_c(\mathcal{M}_c\varphi_c) \geqslant \mathrm{Var}(\mathcal{M}\delta_x) \geqslant \left|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi(x)\right|$, et on conclut comme précédemment. □

Théorème 3.5.3. *On a* $r_{ess}(\mathcal{M}_c)_{\mathrm{Var}_c} \leqslant \widehat{R_c}$.

Démonstration. On pourrait répéter la preuve du cas non quotienté, en utilisant les propriétés de compacité de $\int_c$, mais il n'y en pas besoin. En effet, on sait déjà que $r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}} \leqslant \widehat{R_c}$, et le théorème B.0.2 assure que $r_{ess}(\mathcal{M}_c)_{\mathrm{Var}_c} \leqslant r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$. □

3.6. *Lien entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_c$*

La projection $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_c$ va envoyer les sous-espaces caractéristiques de $\mathcal{M}$ dans ceux de $\mathcal{M}_c$. On peut préciser son comportement. En particulier, dans le cas des poids continus, on va voir que c'est un isomorphisme.

Lemme 3.6.1. *Si $\Phi \in \mathcal{B}_\infty$ (les fonctions à variation bornée nulles hors d'un ensemble dénombrable) vérifie $\mathcal{M}\Phi = \lambda\Phi$ avec $|\lambda| > \widehat{R^\varepsilon}$, alors $\Phi = 0$.*

Démonstration. On utilise la notation $\langle \psi, \Phi\rangle = \sum \psi(x)\Phi(x)$ introduite dans la preuve du théorème 3.3.1 ; elle vérifie $\langle\psi, \mathcal{M}\Phi\rangle = \langle\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi, \Phi\rangle$, donc ici $\langle\psi, \Phi\rangle = \lambda^{-1}\langle\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}\psi, \Phi\rangle$.

Soit $\widehat{R^\varepsilon} < C < |\lambda|$, et K tel que $\left\|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}^m\right\| \leqslant KC^m$. Alors

$$\begin{aligned}|\langle\psi, \Phi\rangle| = |\lambda|^{-m}|\langle\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}^m\psi, \Phi\rangle| &\leqslant |\lambda|^{-m}\left\|\widehat{\mathcal{M}^\varepsilon}^m\psi\right\|_\infty \mathrm{Var}\,\Phi/2\\ &\leqslant |\lambda|^{-m}KC^m\,\|\psi\|_\infty\,\mathrm{Var}\,\Phi/2.\end{aligned}$$

En passant à la limite, $\langle\psi, \Phi\rangle = 0$. En prenant pour ψ la fonction qui vaut 1 en x et 0 ailleurs, on obtient $\Phi(x) = 0$. □

Proposition 3.6.2. *Pour $|\lambda| > \widehat{R^\varepsilon}$, $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_c$ réalise un isomorphisme de $E_\lambda(\mathcal{M})$ sur $E_\lambda(\mathcal{M}_c)$ (où $E_\lambda(\mathcal{M})$ désigne le sous-espace caractéristique associé à l'action de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{B}$, et à la valeur propre λ).*

Démonstration. On a vu dans les propositions 2.4.1 et 2.4.2 que $\widehat{R^\varepsilon} \geqslant \widehat{R^\varepsilon_c} = \widehat{R}_c$. Donc $|\lambda| > \widehat{R}_c \geqslant r_{ess}(\mathcal{M})_{\mathrm{Var}}$, ce qui assure que $E_\lambda(\mathcal{M})$ est bien défini, de même que $E_\lambda(\mathcal{M}_c)$. On sait alors (théorème B.0.2) que π est une surjection de $E_\lambda(\mathcal{M})$ sur $E_\lambda(\mathcal{M}_c)$. Il reste à vérifier son injectivité.

Soit $\Phi \in E_\lambda(\mathcal{M})$ telle que $\Phi_c = 0$. Autrement dit, $\Phi \in \mathcal{B}_\infty$. Soit n tel que $(\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{M})^n \Phi = 0$. Notons $\Psi = (\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{M})^{n-1}\Phi$: $\Psi \in \mathcal{B}_\infty$ et Ψ vérifie $\mathcal{M}\Psi = \lambda\Psi$ avec $|\lambda| > \widehat{R^\varepsilon}$, donc par le lemme précédent $\Psi = 0$, i.e. $(\lambda \operatorname{Id} - \mathcal{M})^{n-1}\Phi = 0$. Ainsi, on fait diminuer le n, jusqu'à 0, ce qui donne $\Phi = 0$. $\square$

Corollaire 3.6.3. *On suppose les poids g_ω continus. Alors, pour $|\lambda| > \widehat{R}$, π réalise un isomorphisme de $E_\lambda(\mathcal{M})$ sur $E_\lambda(\mathcal{M}_c)$.*

Démonstration. Cela vient juste de $\widehat{R} = \widehat{R^\varepsilon} (= \widehat{R}_c)$ (proposition 2.4.5). $\square$

4. Déterminant des opérateurs de transfert ([BR96])

Dans cette partie, on reprend l'article [BR96], dans lequel sont définis une trace et un déterminant pour les opérateurs de transfert : la trace et le déterminant sharp (qu'on pourrait traduire par déterminant dièse en français, mais je préfère m'en tenir à la terminologie "sharp" pour ne pas introduire de confusion). Dans cet article [BR96] (et donc dans cette partie), les poids sont supposés continus. On généralisera les résultats à des poids discontinus dans la partie suivante.

4.1. Définition de la trace sharp

En général, les opérateurs de transfert considérés dans cet article ne sont pas compacts (sauf lorsque tous les poids ont des supports finis). Il n'y a donc pas d'espoir de définir leur trace (et leur déterminant) de façon canonique (i.e. comme trace et déterminant d'opérateurs nucléaires). Il faut donc poser une définition *ad hoc*, en espérant qu'elle vérifiera de bonnes propriétés.

On commence par définir une "trace", notée $\mathrm{Tr}^\#$, pour les opérateurs élémentaires :

Définition 4.1.1. *Si $\mathcal{L}\Phi(x) = g(x)\Phi(\psi x)$, on pose $\mathrm{Tr}^\#(\mathcal{L}) = \int \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\psi(x) - x) \, \mathrm{d}g(x)$.*

(la notation sgn désigne la fonction qui vaut 1 sur $(0, +\infty)$, -1 sur $(-\infty, 0)$ et est nulle en 0). L'intégrale utilisée ici est une intégrale de Stieltjes classique.

On définit ensuite la trace d'un opérateur général :

Définition 4.1.2. *Pour un opérateur $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{M}\Phi(x) = \sum g_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x) = \sum \mathcal{L}_\omega \Phi(x)$, on pose $\mathrm{Tr}^\#(\mathcal{M}) = \sum \mathrm{Tr}^\#(\mathcal{L}_\omega)$.*

Enfin, une fois que la trace est définie, on peut définir le déterminant de $\mathcal{M}$:

Définition 4.1.3. *On pose* $\operatorname{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+z\mathcal{M}) = \exp\bigl(-\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{z^n}{n}\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{M}^n)\bigr)$ *pour* $|z|$ *assez petit.*

On vérifie aisément que $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{M}^n) \leqslant V^n$ (où V désigne $\sum \operatorname{Var} g_\omega$, fini par hypothèse), donc $\operatorname{Det}^{\#}$ est bien défini sur le disque de rayon $1/V$.

En fait, il y a un petit abus de notation, puisque $\operatorname{Tr}^{\#}$ ne dépend pas seulement de l'opérateur $\mathcal{M}$, mais aussi de la façon de le représenter comme somme (le choix d'une autre représentation peut faire varier la trace ; par exemple, la représentation de l'opérateur nul dans l'exemple du paragraphe 3.3 donne une $\operatorname{Tr}^{\#}$ égale à 1). Il faut donc considérer que $\operatorname{Tr}^{\#}$ s'applique à des sommes formelles (et pas vraiment à des opérateurs) pour lever l'ambiguïté (en considérant que la représentation en somme formelle de $\mathcal{M}^n$ est $\mathcal{M}^n\Phi(x) = \sum_{|\underline{\omega}|=n} g_{\underline{\omega}}(x)\Phi(\psi_{\underline{\omega}}x)$).

Par contre, on vérifie que cette ambiguïté disparaît si on se restreint à des poids continus ([BR96], lemme 2.1). En fait, nombre de problèmes (notamment ceux liés aux intégrations par parties) disparaissent lorsque les poids sont continus. C'est pourquoi *dans toute la suite de cette partie, on supposera les poids continus,* suivant [BR96]. Rappelons qu'on suppose aussi que les poids sont à support dans $(-1, 1)$, donc à support compact.

On montrera alors que $\operatorname{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+z\mathcal{M})$ se prolonge analytiquement au disque de rayon $1/\widehat{R}$, et qu'il s'annule exactement aux points où $\mathrm{Id}+z\mathcal{M}$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\operatorname{Det}^{\#}$ vérifie les bonnes propriétés qu'on attend d'un déterminant.

4.2. Premières propriétés de la trace sharp

Proposition 4.2.1. *Soit* $\mathcal{L}\Phi(x) = g(x)\Phi(\psi x)$. *Si* ψ *a un nombre fini de points fixes* $a_1 < \ldots < a_n$, *alors* $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = \sum L(a_i,\psi)g(a_i)$ *où* $L(a_i,\psi) = 1$ *si le graphe de* ψ *traverse strictement la diagonale en* a_i *de gauche à droite,* -1 *si il traverse la diagonale de bas en haut, et* 0 *sinon.*

Démonstration. Entre a_i et a_{i+1}, $\psi(x)-x$ reste de signe constant $\varepsilon = \pm 1$. Donc $\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\psi(x)-x)\,\mathrm{d}g(x) = \varepsilon/2(g(a_{i+1})-g(a_i))$. En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sgn}(\psi(x)-x)}{2}\,\mathrm{d}g(x) &= \sum \frac{1}{2} g(a_i)\bigl(\operatorname{sgn}(\psi(a_i)-a_i)_- - \operatorname{sgn}(\psi(a_i)-a_i)_+\bigr)\\ &= \sum g(a_i)L(a_i,\psi).\end{aligned}$$

On a utilisé la nullité de $g(\pm\infty)$ (car les poids sont à support compact), et le fait que $L(a_i,\psi)$ a été défini pour être égal à $\frac{1}{2}\bigl(\operatorname{sgn}(\psi(a_i)-a_i)_- - \operatorname{sgn}((\psi(a_i)-a_i)_+\bigr)$. □

Ainsi, on peut considérer que $\operatorname{Tr}^{\#}$ compte les points périodiques avec le poids g, en ajoutant un signe analogue à un indice de Lefschetz (en fait, $L(a,\psi) = \operatorname{sgn}(1-\psi'(a))$, au moins quand ψ est C^2 et $\psi''(a)\neq 0$; c'est un véritable indice de Lefschetz, qui se généralise en dimension supérieure par $\operatorname{sgn}(\det(\mathrm{Id}-T_a\psi))$). Autrement dit, si $\zeta(z) = 1/\operatorname{Det}^{\#}(1-z\mathcal{M})$, alors $\zeta(z) = \exp\bigl(\sum \frac{z^n}{n}\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{M}^n)\bigr)$ est une sorte de fonction ζ dynamique, qui compte les points périodiques avec des poids $g_{\underline{\omega}}$. Ainsi, tous les résultats que l'on obtiendra pour $\operatorname{Det}^{\#}$ pourront être interprétés comme des résultats sur une fonction ζ dynamique. C'est entre autres pour cela qu'on a posé cette définition de la trace sharp.

Remarquons que, dans cette preuve, on a utilisé la continuité de g aux a_i pour intégrer (sinon, on aurait eu des termes $g(a_{i\,-})$ et $g(a_{i\,+})$). Ainsi, pour que $\mathrm{Det}^{\#}$ soit vraiment un déterminant dynamique, il faut au moins avoir la continuité des poids aux points périodiques. On verra plus loin que, effectivement, cette hypothèse est suffisante pour avoir les résultats que l'on va démontrer dans cette partie dans le cas des poids continus. Par contre, quand on retire cette hypothèse, tout se complique (voir par exemple [Rue96a], où l'équation $\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+\mathcal{M}) = 1/\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+\widehat{\mathcal{M}})$ est remplacée par une équation fonctionnelle plus compliquée qui tient compte des discontinuités des poids aux points périodiques).

Remarque 4.2.2. Quand ψ n'a pas un nombre fini de points fixes, et que les poids ne sont pas continus, on a quand même une interprétation analogue. Ecrivons l'ouvert $\{\psi(x) \neq x\}$ comme réunion de ses composantes connexes (a_i, b_i), et soit σ_i le signe de $\psi(x)-x$ sur cet intervalle. Alors $\mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = \sum_i \frac{\sigma_i}{2}(g(b_{i\,-})-g(a_{i\,+}))$: cela se voit en écrivant $\mathrm{sgn}(\psi(x)-x) = \sum_i \sigma_i \chi_{(a_i,b_i)}(x)$, en utilisant $\int \chi_{(a_i,b_i)}\,\mathrm{d}g = g(b_{i\,-})-g(a_{i\,+})$, et en sommant en utilisant par exemple le théorème de convergence dominée. Dans tous les cas, $\mathrm{Tr}^{\#}$ ne dépend donc que de la valeur des poids au voisinage des points fixes.

La trace $\mathrm{Tr}^{\#}$ vérifie des propriétés analogues à celles d'une trace habituelle, par exemple :

Proposition 4.2.3. *On a* $\mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2) = \mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1)$ *(avec l'hypothèse de continuité des poids).*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des opérateurs élémentaires, c'est-à-dire $\mathcal{L}_i\Phi(x) = g_i(x)\Phi(\psi_i x)$ pour $i = 1, 2$.

Traitons d'abord le cas où ψ_1 et ψ_2 sont croissantes. Alors $\psi_2\psi_1-\mathrm{Id}$ et $\psi_1\psi_2-\mathrm{Id}$ sont conjuguées l'une de l'autre (par ψ_1), donc ont le même signe sur des intervalles conjugués l'un de l'autre. Plus précisément, l'ensemble $\{x \mid \psi_2\psi_1 x \neq x\}$ est un ouvert, qui s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts (a_i, b_i). Soit σ_i le signe de $\psi_2\psi_1 x - x$ sur (a_i, b_i) ; en notant $a_i' = \psi(a_i)$ et $b_i' = \psi_1(b_i)$, $\psi_1\psi_2 x - x$ est aussi de signe σ_i sur l'intervalle (a_i', b_i'), donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1) &= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\psi_2\psi_1 x - x)\,\mathrm{d}\big(g_1(x)g_2(\psi_1 x)\big)\\
&= \sum \frac{1}{2}\sigma_i\big(g_1(b_i)g_2(\psi_1 b_i) - g_1(a_i)g_2(\psi_1 a_i)\big)\\
&= \sum \frac{1}{2}\sigma_i\big(g_1(\psi_1 b_i')g_2(b_i') - g_1(\psi_1 a_i')g_2(a_i')\big) = \mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1).
\end{aligned}
$$

Si ψ_1 et ψ_2 sont décroissantes, la preuve est identique, en posant $a_i' = \psi_1(b_i)$ et $b_i' = \psi_1(a_i)$.

Enfin, si l'une est croissante et l'autre décroissante, $\psi_2\psi_1$ a un unique point fixe a, et $\mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1) = g_1(a)g_2(\psi_1 a)$. De même, $\psi_1\psi_2$ a un unique point fixe $b(=\psi_1(a))$ et $\mathrm{Tr}^{\#}(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = g_1(\psi_2 b)g_2(b)$. C'est la même valeur. $\square$

Remarquons qu'on utilise la continuité des poids pour se débarrasser des limites à gauche et à droite. En fait, quand les poids ne sont pas continus, le résultat devient faux pour ψ_1 croissante et ψ_2 décroissante (ou inversement).

On peut établir un lien entre les traces de $\mathcal{M}$ et de $\widehat{\mathcal{M}}$, qui nous sera utile par la suite.

Proposition 4.2.4. *On a* $\operatorname{Tr}^{\#}(\widehat{\mathcal{M}}) = -\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{M})$.

Démonstration. Il suffit de le prouver pour un opérateur élémentaire $\mathcal{L}$. Notons $\varepsilon = 1$ si ψ croît et -1 si elle décroît. On a alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}^{\#}(\widehat{\mathcal{L}}) &= \int \varepsilon \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\psi^{-1}x - x)\, \mathrm{d}(g \circ \psi^{-1}(x)) = \int \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y - \psi(y))\, \mathrm{d}g(y) \\ &= -\int \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\psi(y) - y)\, \mathrm{d}g(y) = -\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}). \qquad \square\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.5. *On a* $\operatorname{Det}^{\#}(1 - z\widehat{\mathcal{M}}) = 1/\operatorname{Det}^{\#}(1 - z\mathcal{M}) = \zeta(z)$.

C'est en jouant de cette manière entre $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ qu'on va établir les propriétés de $\operatorname{Det}^{\#}$.

4.3. L'opérateur de kneading

Pour établir des propriétés d'une fonction ζ dans le cas de fonctions monotones par morceaux, Milnor et Thurston ([MT88]) ont introduit une matrice, appelée *matrice de kneading*, dont les coefficients (des séries formelles) codent la trajectoire des extrémités des intervalles de monotonicité. Ils ont alors montré que le déterminant de cette matrice était égal à $1/\zeta$. On va ici généraliser cette méthode, mais comme il y a des poids il faut coder les trajectoires de tous les points. Coder une trajectoire revient à savoir, pour chaque y, si les $\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}x$ sont à gauche ou à droite de y, et donc à connaître la fonction $\operatorname{sgn}(\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}x - y)$. On ne pourra donc pas tout coder par une matrice, mais plutôt par un noyau, qui agira par exemple sur un espace L^2 : on l'appellera opérateur de kneading.

On définit une mesure μ sur $\mathbb{R}$ par $\mu(\mathrm{d}x) = \sum_\omega |\mathrm{d}(g_\omega x)| + \sum_\omega |\mathrm{d}(g_\omega \circ \psi_\omega^{-1} x)|$: c'est une mesure (sans atome) de référence, par rapport à laquelle toutes les autres mesures que l'on considère sont absolument continues. C'est sur l'espace $L^2(\mu)$ que l'opérateur de kneading agira. On notera $g'_\omega(x)$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathrm{d}(g_\omega x)$ par rapport à $\mu(\mathrm{d}x)$: ainsi, $\mathrm{d}(g_\omega x) = g'_\omega(x)\mu(\mathrm{d}x)$.

Pour $|z| < R^{-1}$, on définit l'opérateur $\mathcal{D}_z : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_z \Phi(y) &= \sum_\omega \int \Phi(x) \Big[(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x)\, \mathrm{d}(z g_\omega(x)) \\ &= \int \mathcal{D}_z(y, x) \Phi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\mathcal{D}_z(y,x) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{\omega_1,\dots,\omega_k} g'_{\omega_1}(x) g_{\omega_2}(\psi_{\omega_1}x)\dots g_{\omega_k}(\psi_{\omega_{k-1}}\circ\dots\circ\psi_{\omega_1}x)\cdot \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\psi_{\omega_k}\circ\dots\circ\psi_{\omega_1}x - y).$$

Comme on a pris $|z| < R^{-1}$, $\mathrm{Id} - z\mathcal{M}$ est inversible sur les fonctions bornées, ce qui montre que $\mathcal{D}_z\varphi(y)$ est bien défini, de même que le noyau $\mathcal{D}_z(y,x)$. Remarquons que l'on utilise les mêmes notations pour le noyau et l'opérateur ; cela ne devrait néanmoins pas prêter à confusion.

De la même façon, on définit un opérateur $\widehat{\mathcal{D}}_z$ pour $|z| < \widehat{R}^{-1}$.

Pour z fixé, $\mathcal{D}_z(y,x)$ est un noyau borné qui agit sur $L^2(\mu)$. On peut lui appliquer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit (X,μ) un espace séparable mesuré de mesure finie. Soit K une fonction définie partout sur $X\times X$, bornée, mesurable. On définit un opérateur A de $L^2(\mu)$ dans lui-même par $A\varphi(y) = \int K(y,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.*

Soit $\Phi_n(K) = \int_{X^n} \det_{n\times n}\big((K(x_i,x_j))\big)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Si on pose $\mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+A) = \sum \frac{\Phi_n(K)}{n!}$, alors Det_* est bien défini, analytique en A, et nul si et seulement si $\mathrm{Id}+A$ n'est pas inversible. L'ordre de 1 comme 0 de $\mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+zA)$ et la multiplicité (algébrique) de la valeur propre -1 de A sont alors égaux.

Pour z petit, on a $\mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+zA) = \exp\big(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}\mathrm{Tr}_*(A^n)\big)$, où $\mathrm{Tr}_*(A^n)$ est défini par $\int_{X^n} K(x_1,x_2)K(x_2,x_3)\dots K(x_n,x_1)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\dots,x_n)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème X.6.1 de [GGK00] dans le cas d'un opérateur de Hilbert–Schmidt, en prenant $h(x) = K(x,x)$, ce qui a bien un sens puisque K est défini partout. □

Cela permet de définir le déterminant régularisé $\mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+\mathcal{D}_z)$ (qui est analytique en z pour $|z| < R^{-1}$). On a alors un analogue du théorème de Milnor-Thurston :

Théorème 4.3.2. *On a* $\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}-z\mathcal{M}) = \mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+\widehat{\mathcal{D}}_z)$ *et* $\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}-z\widehat{\mathcal{M}}) = \mathrm{Det}_*(\mathrm{Id}+\mathcal{D}_z)$ *(l'égalité ayant lieu au sens des séries formelles).*

Démonstration. C'est la proposition 3.1 de [BR96]. La preuve consiste à faire une identification formelle après de nombreuses intégrations par partie, et est relativement longue et technique. C'est pourquoi nous ne la reproduisons pas ici. □

Notons que, dans les multiples intégrations par parties de cette preuve, tant la continuité des poids que la compacité de leurs supports (pour éliminer les termes de bord) sont essentielles (une décroissance vers 0 à l'infini suffirait, mais on a vu dans le paragraphe introductif 2.1 qu'on pouvait sans perte de généralité supposer les poids à support dans $(-1,1)$).

L'intérêt de ce théorème est qu'on dispose, pour les déterminants régularisés d'opérateurs sur L^2, de résultats d'analyticité. On va en déduire des résultats analogues pour $\mathrm{Det}^{\#}$.

4.4. Lien entre zéros du déterminant et valeurs propres de l'opérateur de transfert

Proposition 4.4.1. *La fonction* $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$ *est holomorphe pour* $|z| < R^{-1}$. *Si* $R^{-1} < \widehat{R}^{-1}$, *elle se prolonge en une fonction méromorphe pour* $|z| < \widehat{R}^{-1}$, *qui ne peut avoir de pôles qu'aux* λ^{-1} *pour* λ *valeur propre de* $\mathcal{M}$ *agissant sur* $\mathcal{B}$.

Démonstration. Pour $|z| < R^{-1}$, $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}}) = \operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \mathcal{D}_z)$ est bien défini, et holomorphe (car $\operatorname{Id} - z\mathcal{M}$ est inversible et peut être appliqué à $\operatorname{sgn}(\cdot - y)$), ce qui donne la première partie du résultat.

Supposons maintenant que $R^{-1} < \widehat{R}^{-1}$. Sur le disque $\{|z| < \widehat{R}^{-1}\}$, la fonction $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\mathcal{M}) = \operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \widehat{\mathcal{D}}_z)$ est bien définie et holomorphe, donc son inverse $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$ (par le corollaire 4.2.5) y est méromorphe. De plus, lorsque z n'est pas l'inverse d'une valeur propre de $\mathcal{M}$ agissant sur $\mathcal{B}$, $\operatorname{Id} - z\mathcal{M}$ est inversible et peut s'appliquer à $\operatorname{sgn}(\cdot - y)$, donc $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})$ est fini, et z n'en est pas un pôle. Les pôles sont donc tous des valeurs propres de $\mathcal{M}$. □

On va préciser le lien entre l'ordre du zéro et la multiplicité de la valeur propre.

Lemme 4.4.2. *Si* λ *est une valeur propre simple de* $\mathcal{M}$ *agissant sur* $\mathcal{B}$ *(avec* $R \geqslant |\lambda| > \widehat{R}$*),* $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$ *a au plus un pôle simple en* λ^{-1}.

Démonstration. Intuitivement, la valeur propre λ de $\mathcal{M}$ apporte une contribution de rang 1 à $\mathcal{D}_z$, qui induira un terme en $\frac{1}{1-\lambda z}$ dans $\operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \mathcal{D}_z)$. La difficulté est la non-linéarité du déterminant, qui fait qu'on ne peut pas séparer les problèmes. Il faut donc être un peu plus précis.

On va montrer que, au voisinage de λ^{-1}, $\operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \mathcal{D}_z)$ croît au plus à la vitesse de $1/(1 - \lambda z)$. Comme $\operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \mathcal{D}_z) = \operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$, cela montrera que λ^{-1} est au plus un pôle simple de $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$, et permettra de conclure.

On note E le sous-espace propre associé à λ (pour l'action de $\mathcal{M}$) et F son supplémentaire spectral ; $\mathcal{B} = E \oplus F$. On note aussi P_E et P_F les projecteurs spectraux associés. Sur l'espace F, $\operatorname{Id} - z\mathcal{M}$ est inversible pour z dans un voisinage de λ^{-1}, et la norme de son inverse y reste bornée. Sur E, $\mathcal{M} = \lambda \operatorname{Id}$, donc $(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} = \frac{1}{1-\lambda z} \operatorname{Id}$.

D'après le théorème 4.3.1, on peut écrire $\operatorname{Det}_*(\operatorname{Id} + \mathcal{D}_z) = \sum \frac{\Phi_n(\mathcal{D}_z)}{n!}$ où $\Phi_n(\mathcal{D}_z) = \int_{\mathbb{R}^n} \det_{n\times n}\big((\mathcal{D}_z(x_i, x_j))\big)\, d\mu^n(x)$. Cela donne, en utilisant $\operatorname{Id} = P_E + P_F$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_z(y,x) &= \sum_\omega z g'_\omega(x) \Big[(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x) \\
&= \sum_\omega z g'_\omega(x) \Big[(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} \frac{1}{2} P_E \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x) \\
&\quad + \sum_\omega z g'_\omega(x) \Big[(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} \frac{1}{2} P_F \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x) \\
&= \sum_\omega z g'_\omega(x) \frac{1}{1-\lambda z} \Big[\frac{1}{2} P_E \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x) \\
&\quad + \sum_\omega z g'_\omega(x) \Big[(\operatorname{Id} - z\mathcal{M})^{-1} \frac{1}{2} P_F \operatorname{sgn}(\cdot - y)\Big](\psi_\omega x) \\
&= A_z(y,x) + B_z(y,x).
\end{aligned}$$

Comme P_E est de rang 1 (d'image engendrée par une fonction Φ), on peut écrire $\frac{1}{2}P_E \operatorname{sgn}(\cdot - y)$ sous la forme $\chi(y)\Phi$. En sommant sur ω, on trouve que A_z peut s'écrire sous la forme $A_z(y,x) = \frac{z}{1-\lambda z}\chi(y)\psi(x)$ (où χ et ψ sont des fonctions de $\mathcal{B}$ indépendantes de z). Comme $\mathrm{Id} - z\mathcal{M}$ est inversible sur F pour z dans un voisinage de λ^{-1}, on a également que B_z est borné sur ce voisinage, par une constante C.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont fixés, on calcule $\det_{n\times n}\big((\mathcal{D}_z(x_i,x_j))\big)$ en décomposant $\mathcal{D}_z$ comme $A_z + B_z$. Quand on développe le déterminant par multilinéarité, les déterminants où il y a plus de deux colonnes avec A_z seront nuls (car toutes les colonnes avec A_z sont proportionnelles). Le déterminant $\det_{n\times n}\big((B_z(x_i,x_j))\big)$, dont les coefficients sont bornés par C, est donc borné par $C^n n^{n/2}$ par l'inégalité de Hadamard. Quant aux déterminants avec une colonne de A_z, la norme euclidienne de cette colonne est bornée par $n^{1/2}\frac{\|\chi\|_\infty\|\psi\|_\infty|z|}{|1-\lambda z|}$, et la norme des autres colonnes est majorée par $Cn^{1/2}$, donc le déterminant est borné par $\frac{K}{|1-\lambda z|}C^n n^{n/2}$. Finalement, en sommant, on trouve $\left|\det_{n\times n}\big((\mathcal{D}_z(x_i,x_j))\big)\right| \leqslant \frac{L}{|1-\lambda z|}C^n n^{n/2+1}$.

En intégrant (et car $\mathrm{d}\mu$ est de masse finie), $|\Phi_n(\mathcal{D}_z)| \leqslant \frac{M}{|1-\lambda z|}C^n n^{n/2+1}$. En sommant tout, on obtient

$$|\operatorname{Det}_*(\mathrm{Id} + \mathcal{D}_z)| = \sum \frac{\Phi_n(\mathcal{D}_z)}{n!} \leqslant \frac{M}{|1-\lambda z|}\sum \frac{C^n n^{n/2+1}}{n!}. \qquad \square$$

Le résultat qui suit nous sera utile plus loin.

Lemme 4.4.3. *Si $\Phi \in \mathcal{B}$ vérifie $\mathcal{M}\Phi = \lambda\Phi$ pour $\widehat{R} < |\lambda| \leqslant R$, alors Φ tend vers 0 à l'infini et est continue.*

Démonstration. Comme les g_ω sont à support compact, il est clair que Φ tend vers 0 à l'infini.

Pour prouver la continuité, notons $\widetilde{\Phi}(x) = \lim_{y\searrow x}\Phi(y) - \lim_{y\nearrow x}\Phi(y)$: $\widetilde{\Phi}$ est nulle hors d'un nombre dénombrable de points, et à variation bornée. Alors $\sum \varepsilon_\omega g_\omega(x)\widetilde{\Phi}(\psi_\omega x) = \lambda\widetilde{\Phi}(x)$ (les signes viennent du renversement du sens des limites quand ψ_ω est décroissante). Autrement dit, $\mathcal{M}^\varepsilon\widetilde{\Phi} = \lambda\widetilde{\Phi}$ (où $\mathcal{M}^\varepsilon$ désigne l'opérateur $\mathcal{M}^\varepsilon\chi(x) = \sum \varepsilon_\omega g_\omega(x)\chi(\psi_\omega x)$).

On peut appliquer le lemme 3.6.1 à $\mathcal{M}^\varepsilon$ et $\widetilde{\Phi}$ (car $|\lambda| > \widehat{R}$, qui correspond à $\widehat{R^\varepsilon}$ dans l'énoncé du lemme) pour obtenir $\widetilde{\Phi} = 0$.

Ainsi, en tout point, Φ a la même limite à gauche et à droite. Si on note Φ_1 la version régularisée de Φ (qui vérifie donc aussi $\mathcal{M}\Phi_1 = \lambda\Phi_1$, par continuité des poids), alors $\Phi_2 = \Phi - \Phi_1$ est nulle hors d'un ensemble dénombrable et vérifie $\mathcal{M}\Phi_2 = \lambda\Phi_2$. Comme $\widehat{R} = \widehat{R^\varepsilon}$ car les poids sont continus (proposition 2.4.5), on peut appliquer le lemme 3.6.1 pour obtenir $\Phi_2 = 0$. Autrement dit, $\Phi = \Phi_1$, et Φ est continue. $\square$

Proposition 4.4.4. *Soit $\widehat{\lambda}$ une valeur propre de $\widehat{\mathcal{M}}$ agissant sur $\mathcal{B}$, avec $\widehat{R} \geqslant |\widehat{\lambda}| > R$. Alors $\widehat{\lambda}^{-1}$ est un zéro de* $\operatorname{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$.

Démonstration. Soit $\Phi \in \mathcal{B}$ qui tend vers 0 à l'infini et a des discontinuités régulières. Alors, comme les poids sont continus et Φ régulière, $\mathrm{d}(zg_\omega(x)\Phi(x)) =$

$zg_\omega(x)\,\mathrm{d}(\Phi(x)) + \Phi(x)\,\mathrm{d}(zg_\omega(x))$. Un calcul donne alors (voir [BR96], corollaire 3.4)

$$(\mathrm{Id} + \mathcal{D}_z)\Phi(y) = \int \Big[(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})^{-1}\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\cdot - y)\Big](x)\,\mathrm{d}\Big(z\widehat{\mathcal{M}}\Phi(x) - \Phi(x)\Big).$$

Ce calcul utilise d’une part que $\Phi(y) = \int -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{d}\Phi(x)$, et d’autre part que $\mathrm{Id} + z\mathcal{M}(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})^{-1} = (\mathrm{Id} - z\mathcal{M})^{-1}$, ce qui peut se vérifier par exemple en multipliant des deux côtés par $\mathrm{Id} - z\mathcal{M}$.

Prenons maintenant $z = \widehat{\lambda}^{-1}$ et Φ un vecteur propre de $\widehat{\mathcal{M}}$ pour cette valeur propre. Le lemme précédent (appliqué à $\widehat{\mathcal{M}}$) montre que Φ est continue, et on peut appliquer le calcul précédent. Comme $z\widehat{\mathcal{M}}\Phi - \Phi = 0$, l’intégrale de droite est nulle, donc $(\mathrm{Id} + \mathcal{D}_z)\Phi = 0$. Ainsi, $\mathrm{Id} + \mathcal{D}_z$ n’est pas inversible sur L^2, donc $\mathrm{Det}_*(\mathrm{Id} + \mathcal{D}_z) = 0$, i.e. $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\widehat{\mathcal{M}}) = 0$ d’après le théorème 4.3.2. □

Théorème 4.4.5. *Le déterminant* $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$ *est holomorphe dans la région* $\{z \mid |z| < \widehat{R}^{-1}\}$. *Ses zéros vérifient* $R^{-1} \leqslant |z| < \widehat{R}^{-1}$*, et sont les inverses des valeurs propres de* $\mathcal{M}$ *agissant sur* $\mathcal{B}$*. De plus, l’ordre de* λ^{-1} *comme zéro de* $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$ *est égal à la multiplicité de* λ *comme valeur propre de* $\mathcal{M}$.

Démonstration. Le dual de la proposition 4.4.1 montre que $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$ est holomorphe pour $|z| < \widehat{R}^{-1}$. Cette même proposition montre que son inverse $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\widehat{\mathcal{M}})$ est méromorphe dans cette même région, et que ses pôles sont de la forme λ^{-1} pour λ valeur propre de $\mathcal{M}$, avec $\widehat{R} < \lambda \leqslant R$. Cela prouve que tous les zéros de $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$ sont des inverses de valeurs propres de $\mathcal{M}$.

Il reste à prouver que, réciproquement, tous les inverses des valeurs propres sont bien des zéros, et que les multiplicités coïncident. Si λ est une valeur propre simple de $\mathcal{M}$, la proposition 4.4.4 montre que c’est un zéro de $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$, et le lemme 4.4.2 que ce zéro est au plus d’ordre 1 (puisque c’est au plus un pôle simple de $\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\widehat{\mathcal{M}}) = 1/\mathrm{Det}^\#(\mathrm{Id} - z\mathcal{M})$), donc il est d’ordre exactement 1, ce qui permet de conclure.

Dans le cas de valeurs propres multiples, on peut montrer des analogues du lemme 4.4.2 (la preuve étant la même, en conservant simplement k colonnes en A_z si la valeur propre est de multiplicité k) et de la proposition 4.4.4 (en prenant $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ une base du sous-espace caractéristique associé à λ, et en vérifiant qu’ils sont tous dans le noyau d’un $(\mathrm{Id} + \mathcal{D}_{1/\lambda})^n$). Cela donne le résultat. On peut aussi le montrer en utilisant le cas des valeurs propres simples, en déformant un peu l’opérateur $\mathcal{M}$ pour faire apparaître k valeurs propres simples distinctes, qui correspondront chacune à un zéro du déterminant. □

5. Régularisation des poids

Pour généraliser les résultats valables dans le cas des poids continus, on va essayer de construire un système isomorphe à $(\mathcal{M}, g_\omega, \psi_\omega)$, dans lequel les poids seront continus.

Cela permettra d’obtenir en particulier l’analogue des résultats sur le déterminant sharp dans le cas de poids discontinus (moyennant quand même une hypothèse supplémentaire, l'hypothèse (G) introduite dans le paragraphe 5.3, un peu plus faible que la continuité des poids aux points périodiques).

L'idée de la preuve, due à Ruelle ([Rue94b]) et déjà mentionnée dans l'article [BR96], est de remplacer les points où les poids sont discontinus par des petits intervalles, sur lesquels on prolonge les poids de manière affine de façon à les rendre continus.

5.1. Construction de $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$

Soit S l'ensemble des discontinuités des g_ω : il est fini ou dénombrable. Notons S^* l'ensemble des points obtenus en partant de S et en appliquant des ψ_ω et des ψ_ω^{-1} : c'est la plus petite partie de $\mathbb{R}$ contenant S et stable par les ψ_ω et leurs inverses ; elle est au plus dénombrable. On remplace chaque point s de S^* par un segment I_s, de telle sorte que $\sum |I_s| < +\infty$; on crée ainsi un nouvel espace $\widetilde{\mathbb{R}}$, homéomorphe à $\mathbb{R}$. On a une injection $i : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathbb{R}}$, qui envoie s sur le milieu de I_s pour $s \in S^*$; elle est croissante, et c'est un homéomorphisme de $\mathbb{R} \backslash S^*$ sur $\widetilde{\mathbb{R}} \backslash \left(\bigcup I_s\right)$. On peut aussi définir une projection $p : \widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ qui envoie tous les points de I_s sur s.

On note $\widetilde{\mathcal{B}}$ l'espace des fonctions à variation bornée sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, et $\widetilde{\mathcal{F}}$ l'espace des fonctions qui y sont bornées. Si $\widetilde{\Phi} \in \widetilde{\mathcal{B}}$, on peut définir $\alpha\widetilde{\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}(ix)$: $\alpha\widetilde{\Phi}$ est à variation bornée, et vérifie même $\mathrm{Var}(\alpha\widetilde{\Phi}) \leqslant \mathrm{Var}\,\widetilde{\Phi}$. Ainsi, $\alpha : \widetilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ est une surjection linéaire continue. On a la même chose pour $\alpha : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$.

Pour $\omega \in \Omega$, on définit $\widetilde{g}_\omega \in \widetilde{\mathcal{B}}$: on pose $\widetilde{g}_\omega(x) = g_\omega(px)$ si x n'est pas dans un des I_s, $\widetilde{g}_\omega(x) = g_\omega(s)$ pour x le milieu de I_s, on prolonge $\widetilde{g}_\omega$ par continuité aux bords des I_s et on impose $\widetilde{g}_\omega$ affine sur les deux moitiés de I_s. Ainsi, $\widetilde{g}_\omega$ est continue, elle vérifie $\mathrm{Var}\,\widetilde{g}_\omega = \mathrm{Var}\,g_\omega$, et $g_\omega = \alpha\widetilde{g}_\omega$.

On définit aussi des homéomorphismes $\widetilde{\psi}_\omega$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$: si x n'est pas dans un des S^*, alors $\psi_\omega(x)$ non plus, et on pose $\widetilde{\psi}_\omega(ix) = i(\psi_\omega x)$. Ainsi, $\widetilde{\psi}_\omega$ est définie hors des I_s. On peut la prolonger par continuité au bord de ces intervalles. Finalement, si $\psi_\omega(s) = t$ (avec $s, t \in S^*$), il faut définir $\widetilde{\psi}_\omega$ sur I_s. On pose qu'elle est affine de I_s dans I_t. Ainsi, $\widetilde{\psi}_\omega$ est bien définie, et c'est un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (croissant ou décroissant suivant que ψ_ω est croissant ou décroissant).

Finalement, pour $\widetilde{\Phi} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ ou $\widetilde{\mathcal{F}}$, on pose $\widetilde{\mathcal{M}}\widetilde{\Phi}(x) = \sum \widetilde{g}_\omega(x)\widetilde{\Phi}(\widetilde{\psi}_\omega x)$.

En fait, on a défini les fonctions $\widetilde{g}_\omega$ et $\widetilde{\psi}_\omega$ de telle façon que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\widetilde{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\mathcal{M}"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

On peut considérer tous ces opérateurs modulo les ensembles dénombrables. On définit ainsi un espace $\widetilde{\mathcal{F}}_c$, avec une projection $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}_c$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathcal{F}}_c \arrow[d, "\alpha_c"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{F}_c \end{tikzcd} \tag{1}$$

Sur chacun de ces espaces agit un opérateur (respectivement $\widetilde{\mathcal{M}}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_c$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_c$), et tout est commutatif. Ces opérateurs ont des rayons spectraux respectifs $\widetilde{R}$, $\widetilde{R}_c$, R et R_c. Le théorème B.0.2 garantit que ces rayons spectraux décroissent le long des flèches. On sait en plus que $\widetilde{R} = \widetilde{R}_c$, par la proposition 2.4.5 (car les $\widetilde{g}_\omega$ sont continus).

5.2. *Injectivité de α*

Lemme 5.2.1. *Soit $\Phi \in \widetilde{\mathcal{B}}$ nulle hors des I_s, et vérifiant $\widetilde{\mathcal{M}}\Phi = \lambda\Phi$ avec $|\lambda| > \widetilde{\widetilde{R}}$. Alors $\Phi = 0$.*

Démonstration. Pour ψ bornée qui, sur chaque I_s, est non nulle en au plus un point, on définit $\langle\psi, \Phi\rangle = \sum_x \psi(x)\Phi(x)$. C'est bien défini car $\sum |\psi(x)\Phi(x)| \leqslant \|\psi\|_\infty \operatorname{Var}\Phi/2$ (on le voit en intercalant entre les x avec $\psi(x) \neq 0$ des points hors des I_s, en lesquels on a donc $\Phi = 0$).

On peut définir $\langle\psi, \Phi\rangle$ pour ψ qui est non nulle en au plus deux points de chaque I_s, de la même manière. Alors $|\langle\psi, \Phi\rangle| \leqslant \|\psi\|_\infty \operatorname{Var}\Phi$.

Fixons maintenant x dans un $I_s = [u, v]$ ($x = (1-\mu)u + \mu v$), et ψ qui vaut 1 en x, 0 ailleurs. Alors $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n \psi$ est non nulle en au plus deux points sur chaque $I_t = [u', v']$. En fait, si $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n \psi(y) \neq 0$, alors y s'écrit sous la forme $\widetilde{\psi}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}} x$, pour un certain $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ de longueur n. Mais $\widetilde{\psi}_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$ est affine de I_s dans I_t et elle envoie bords sur bords, donc si elle est croissante $y = (1-\mu)u' + \mu v'$, et si elle est décroissante $y = (1-\mu)v' + \mu u'$; il y a donc au plus deux possibilités.

D'après la preuve du théorème 3.3.1, $\langle\psi, \widetilde{\mathcal{M}}^n\Phi\rangle = \langle\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n \psi, \Phi\rangle$. Soit alors $|\lambda| > C > \widetilde{\widetilde{R}}$. Comme $C > \widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{\widetilde{R^\varepsilon}}$ (car les poids $\widetilde{\widetilde{g_\omega}}$ sont continus), il existe une constante K telle que $\left\|\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n\right\|_\infty \leqslant KC^n$. Alors

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &= |\langle\psi, \Phi\rangle| = |\lambda|^{-n} |\langle\psi, \widetilde{\mathcal{M}}^n\Phi\rangle| = |\lambda|^{-n} \left|\langle\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n \psi, \Phi\rangle\right| \\ &\leqslant |\lambda|^{-n} \left\|\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}^\varepsilon}}^n \psi\right\|_\infty \operatorname{Var}\Phi \leqslant K|\lambda|^{-n} C^n \|\psi\|_\infty \operatorname{Var}\Phi \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\Phi(x) = 0$. □

Proposition 5.2.2. *Pour $|\lambda| > \widetilde{\widetilde{R}}$, α réalise un isomorphisme entre $E_\lambda(\widetilde{\mathcal{M}})$ et $E_\lambda(\mathcal{M})$.*

Démonstration. Les espaces E_λ sont bien définis (car $\widetilde{\widetilde{R}}$ majore les rayons spectraux essentiels des deux opérateurs). La surjectivité de α de $E_\lambda(\widetilde{\mathcal{M}})$ dans $E_\lambda(\mathcal{M})$ résulte du théorème B.0.2, et son injectivité du lemme précédent (en itérant, comme dans la preuve de la proposition 3.6.2). □

On a un analogue modulo les ensembles dénombrables :

Proposition 5.2.3. *Pour $|\lambda| > \widetilde{\widetilde{R}}_c$, α_c réalise un isomorphisme de $E_\lambda(\widetilde{\mathcal{M}}_c)$ sur $E_\lambda(\mathcal{M}_c)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver un analogue du lemme 5.2.1. Soit donc Φ_c (avec Φ à discontinuités symétriques) telle que $\widetilde{\mathcal{M}}_c\Phi_c = \lambda\Phi_c$, et $\alpha_c\Phi_c = 0$. On veut voir que Φ_c est nulle.

Soit X un ensemble dénombrable en dehors duquel $\widetilde{\mathcal{M}}\Phi = \lambda\Phi$. On remplace X par l'ensemble de ses itérés par les $\psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$. Si $x \notin X$ (et $x \in I_s$), on va montrer que $\Phi(x) = 0$, ce qui permettra de conclure. Pour le prouver, il suffit de répéter la preuve du lemme 5.2.1. $\square$

5.3. *Conditions pour avoir l'égalité des rayons spectraux*

On cherche des conditions qui garantiront que tous les rayons spectraux seront égaux. Toutes les flèches du diagramme (1) donneront alors des isomorphismes entre les sous-espaces caractéristiques des différents opérateurs.

En général, les rayons spectraux en question peuvent être distincts.

Exemple 5.3.1. Soit $g = \delta_0$ et $\varphi = \mathrm{Id}$: alors $\mathcal{M}\Phi(x) = \Phi(0)$ si $x = 0$, 0 sinon, donc $R = 1$ et $R_c = 0$.

Exemple 5.3.2. Soit $g_1 = 2\delta_0$, $\psi_1(x) = x + 1$, $g_2(x) = 2$ pour $0 < |x - 1| < 1/2$ et 0 ailleurs, et $\psi_2(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{M}^2 = 0$ donc $R = 0$, tandis que $\widetilde{R} = 1$.

Il faut donc introduire des conditions supplémentaires, pour s'assurer qu'il n'y aura pas de “résonance”. Nous utiliserons la condition suivante :

$$\text{Si } \psi_{\omega_n}\dots\psi_{\omega_1}x = x, \text{ alors } \forall i \in \{1,\dots,n\},\ g_{\omega_i} \text{ est continu en } \psi_{\omega_{i-1}}\dots\psi_{\omega_1}x. \tag{G}$$

On abrégera cette condition en disant que *les poids sont continus le long des cycles*. Il faut noter que cela ne signifie pas que tous les poids sont continus aux points périodiques, mais juste les g_{ω_i} pour ψ_{ω_i} qui intervient dans le cycle. La condition (G) est donc strictement plus faible que

$$\text{Les poids sont continus aux points périodiques.} \tag{G'}$$

La condition (G') peut se reformuler en disant que les discontinuités des poids (i.e. les éléments de l'ensemble S) ne reviennent pas sur elles-mêmes, i.e. $\forall\underline{\boldsymbol{\omega}}, \forall x \in S, \psi_{\underline{\boldsymbol{\omega}}}x \neq x$.

On pourrait essayer de travailler directement avec (G'), sans passer par l'intermédiaire de (G). Cependant, cette condition (G') a un défaut : ce n'est pas parce qu'elle est vérifiée par $\mathcal{M}$ qu'elle va l'être par $\mathcal{M}^n$. Par exemple, si (G') est vérifiée et que x est un point périodique, il se peut qu'il soit envoyé par un ψ_{ω_1} sur une discontinuité d'un poids g_{ω_2}, qui ne participe pas à un cycle. Alors $g_{\omega_1\omega_2}$ est discontinu en x, donc $\mathcal{M}^2$ ne vérifie pas (G').

C'est essentiellement pour cette raison qu'on va travailler avec (G), qui n'a pas ce problème. De toutes façons, comme (G') implique (G), tous les résultats valables avec (G) le seront aussi avec (G').

L'idée de la démonstration de l'égalité des rayons spectraux sous l'hypothèse (G) est de modifier l'opérateur $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur les intervalles I_s. Elle est cependant un peu technique à mettre place. On commence donc par traiter un cas plus simple, même s'il ne nous servira pas par la suite. Les preuves suivantes seront simplement des généralisations de cette preuve, avec des difficultés techniques supplémentaires.

Proposition 5.3.3. *Si on pose $\mathcal{M}'\Phi(x) = \sum g'_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$, où les g'_ω sont égaux aux g_ω le long des cycles et sur un ensemble dense (et $\sum \operatorname{Var} g'_\omega < +\infty$) , alors $r(\mathcal{M}')_\infty = r(\mathcal{M})_\infty$.*

Les hypothèses seront en particulier vérifiées, dans le cas de (G), si g'_ω est égal à g_ω hors de ses discontinuités.

Démonstration. Soit $R > \|\mathcal{M}\|$, on va montrer que $R \geqslant r(\mathcal{M}')$. Cela permettra de conclure. En effet, fixons alors $R > r(\mathcal{M})$. Soit n tel que $R^n > \|\mathcal{M}^n\|$. Comme l'hypothèse qu'on utilise est valable aussi pour $\mathcal{M}^n$ et $\mathcal{M}'^n$, on peut appliquer le résultat annoncé qui donne $R^n \geqslant r(\mathcal{M}'^n)$. On obtient $R \geqslant r(\mathcal{M}')$, et on trouve en faisant tendre R vers $r(\mathcal{M})$ que $r(\mathcal{M}) \geqslant r(\mathcal{M}')$. Comme les deux opérateurs jouent le même rôle, on a finalement l'égalité.

Fixons donc $R > \|\mathcal{M}\|$, ainsi que $\varepsilon > 0$. On va montrer que $r(\mathcal{M}') \leqslant R + 2\varepsilon$.

On peut écrire $\mathcal{M}' = \mathcal{M} + \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}\Phi(x) = \sum h_\omega(x)\Phi(\psi_\omega x)$ avec $h_\omega = g'_\omega - g_\omega$ nulle le long des cycles, et $W = \sum \operatorname{Var} h_\omega < +\infty$. On peut isoler une partie finie Ω_1 de Ω, de complémentaire Ω^*, telle que $\sum_{\omega\in\Omega^*} \|h_\omega\|_\infty < \varepsilon$. Si Ω_1 est de cardinal Q, on écrit alors $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \ldots + \mathcal{N}_Q + \mathcal{N}^*$, chaque $\mathcal{N}_s$ correspondant à un poids h_s ayant un coefficient s dans Ω_1.

On décompose $\mathcal{M}'^n = (\mathcal{M} + \mathcal{N})^n$ comme une somme de 2^n termes, chaque terme étant un produit de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$. Soit T un tel terme, avec k $\mathcal{N}$ qui apparaissent. En décomposant chaque $\mathcal{N}$ comme $\mathcal{N}_1 + \ldots + \mathcal{N}_Q + \mathcal{N}^*$, on décompose T comme somme de $(Q + 1)^k$ termes.

Soit U un de ces termes, et i le nombre des $\mathcal{N}_s$ qui interviennent. Il y a alors $k - i$ termes $\mathcal{N}^*$, et $n - k$ termes $\mathcal{M}$. En regroupant les termes consécutifs en $\mathcal{N}^*$ et $\mathcal{M}$, on peut alors écrire $U = \mathcal{P}_0\mathcal{N}_{s_1}\mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{N}_{s_i}\mathcal{P}_i$.

Montrons que

$$|U\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_0\| \ldots \|\mathcal{P}_i\| \, \|\Phi\|_\infty \cdot \sup_{\underline{\omega}_1,\dots,\underline{\omega}_i} |h_{s_1}(\psi_{\underline{\omega}_1}x)h_{s_2}(\psi_{\underline{\omega}_2}\psi_{s_1}\psi_{\underline{\omega}_1}x)\ldots h_{s_i}(\psi_{\underline{\omega}_i}\psi_{s_{i-1}}\ldots\psi_{\underline{\omega}_1}x)|. \quad (2)$$

Le résultat est clair pour $i = 0$. En le supposant acquis au rang i, montrons-le au rang $i + 1$, pour $V = \mathcal{P}_{-1}\mathcal{N}_{s_0}\ldots\mathcal{N}_{s_i}\mathcal{P}_i$. Si on note $\Psi = \mathcal{P}_0\mathcal{N}_{s_1}\mathcal{P}_1\ldots\mathcal{N}_{s_i}\mathcal{P}_i\Phi$, alors $V\Phi(x) = \mathcal{P}_{-1}\mathcal{N}_{s_0}\Psi(x)$. Donc $|V\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_{-1}\| \sup |\mathcal{N}_{s_0}\Psi(\psi_{\underline{\omega}_0}x)|$, les $\psi_{\underline{\omega}_0}$ étant les fonctions intervenant dans $\mathcal{P}_{-1}$ (en utilisant le lemme 2.4.7). Mais $\mathcal{N}_{s_0}\Psi(\psi_{\underline{\omega}_0}x) = h_{s_0}(\psi_{\underline{\omega}_0}x)\Psi(\psi_{s_0}\psi_{\underline{\omega}_0}x)$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\Psi = U\Phi$, ce qui donne (2).

Dans le terme de droite de l'équation (2), considérons un produit du type $|h_{s_1}(\psi_{\underline{\omega}_1}x)\ldots h_{s_i}(\psi_{\underline{\omega}_i}\psi_{s_{i-1}}\ldots\psi_{\underline{\omega}_1}x)|$. Si deux itérés de x sont égaux, comme les

h_s sont nuls le long des cycles, le produit est nul. Dans le cas contraire, tous les points sont distincts, et la nullité des h_s sur un ensemble dense permet d'écrire $\sum_r |h_{s_r}(\psi_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \psi_{\underline{\omega}_1} x)| \leqslant \sum \operatorname{Var} h_\omega \leqslant W$. L'inégalité arithmético-géométrique donne alors $\prod |h_{s_r}(\psi_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \psi_{\underline{\omega}_1} x)| \leqslant \left(\frac{\sum |h_{s_r}(\psi_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \psi_{\underline{\omega}_1} x)|}{i} \right)^i \leqslant (W/i)^i$.

On obtient donc, en utilisant (2), que $\|U\| \leqslant \|\mathcal{P}_0\| \ldots \|\mathcal{P}_i\| (W/i)^i$. Dans les $\mathcal{P}_r$, il y a $k-i$ opérateurs $\mathcal{N}^*$, de norme majorée par ε, et $n-k$ opérateurs $\mathcal{M}$, de norme majorée par R. On obtient donc $\|U\| \leqslant R^{n-k} \varepsilon^{k-i} (W/i)^i$.

Le terme T se décompose comme somme de $(Q+1)^k$ termes U. Il y a $\binom{k}{i} Q^i$ termes U qui ont exactement i facteurs du type $\mathcal{N}_s$: on choisit la place de ces termes, puis pour chaque place on a le choix entre Q opérateurs. Ainsi

$$\begin{aligned} \|T\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} Q^i R^{n-k} \varepsilon^{k-i} (W/i)^i \leqslant \sum_{i=0}^{k} 2^k Q^i R^{n-k} \varepsilon^{k-i} (W/i)^i \\ &= R^{n-k} (2\varepsilon)^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{WQ}{\varepsilon i} \right)^i \end{aligned}$$

En posant $C = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{WQ}{\varepsilon i} \right)^i < +\infty$ (indépendant de k, et de n), on obtient $\|T\| \leqslant C R^{n-k} (2\varepsilon)^k$.

Quand on décompose $(\mathcal{M}+\mathcal{N})^n$ comme somme de termes T, il y a $\binom{n}{k}$ termes qui ont exactement k facteurs $\mathcal{N}$. On obtient donc

$$\left\| (\mathcal{M}+\mathcal{N})^n \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C R^{n-k} (2\varepsilon)^k = C(R+2\varepsilon)^n$$

On en déduit $r(\mathcal{M}') = r(\mathcal{M}+\mathcal{N}) \leqslant R + 2\varepsilon$. $\square$

Cette proposition a un analogue sur $\widetilde{\mathbb{R}}$:

Proposition 5.3.4. *Si on pose $\widetilde{\mathcal{M}}' \Phi(x) = \sum \widetilde{g}'_\omega(x) \Phi(\widetilde{\psi}_\omega x)$, où les $\widetilde{g}'_\omega$ sont égaux aux $\widetilde{g}_\omega$ hors des I_s et le long des cycles dans les I_s (et $\sum \operatorname{Var} \widetilde{g}'_\omega < +\infty$) , alors $r(\widetilde{\mathcal{M}}')_\infty = r(\widetilde{\mathcal{M}})_\infty$.*

Démonstration. La preuve est identique à la précédente. Le seul point à vérifier est que, avec les notations de l'équation (2), on a $\sum_r |\widetilde{h}_{s_r}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1} x)| \leqslant \sum \operatorname{Var} \widetilde{h}_\omega \leqslant W$ (car, pour le prouver, on utilisait la nullité des h_ω sur un ensemble dense, ce qui n'est plus vrai ici).

Remarquons que, si on est hors des I_s ou sur un cycle dans les I_s, le produit $\prod |\widetilde{h}_{s_r}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1} x)|$ est nul par hypothèse. Dans le cas contraire, tous les points sont distincts et dans les I_s et, comme les $\widetilde{\psi}_\omega$ sont affines sur les I_s, il y a au plus deux points dans chaque I_s. Comme les $\widetilde{h}_\omega$ sont nulles entre les I_s, on obtient $\sum_r |\widetilde{h}_{s_r}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_r} \circ \ldots \circ \widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1} x)| \leqslant 2 \sum \operatorname{Var} \widetilde{h}_\omega \leqslant 2W$, ce qui permet de conclure. $\square$

On a enfin un analogue pour les fonctions définies à un ensemble dénombrable près :

Proposition 5.3.5. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, $r(\widetilde{\mathcal{M}}'_c)_{\infty,c} = r(\widetilde{\mathcal{M}}_c)_{\infty,c}$.*

Démonstration. Le seul problème dans la preuve de la proposition 5.3.3 est l'établissement de l'équation (2) : si on considère tout modulo des ensembles dénombrables, on n'a plus $|\mathcal{P}_{-1}\mathcal{N}_{s_0}\Psi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_{-1}\|_{\infty,c} \sup |\mathcal{N}_{s_0}\Psi(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_0}x)|$.

On montre plutôt que, pour tout x hors d'un ensemble dénombrable, on a

$$|U\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_0\|_c \dots \|\mathcal{P}_i\|_c \, \|\Phi\|_{\infty,c} \sup |\widetilde{h}_{s_1}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1}x) \dots \widetilde{h}_{s_i}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_i} \circ \dots \circ \widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1}x)|. \tag{3}$$

On raisonne encore par récurrence, le résultat étant clair pour $i = 0$. On conserve les notations de la preuve précédente. D'après le lemme 2.4.8, on a hors d'un ensemble dénombrable A que $|V\Phi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_{-1}\|_{\infty,c} \sup |\mathcal{N}_{s_0}\Psi(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_0}x)|$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à Ψ, on obtient un ensemble dénombrable B en-dehors duquel $|\Psi(x)| \leqslant \|\mathcal{P}_0\|_c \dots \|\mathcal{P}_i\|_c \, \|\Phi\|_{\infty,c} \sup |\widetilde{h}_{s_1}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1}x) \dots \widetilde{h}_{s_i}(\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_i} \circ \dots \circ \widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_1}x)|$. On en déduit la validité de l'équation (3) pour Φ hors de $A \cup \{(\widetilde{\psi}_{s_0}\widetilde{\psi}_{\underline{\omega}_0})^{-1}(x) \mid x \in B\}$ dénombrable.

En utilisant l'équation (3) et l'inégalité arithmético-géométrique, on montre alors que $\|U\|_c \leqslant \|\mathcal{P}_0\|_c \dots \|\mathcal{P}_i\|_c \, (2W/i)^i$. La preuve se termine comme plus haut. □

Les propositions qui précèdent permettent d'utiliser à peu près n'importe quel relèvement de $\mathcal{M}$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, où on fait des modifications juste sur les I_s et hors des cycles. Lorsque l'hypothèse (G) est vérifiée, on peut donc modifier $\widetilde{g}_\omega$ sur les intervalles I_s tels que g_ω ne soit pas continu en s, puisqu'ils n'interviennent pas dans des cycles.

On définit en particulier $\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x) = \sum \widetilde{g}'_\omega \Phi(\widetilde{\psi}_\omega x)$, où $\widetilde{g}'_\omega$ est égal à $\widetilde{g}_\omega$ hors des I_s, à $g_\omega(s_-)$ sur la moitié gauche de I_s, à $g_\omega(s_+)$ sur sa moitié droite, et à $g_\omega(s)$ au milieu. C'est un opérateur auxiliaire, un artifice qui va nous servir dans la preuve de $\widetilde{R} = R$.

Lorsque l'hypothèse (G) est vérifiée, on peut appliquer à $\widetilde{\mathcal{M}}'$ les deux propositions précédentes, pour obtenir $r(\widetilde{\mathcal{M}}')_\infty = r(\widetilde{\mathcal{M}})_\infty$ et $r(\widetilde{\mathcal{M}}'_c)_{\infty,c} = r(\widetilde{\mathcal{M}}_c)_{\infty,c}$.

Lemme 5.3.6. *On a* $r(\widetilde{\mathcal{M}}')_\infty = r(\mathcal{M})_\infty$.

Démonstration. Le résultat général B.0.2 de décroissance du rayon spectral donne déjà $r(\widetilde{\mathcal{M}}') \geqslant r(\mathcal{M})$, il faut démontrer l'autre inégalité. On va montrer que $\|\widetilde{\mathcal{M}}'\| \leqslant \|\mathcal{M}\|$. Quitte à passer à la limite uniforme, on peut supposer Ω fini.

Soit $\Phi \in \widetilde{\mathcal{F}}$ de norme 1, avec $\|\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi\| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'\| - \varepsilon$. Soit x tel que $|\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'\| - \varepsilon$. Si x n'est pas dans un des I_s, ou est le milieu d'un des I_s, on projette tout dans $\mathbb{R}$: on pose $\Psi = \alpha\Phi$ et $y = p(x)$: alors $\|\Psi\| \leqslant 1$ et $|\mathcal{M}\Psi(y)| = |\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'\| - \varepsilon$, ce qui donne $\|\mathcal{M}\| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'\| - \varepsilon$.

Sinon, on peut par exemple supposer que x est dans la moitié droite d'un des I_s. On définit alors Ψ qui est égale à $\Phi(\widetilde{\psi}_\omega x)$ sur un voisinage à droite de $\psi_\omega(s)$ lorsque ψ_ω est croissante, et sur un voisinage à gauche lorsque ψ_ω est décroissante (c'est possible car Ω est fini), et nulle ailleurs. Ainsi, $\mathcal{M}\Psi$ tend vers $\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)$ à droite de s, puisque g_ω tend vers $\widetilde{g}'_\omega(x)$ à droite de s (par définition des $\widetilde{g}'_\omega$). En particulier $\|\mathcal{M}\Psi\|_\infty \geqslant |\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)|$. Comme $\|\Psi\|_\infty \leqslant 1$, on en déduit $\|\mathcal{M}\| \geqslant |\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'\| - \varepsilon$. □

Lemme 5.3.7. *On a* $r(\widetilde{\mathcal{M}}'_c)_{\infty,c} = r(\mathcal{M}_c)_{\infty,c}$.

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, il suffit de voir que $\|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| \leqslant \|\mathcal{M}_c\|$. On prend Φ_c de norme 1 telle que $\|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\Phi_c\| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$; on peut même imposer $\|\Phi\|_\infty = 1$, d'après la proposition 2.2.1. Il existe alors un nombre indénombrable de points x tels que $|\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$. Si tous ces points sont hors des I_s, ou en leur milieu, on pose $\Psi = \alpha\Phi$; il existe un nombre indénombrable de points y (les $p(x)$) tels que $|\mathcal{M}\Psi(y)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$. Donc $\|\mathcal{M}_c\Psi_c\| \geqslant \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$, puis $\|\mathcal{M}_c\| \geqslant \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$.

Sinon, il existe un x dans une des deux moitiés des I_s avec $|\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| > \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$, par exemple dans la moitié de droite. Comme dans la preuve précédente, on construit Ψ telle que $\mathcal{M}\Psi$ tende vers $\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)$ à droite de s. On obtient $\|\mathcal{M}_c\Psi_c\| \geqslant |\widetilde{\mathcal{M}}'\Phi(x)| \geqslant \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$, puis $\|\mathcal{M}_c\| \geqslant \|\widetilde{\mathcal{M}}'_c\| - \varepsilon$. □

Théorème 5.3.8. *Si l'hypothèse (G) est vérifiée, alors $\widetilde{R} = \widetilde{R}_c = R = R_c$.*

Démonstration. On sait déjà que $\widetilde{R} = \widetilde{R}_c$, puisque les poids $\widetilde{g}_\omega$ sont continus (et en utilisant la proposition 2.4.5).

Pour établir que $\widetilde{R} = R$, on utilise que $\widetilde{R} = r(\widetilde{\mathcal{M}}')_\infty$ d'après la proposition 5.3.4, et que $r(\widetilde{\mathcal{M}}')_\infty = R$ d'après le lemme 5.3.6. Pour établir $\widetilde{R}_c = R_c$, on utilise les analogues de ces résultats modulo les ensembles dénombrables. □

Remarque 5.3.9. Je ne sais pas prouver directement (i.e. sans la construction de $\widetilde{\mathbb{R}}$ et la modification des opérateurs qui y agissent) que $R = R_c$, même en utilisant la proposition 5.3.3 !

5.4. Conclusion

Théorème 5.4.1. *On suppose que (G) est vérifiée. Alors $\widetilde{R} = \widetilde{R}_c = R = R_c$ et $\widehat{\widetilde{R}} = \widehat{\widetilde{R}}_c = \widehat{R} = \widehat{R}_c$. De plus, sur le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{B}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathcal{B}}_c \arrow[d, "\alpha_c"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{B}_c \end{tikzcd}$$

les flèches induisent des isomorphismes sur tous les sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres λ vérifiant $|\lambda| > \widehat{R}_c$.

Démonstration. Le théorème 5.3.8 montre l'égalité des quatre premiers rayons spectraux. L'autre égalité en découle d'ailleurs, en l'appliquant à $\widehat{\mathcal{M}}$.

Il reste à voir que les flèches induisent des isomorphismes. Pour la flèche du haut, comme les poids sont continus, c'est juste le corollaire 3.6.3. Pour la flèche de droite, c'est la proposition 5.2.3. Enfin, on sait que la flèche de gauche et celle du bas induisent des surjections, par le résultat général B.0.2. De plus, la composée de ces deux flèches induit un isomorphisme (en suivant les deux autres flèches), donc ce sont également des injections car on est en dimension finie. □

Remarquons que la condition (G) n'est pas trop restrictive ; elle est même générique. C'est même le cas de la condition (G'). En fait, si on fixe les poids g_ω, l'ensemble des ψ_ω vérifiant la condition (G') va être un G_δ dense (du produit dénombrable de l'espace des homéomorphismes de $\mathbb{R}$), puisque chaque condition individuelle $\psi_{\omega_m} \circ \ldots \circ \psi_{\omega_1}(x) \neq x$ est vérifiée sur un ouvert dense, et que ces conditions sont en nombre dénombrable.

Plus précisément, soit E l'espace des applications monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cette topologie provient d'une distance d (en posant $d(f,g) = \sum 2^{-n} \min(\|f-g\|_{\infty,[-n,n]}, 1)$), qui fait de E un espace complet. L'espace F des homéomorphismes est défini par les conditions ouvertes $f(r) \neq f(r')$ pour r, r' rationnels distincts, et $\exists x : f(x) > n$, $\exists y : f(y) < -n$ pour n entier. Ainsi, F est un G_δ de E, et sa topologie est définie par une distance d' qui le rend complet. Alors la topologie de $F^{\mathbb{N}}$ est induite par la distance $\delta(f_n, g_n) = \sum 2^{-n} \min(d'(f_n, g_n), 1)$, qui le rend complet. Ainsi, l'espace $F^{\mathbb{N}}$ (muni de sa topologie naturelle) est un espace de Baire, ce qui permet de justifier les assertions du paragraphe précédent.

5.5. *Déterminant sharp*

La périodicité aux points périodiques est l'hypothèse naturelle pour obtenir des renseignements sur $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} + z\mathcal{M})$, comme expliqué après la proposition 4.2.1. L'hypothèse (G) va effectivement suffire pour généraliser les résultats déjà vus dans le cas des poids continus.

Lemme 5.5.1. *Sous l'hypothèse* (G), $\operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} + z\mathcal{M}) = \operatorname{Det}^{\#}(\operatorname{Id} + z\widetilde{\mathcal{M}})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}\Phi(x) = g(x)\Phi(\psi x)$ un opérateur élémentaire qui intervient dans $\mathcal{M}$ ou une de ses puissances, et $\widetilde{\mathcal{L}}$ son relevé dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. On va montrer que $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = \operatorname{Tr}^{\#}(\widetilde{\mathcal{L}})$. Remarquons que l'hypothèse (G) garantit que g est continu aux points fixes de ψ.

On décompose l'ouvert $\{\psi(x) \neq x\}$ comme réunion disjointe de ses composantes connexes (a_i, b_i). Si σ_i désigne le signe de $\psi(x) - x$ sur (a_i, b_i), on a (remarque 4.2.2) $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = \sum_i \frac{\sigma_i}{2}(g(b_{i-}) - g(a_{i+}))$.

Supposons d'abord ψ croissante. Si le point a_i (resp. b_i) est éclaté dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ en un intervalle, notons $\widetilde{a_i}$ (resp. $\widetilde{b_i}$) le bord droit (resp. gauche) de l'intervalle créé. Si le point n'est pas éclaté, notons $\widetilde{a_i}$ (resp. $\widetilde{b_i}$) son équivalent dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. Alors $\{\widetilde{\psi} x \neq x\}$ est la réunion disjointe des $(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i})$ (car un éclatement en un point fixe de ψ crée un intervalle entier de points fixes de $\widetilde{\psi}$), et $\operatorname{Tr}^{\#}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \sum_i \frac{\sigma_i}{2}(\widetilde{g}(\widetilde{b}_{i-}) - \widetilde{g}(\widetilde{a}_{i+}))$. Par construction de $\widetilde{g}$, on obtient $\operatorname{Tr}^{\#}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L})$ (et on n'a pas besoin de l'hypothèse (G)).

Supposons maintenant ψ décroissante. Elle a alors un unique point fixe a, et $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = g(a_-) - g(a_+)$. Soit $\widetilde{a}$ l'équivalent de a dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ s'il n'est pas éclaté, ou le milieu du segment créé s'il est éclaté. C'est l'unique point fixe de $\widetilde{\psi}$, donc $\operatorname{Tr}^{\#}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \widetilde{g}(\widetilde{a}_-) - \widetilde{g}(\widetilde{a}_+) = 0$ par continuité de $\widetilde{g}$. C'est *a priori* différent de $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L})$ mais, quand l'hypothèse (G) est vérifiée, g est continue en a, donc on a aussi $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = 0$, i.e. $\operatorname{Tr}^{\#}(\mathcal{L}) = \operatorname{Tr}^{\#}(\widetilde{\mathcal{L}})$. □

Théorème 5.5.2. *On suppose l'hypothèse* (G) *vérifiée. Alors les conclusions du théorème 4.4.5 restent vraies.*

Démonstration. Ces conclusions sont vraies pour $\widetilde{\mathcal{M}}$. Mais $\mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+z\mathcal{M}) = \mathrm{Det}^{\#}(\mathrm{Id}+z\widetilde{\mathcal{M}})$ par le lemme précédent. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$ ont les mêmes propriétés spectrales pour conclure. Mais c'est exactement ce que dit le théorème 5.4.1. □

Comme (G') implique (G), les conclusions sont en particulier vraies lorsque les poids sont continus aux points périodiques.

Remarquons que le théorème 5.4.1 permet de voir que $\mathrm{Det}^{\#}$ traduit aussi les propriétés spectrales de l'action de $\mathcal{M}$ sur le quotient $\mathcal{B}_c$. Comme $\mathrm{Det}^{\#}$ ne dépend des valeurs des poids que presque partout (car c'est le cas de la mesure $\mathrm{d}g_\omega$), on aurait directement tout pu formuler dans le quotient. On obtient ici des résultats plus forts, puisqu'ils sont valables également dans l'espace non quotienté (alors qu'on aurait pu croire que le quotient aurait fait disparaître certains problèmes).

A. Fonctions à variation bornée

A.1. Premières propriétés des fonctions à variation bornée

Si X est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que $\varphi : X \to \mathbb{C}$ est à variation bornée si $\sum |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})|$ est borné pour toute subdivision $a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ de X. On note alors $\operatorname{var}\varphi$ la borne supérieure de ces sommes. On note aussi $\operatorname{Var}\varphi = \sup\big\{|\varphi(a_0)| + \sum |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| + |\varphi(a_n)|\big\}$. Si on note $\mathcal{B}(X)$ les fonctions à variation bornée sur X, Var est une norme sur $\mathcal{B}(X)$ (équivalente à $\| \|_\infty + \operatorname{var}$, mais plus agréable à manipuler), qui en fait un espace de Banach.

On notera $\mathcal{B}$ au lieu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Si X est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, on a un plongement isométrique de $\mathcal{B}(X)$ dans $\mathcal{B}$, obtenu en prolongeant les fonctions par 0 en dehors de X. Dans la suite, on identifiera donc une fonction de $\mathcal{B}(X)$ avec son prolongement.

Les propriétés qui suivent découlent directement des définitions.

Proposition A.1.1. *Soient* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *et* ψ_1, ψ_2 *des fonctions à variation bornée sur* X. *Alors* $\operatorname{Var}(\psi_1\psi_2) \leqslant \operatorname{Var}\psi_1 \operatorname{Var}\psi_2$.

Proposition A.1.2. *Soit* ψ *un homéomorphisme de* $\mathbb{R}$, *et* $\varphi \in \mathcal{B}$. *Alors* $\operatorname{Var}(\varphi\circ\psi) = \operatorname{Var}(\varphi)$.

Proposition A.1.3. *Soit* ψ *une fonction à variation bornée, limite simple de fonctions* $\psi_n \in \mathcal{B}$. *Alors* $\operatorname{var}\psi \leqslant \underline{\lim} \operatorname{var}\psi_n$.

Proposition A.1.4. *Si* ψ *est une fonction à variation bornée,* $\|\psi\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{Var}\psi$.

Définition A.1.5. *On notera* $\mathcal{B}_0$ *l'ensemble des fonctions à variation bornée qui tendent vers* 0 *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

Proposition A.1.6. *Si* $\varphi \in \mathcal{B}_0$, $\operatorname{var}\varphi = \operatorname{Var}\varphi$.

Mentionnons pour finir un lemme qui nous servira par la suite.

Lemme A.1.7. *Soit $\psi \in \mathcal{B}$. Alors ψ est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'intervalles non bornés.*

Démonstration. Quitte à prolonger ψ par sa limite en $-\infty$ et en $+\infty$, on peut se ramener au cas d'un segment, par exemple à $[0, 1]$. On vérifie alors que ψ est limite uniforme de fonctions en escalier (c'est vrai pour toutes les fonctions réglées, i.e. celles qui en tout point ont une limite à gauche et une limite à droite, et se montre en construisant une approximation sur $[0, x]$ et en faisant croître x). Cela permet de conclure. □

A.2. Construction d'une intégrale

Une fonction à variation bornée définit une mesure, appelée mesure de Stieltjes associée. On a donc naturellement une intégrale définie sur les fonctions à variation bornée, mais cette intégrale a l'inconvénient de ne pas tenir compte de toute la fonction : si on modifie une fonction en un nombre fini ou dénombrable de points, la mesure associée n'est pas modifiée. En particulier, il n'y a pas d'espoir de reconstituer une fonction, ou même sa variation, juste à partir d'intégrales de Stieltjes. C'est pourquoi on va introduire une autre notion d'intégrale, qui résoudra ces problèmes.

A.2.1. Une notion de limite Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné (l'ordre n'étant pas forcément total). Si Φ est une fonction $E \to \mathbb{R}$, on dit que Φ tend vers l pour $\preccurlyeq$ si $\forall \varepsilon > 0, \forall P \in E, \exists Q \succcurlyeq P, \forall R \succcurlyeq Q, |\Phi(R) - l| \leqslant \varepsilon$.

Quand l'ordre est total, la définition se simplifie en $\exists Q, \forall R \succcurlyeq Q, |\Phi(R) - l| \leqslant \varepsilon$. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, dire que Φ tend vers l pour $\leqslant$ revient à dire que Φ tend vers l en $+\infty$.

En fait, la définition se simplifie de la même manière quand l'ordre est dirigé, c'est-à-dire que deux éléments ont toujours un majorant commun. En effet, supposons que $\forall R \succcurlyeq Q, |\Phi(R) - l| \leqslant \varepsilon$. Soit alors P fixé, et Q' un majorant commun à Q et P. Alors, $\forall R \succcurlyeq Q', |\Phi(R) - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre la convergence de Φ vers l pour $\preccurlyeq$.

On va appliquer cette notion de convergence aux subdivisions de $\mathbb{R}$, avec pour ordre $a \preccurlyeq b$ lorsque b est un raffinement de a. Comme deux subdivisions ont toujours un raffinement commun, cet ordre est dirigé.

A.2.2. Définition de l'intégrale symétrique

Lemme A.2.1. *Soient ψ_1, ψ_2 et φ des fonctions à variation bornée. Alors la limite (pour l'ordre $\preccurlyeq$, au sens précédent) de $\sum \psi_1(a_i)\psi_2(a_{i-1})\big(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\big)$ existe.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour ψ_1 et ψ_2 fonctions caractéristiques d'intervalles non bornés. En effet, on en déduit le résultat pour des combinaisons linéaires de telles fonctions, puis on l'étend à toutes les fonctions à variation bornée par densité (en utilisant le lemme A.1.7, et car tout est continu).

Démontrons donc le résultat dans le cas des fonctions caractéristiques d'intervalles non bornés. Pour chaque fonction χ_1 et χ_2 il y a 5 possibilités ($\chi_{(-\infty,+\infty)}$, ou fonctions caractéristiques d'intervalles bornés d'un côté, contenant $-\infty$ ou $+\infty$, ouverts ou fermés). On traite par exemple le cas de $\chi_1 = \chi_{(-\infty,x)}$ et $\chi_2 = \chi_{(-\infty,+\infty)}$, les autres étant analogues (i.e. tout est explicitable).

Soit $a = (a_{-K} < \ldots < a_0 = x < a_1 < \ldots < a_L)$ une subdivision de $\mathbb{R}$. Alors

$$\sum \chi_{(-\infty,x)}(a_i)\big(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\big) = \varphi(a_{-1}) - \varphi(a_{-K}).$$

Soit a une subdivision telle que φ soit proche de $\varphi(x_-)$ à ε près sur $[a_{-1}, x)$, et telle que φ soit proche de $\varphi(-\infty)$ à ε près sur $(-\infty, a_{-K})$. Alors

$$\left|\sum \chi_{(-\infty,x)}(a_i)\big(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\big) - (\varphi(x_-) - \varphi(-\infty))\right| \leqslant 2\varepsilon$$

et il en ira de même pour toutes les raffinements de a. Ainsi, la limite existe bien (et elle vaut $\varphi(x_-) - \varphi(-\infty)$). □

On a de même la convergence de $\sum \psi_1(a_{i-1})\psi_2(a_i)\big(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\big)$, et de la moyenne de ces deux expressions. La définition qui suit a donc un sens.

Définition A.2.2. *Soient ψ_1, ψ_2 et φ des fonctions à variation bornée. On notera*

$$\int \psi_1 \, \nabla\varphi \, \psi_2 = \lim_{\preccurlyeq} \sum \frac{\psi_1(a_i)\psi_2(a_{i-1}) + \psi_1(a_{i-1})\psi_2(a_i)}{2} \Big(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\Big)$$

et on appellera cette intégrale intégrale symétrique de ψ_1 et ψ_2 par rapport à φ.

En fait, les bonnes subdivisions pour la convergence seront celles qui contiendront les grandes discontinuités de φ, ψ_1 et ψ_2, et qui auront un pas petit sur un grand compact. Par contre, avoir un petit pas ne suffit pas.

L'intégrale ainsi définie est une fonction trilinéaire continue de ψ_1, ψ_2 et φ. Elle vérifie

$$\left|\int \psi_1 \, \nabla\varphi \, \psi_2\right| \leqslant \|\psi_1\|_\infty \, \|\psi_2\|_\infty \operatorname{var}\varphi.$$

Il faut remarquer que la place des fonctions dans l'intégrale est importante : en général, $\int \psi_1\psi_2 \, \nabla\varphi \neq \int \psi_1 \, \nabla\varphi \, \psi_2$.

Cette intégrale est symétrique en ψ_1 et ψ_2 (d'où son nom). En fait, c'est un analogue symétrisé de l'intégrale avec des semi-mesures définie dans [Rue91].

A.2.3. Premières propriétés de l'intégrale symétrique La proposition qui suit traduit la possibilité d'intégrer par parties :

Proposition A.2.3. *Si ψ_1, ψ_2 et $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sont à variation bornée, alors*

$$\int \psi_1 \, \nabla(\varphi_1 \ldots \varphi_m)\psi_2 = \sum_{i=1}^{m} \int \psi_1\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1} \, \nabla\varphi_i \, \varphi_{i+1} \ldots \varphi_m\psi_2.$$

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $m = 2$. On utilise alors la factorisation

$$\begin{aligned}\varphi_1(a_i)\varphi_2(a_i)-&\varphi_1(a_{i-1})\varphi_2(a_{i-1})\\ &= \big(\varphi_1(a_i) - \varphi_1(a_{i-1})\big)\varphi_2(a_i) + \varphi_1(a_{i-1})\big(\varphi_2(a_i) - \varphi_2(a_{i-1})\big)\end{aligned}$$

appliquée au terme facteur de $\psi_1(a_{i-1})\psi_2(a_i)$, et son analogue où φ_1 et φ_2 sont inversées appliqué au terme facteur de $\psi_1(a_i)\psi_2(a_{i-1})$. □

On peut également faire des changements de variables dans cette intégrale :

Proposition A.2.4. *Soient ψ_1, ψ_2 et φ à variation bornée et f un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. Notons $\varepsilon = 1$ si f est croissante et -1 si elle est décroissante. Alors*

$$\int \psi_1 \circ f\, \nabla(\varphi \circ f)\, \psi_2 \circ f = \varepsilon \int \psi_1\, \nabla\varphi\, \psi_2.$$

C'est pour avoir cette proposition qu'on a symétrisé dans la définition de l'intégrale.

Proposition A.2.5. $\left|\int \psi_1\, \nabla\varphi\, \psi_2\right| \leqslant \int |\psi_1||\,\nabla\varphi||\psi_2|$, *où* $|\,\nabla\varphi|$ *désigne* $\nabla\psi$ *où* $\psi(x) = \mathrm{Var}_{(-\infty,x]}(\varphi)$.

A.3. Reconstruction de φ à partir des $\int \psi\, \nabla\varphi$

Un des intérêts de l'intégrale qu'on vient de construire est qu'elle dépend des valeurs de φ en chaque point, contrairement à l'intégrale de Stieltjes classique. Ainsi, si on connaît les valeurs de toutes les $\int \psi\, \nabla\varphi$, il y a un espoir de reconstituer φ. On a en effet

Proposition A.3.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}_0$ (i.e. φ est une fonction à variation bornée qui tend vers 0 en l'infini). Posons*

$$\widetilde{\varphi}(x) = 2\int \chi_{(-\infty,x)}\, \nabla\varphi - \lim_{y \nearrow x} \int \chi_{(-\infty,y)}\, \nabla\varphi.$$

Alors $\widetilde{\varphi}$ est bien définie, et égale à φ.

Démonstration. Un calcul explicite donne que $\int \chi_{(-\infty,x)}\, \nabla\varphi = \frac{\varphi(x)+\varphi(x_-)}{2} - \varphi(-\infty) = \frac{\varphi(x)+\varphi(x_-)}{2}$ car φ tend vers 0 en l'infini. Ainsi

$$\begin{aligned}2\int \chi_{(-\infty,x)}\, \nabla\varphi - \int \chi_{(-\infty,y)}\, \nabla\varphi &= 2\frac{\varphi(x)+\varphi(x_-)}{2} - \frac{\varphi(y)+\varphi(y_-)}{2}\\ &\xrightarrow[y\nearrow x]{} 2\frac{\varphi(x)+\varphi(x_-)}{2} - \frac{\varphi(x_-)+\varphi(x_-)}{2} = \varphi(x)\end{aligned}$$

□

En fait, on a choisi l'expression de $\widetilde{\varphi}$ pour que ça marche, en s'arrangeant pour éliminer les $\varphi(x_-)$.

Théorème A.3.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}_0$ telle que $\forall \psi \in \mathcal{B}$, $\left|\int \psi\, \nabla\varphi\right| \leqslant C\, \|\psi\|_\infty$. Alors* $\mathrm{Var}\,\varphi \leqslant 3C$.

Démonstration. Comme φ tend vers 0 en l'infini, $\operatorname{var}\varphi = \operatorname{Var}\varphi$. Il suffit donc d'étudier $\operatorname{var}\varphi$. Pour cela, on va utiliser l'expression de φ donnée par la proposition précédente.

Notons $\eta(x) = \int \chi_{(-\infty,x)} \nabla\varphi$. Montrons que $\operatorname{var}\eta \leqslant C$. Si $a_0 < \ldots < a_n$, on a

$$\sum |\eta(a_i) - \eta(a_{i-1})| = \sum \varepsilon_i \big(\eta(a_i) - \eta(a_{i-1})\big) = \int \Big(\sum \varepsilon_i \chi_{[a_{i-1},a_i)}\Big) \nabla\varphi$$
$$\leqslant C \left\| \sum \varepsilon_i \chi_{[a_{i-1},a_i)} \right\|_\infty \leqslant C.$$

La fonction $\widetilde{\eta}(x) = \lim_{y \nearrow x} \int \chi_{(-\infty,y)} \nabla\varphi$ est la limite simple des fonctions $\eta(x - 1/n)$, donc d'après la proposition A.1.3 sa variation est aussi majorée par C. Finalement, comme $\varphi = 2\eta - \widetilde{\eta}$ (par la proposition précédente), $\operatorname{var}\varphi \leqslant 3C$. □

A.4. Propriétés de compacité d'opérateurs intégraux

Théorème A.4.1. *Soit $f(y,x)$ une fonction telle que* $\operatorname{Var} f(.,x)$ *est borné par une constante M indépendante de x, et g une fonction à variation bornée. Alors $A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ défini par $A\Phi(y) = \int f(y,x) \nabla g(x) \Phi(x)$ est un opérateur compact, de norme bornée par M* $\operatorname{var} g$.

Démonstration. Notons $\Psi = A\Phi$. Si $a_0 < \ldots < a_n$ est une subdivision, alors

$$\begin{aligned}
&|\Psi(a_0)| + \sum |\Psi(a_i) - \Psi(a_{i-1})| + |\Psi(a_n)| \\
&\quad = \delta_0 \Psi(a_0) + \sum \varepsilon_i (\Psi(a_i) - \Psi(a_{i-1})) + \delta_1 \Psi(a_n) \\
&\quad = \int \Big(\delta_0 f(a_0,x) + \sum \varepsilon_i (f(a_i,x) - f(a_{i-1},x)) + \delta_1 f(a_n,x)\Big) \nabla g(x)\, \Phi(x) \\
&\quad \leqslant \int \operatorname{Var} f(.,x) |\nabla g(x)| |\Phi(x)| \leqslant M \operatorname{var} g\, \|\Phi\|_\infty .
\end{aligned}$$

Cela montre que A est un opérateur continu, de norme majorée par $M \operatorname{var} g$.

Pour voir que A est compact, on va voir qu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini. Il est plus agréable de se placer sur $(-1, 1)$ (ce qui revient au même que $\mathbb{R}$). On prolongera toutes les fonctions par continuité en -1 et en 1.

Fixons $\varepsilon > 0$.

La fonction g a un nombre fini de discontinuités plus grandes que $\varepsilon/2$. On peut donc écrire $g = h + k$, où h n'a pas de sauts plus grands que $\varepsilon/2$, k correspond à un nombre fini de sauts, et $\operatorname{var} h \leqslant \operatorname{var} g$. Alors $A_g = A_h + A_k$, et A_k est de rang fini (car $A_k\Phi$ ne dépend que des valeurs de Φ en x, x_+ et x_- pour x saut de k).

Soit $-1 = a_0 < \cdots < a_n = 1$ une subdivision telle que la variation de h sur chacun des intervalles $[a_0, a_1], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ soit majorée par ε (pour les construire, on part de a_0, et on rajoute des points pour que $\operatorname{var}_{[a_i,a_{i+1}]} h \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$, ce qui est possible puisque les sauts sont bornés par $\varepsilon/2$; ce procédé terminera puisque h est de variation finie). Si $\Phi \in \mathcal{B}((-1,1))$, on définit $B\Phi$ comme la fonction égale à Φ sur les a_i, et affine sur les $[a_i, a_{i+1}]$. L'opérateur B est continu (on a $\mathrm{Var}(B\Phi) \leqslant \mathrm{Var}(\Phi)$), et de rang fini (puisque les éléments de son image sont définis par leurs valeurs en $n+1$ points).

L'opérateur $A_h B$ est de rang fini, on va voir qu'il approche bien A_h. Fixons $\Phi \in \mathcal{B}((-1,1))$. Notons $\chi = B\Phi - \Phi$: χ est nulle sur les a_i, et $\mathrm{Var}\,\chi \leqslant 2\,\mathrm{Var}\,\Phi$. Soit m_i le maximum de χ sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. Comme χ est nulle sur les a_i, $\sum m_i \leqslant \mathrm{Var}\,\chi$. De plus, le calcul du début de la preuve montre que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(A_h\Phi - A_h B\Phi) = \mathrm{Var}(A_h\chi) &\leqslant \int M|\nabla h||\chi| = \sum_i \int_{[a_i,a_{i+1}]} M|\nabla h||\chi| \\
&\leqslant \sum_i M\,\mathrm{var}_{[a_i,a_{i+1}]}(h)\, m_i \\
&\leqslant M\varepsilon \sum m_i \leqslant M\varepsilon\,\mathrm{Var}\,\chi \leqslant 2M\varepsilon\,\mathrm{Var}\,\Phi
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|A_h - A_h B\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 2M\varepsilon$. Puis

$$\|A - A_h B - A_k\|_{\mathrm{Var}} = \|A_h - A_h B\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 2M\varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, A peut être approché arbitrairement près par des opérateurs de rang fini. Il est donc compact. $\square$

Notons que, dans cette preuve, on n'approche pas $f(y,x)$ par des opérateurs du type $\sum g_i(y)h_i(x)$, contrairement à ce qu'on fait habituellement dans la preuve de la compacité de ce type d'opérateurs, par exemple dans le cadre des fonctions continues.

Théorème A.4.2. *Soit $f(y,x)$ une fonction telle que* $\mathrm{Var}\, f(.,x)$ *est borné par une constante M indépendante de x, et g une fonction à variation bornée. Alors $A' : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ défini par $A'\Phi(y) = \lim_{z\nearrow y} \int f(z,x)\,\nabla g(x)\,\Phi(x)$ est un opérateur compact.*

Démonstration. La preuve est identique à la précédente, en utilisant en plus que si Ψ est limite simple des Ψ_n alors $\mathrm{Var}\,\Psi \leqslant \underline{\lim}\ \mathrm{Var}\,\Psi_n$. Cela implique en particulier que A' est un opérateur bien défini (car $A'\Phi(y) = \lim\limits_{z\nearrow y} A\Phi(z)$ est la limite à gauche de $A\Phi$ en y, qui existe bien puisque $A\Phi$ est à variation bornée), et continu (puisque $\mathrm{Var}(A'\Phi) \leqslant \mathrm{Var}(A\Phi)$ en passant à la limite simple).

Si h et k sont définies comme dans la preuve précédente, ainsi que B, on a juste besoin de voir que $\left\|A'_h - A'_h B\right\|_{\mathrm{Var}} \leqslant 2M\varepsilon$ pour obtenir la compacité de A'. Pour cela, on écrit que $\Psi = (A'_h - A'_h B)\Phi$ est limite simple des Ψ_n définies par $\Psi_n(y) = (A_h - A_h B)\Phi(y - 1/n)$. Comme $\mathrm{Var}\,\Psi_n \leqslant 2M\varepsilon\,\mathrm{Var}\,\Phi$ d'après la preuve précédente, on obtient le résultat demandé en passant à la limite. $\square$

A.5. Fonctions définies à un ensemble dénombrable près

On note $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}/\mathcal{B}_\infty$, où $\mathcal{B}_\infty$ désigne les fonctions à variation bornée qui sont nulles hors d'un ensemble au plus dénombrable. $\mathcal{B}_\infty$ est fermé pour Var, donc cette norme induit une norme sur $\mathcal{B}_c$. Plus précisément, soit $\Phi \in \mathcal{B}$ et Φ_c sa classe dans $\mathcal{B}_c$. Si $\widetilde{\Phi}$ désigne la version régularisée de Φ, où on a rendu ses discontinuités symétriques, alors $\mathrm{Var}_c(\Phi_c) = \mathrm{Var}\,\widetilde{\Phi}$.

On peut définir une intégrale $\int_c$ sur $\mathcal{B}_c$ comme précédemment ; simplement, les subdivisions sur lesquelles on prend la limite ne doivent pas contenir de discontinuité des fonctions ψ_1, ψ_2 et φ. En fait, si A est un ensemble dénombrable suffisamment grand (i.e. il contient les discontinuités de toutes les fonctions considérées), $\int_c$ est la limite des sommes pour les subdivisions qui ne rencontrent pas A. On en déduit la trilinéarité de $\int_c$. On a également

$$\left| \int_c \psi_1 \, \nabla\varphi \, \psi_2 \right| \leqslant \|(\psi_1)_c\|_{\infty,c} \, \mathrm{Var}_c(\varphi_c) \, \|(\psi_2)_c\|_{\infty,c}$$

Pour l'obtenir, il suffit de considérer les versions régularisées des fonctions, ce qui ne modifie pas l'intégrale.

Il faut vérifier qu'il y a bien convergence. On peut se restreindre aux fonctions caractéristiques d'intervalles, et tout est alors explicitable. Par exemple, on vérifie que $\int_c \chi_{(-\infty,x)} \nabla\varphi = \frac{\varphi(x_+)+\varphi(x_-)}{2}$. On peut remarquer que, dans toutes les expressions explicites, les valeurs de φ aux points n'interviennent pas. C'est normal, puisque l'intégrale ne doit pas bouger si φ est modifiée en un nombre fini de points.

On a un analogue du théorème A.3.2 :

Théorème A.5.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}_0$ telle que $\forall \psi \in \mathcal{B}$, $\left|\int_c \psi \, \nabla\varphi\right| \leqslant C \|\psi\|_\infty$. Alors* $\mathrm{Var}_c(\varphi_c) \leqslant C$.

Démonstration. Notons $\widetilde{\varphi}(x) = \int_c \chi_{(-\infty,x)} \nabla\varphi$: on a vu que $\widetilde{\varphi}$ était la version régularisée de φ, donc $\mathrm{Var}_c(\varphi_c) = \mathrm{Var}\,\widetilde{\varphi} = \mathrm{var}\,\widetilde{\varphi}$ (puisque $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{B}_0$).

Si $a_0 < \cdots < a_n$, alors

$$\begin{aligned}\sum |\widetilde{\varphi}(a_i) - \widetilde{\varphi}(a_{i-1})| &= \sum \varepsilon_i \big(\widetilde{\varphi}(a_i) - \widetilde{\varphi}(a_{i-1})\big) = \int_c \Big(\sum \varepsilon_i \, \chi_{[a_{i-1},a_i)}\Big) \nabla\varphi \\ &\leqslant C \left\| \sum \varepsilon_i \, \chi_{[a_{i-1},a_i)} \right\|_\infty \leqslant C\end{aligned}$$

En passant au sup sur la subdivision, on obtient $\mathrm{var}\,\widetilde{\varphi} \leqslant C$, i.e. $\mathrm{Var}_c(\varphi_c) \leqslant C$. □

On peut également prouver des analogues des autres propriétés, par exemple des propriétés de compacité, mais nous n'en aurons pas besoin.

B. Un théorème de théorie spectrale

Si A est un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach E, son rayon spectral $r(A)$ est le maximum des modules des éléments de $\sigma(A)$ (le spectre de A). Il vérifie $r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$.

On définit aussi le rayon spectral essentiel de A, noté $r_{ess}(A)$, comme suit. Si λ est un élément isolé du spectre de A, on dit que c'est une valeur propre de multiplicité finie de A si l'image du projecteur spectral associé à λ, i.e. $P_\lambda = \int_{|z-\lambda|=\delta} (z \,\mathrm{Id} - A)^{-1} \, \mathrm{d}z$ pour δ petit, est de dimension finie. Le rayon spectral essentiel est alors le plus petit r tel que $\sigma(A) \cap \{|z| > r\}$ soit constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie. Le théorème de Nussbaum ([Nus70]) affirme que

$$r_{ess}(A) = \inf \left\{ \left\| A^n - K_n \right\|^{1/n} \mid n \geqslant 1, K_n \text{ compact} \right\}$$

Si λ est une valeur propre isolée de A, de multiplicité finie, on notera $E_\lambda(A)$ l'image du projecteur spectral P_λ. Il coïncide avec $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, (\lambda \operatorname{Id} - A)^n x = 0\}$, i.e. le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ ; il est de dimension finie.

Théorème B.0.2. *Soient E_1 et E_2 deux Banach, $A_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $\pi \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ une surjection, tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "\pi"'] & E_1 \arrow[d, "\pi"] \\ E_2 \arrow[r, "A_2"] & E_2 \end{tikzcd}$$

Alors $r(A_1) \geqslant r(A_2)$, $r_{ess}(A_1) \geqslant r_{ess}(A_2)$. De plus, pour $|\lambda| > r_{ess}(A_1)$, π réalise une surjection de $E_\lambda(A_1)$ sur $E_\lambda(A_2)$ (où E_λ désigne le sous-espace caractéristique associé à λ).

Démonstration. *Montrons que $r(A_1) \geqslant r(A_2)$.*

La projection π est une surjection entre deux Banach, c'est donc une application ouverte. Donc $\pi(B(0,1))$ contient une boule $B(0, 1/M)$, et $\pi(B(0, M))$ contient $B(0,1)$; ainsi, tout élément y de E_2 a un antécédent x par π vérifiant $\|x\| \leqslant M\|y\|$. Il existe aussi une constante M' telle que $\|\pi(x)\| \leqslant M'\|x\|$, puisque $\pi \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

On va montrer que $\|A_2\| \leqslant MM'\|A_1\|$. On aura alors de la même façon $\left\|A_2^n\right\| \leqslant MM' \left\|A_1^n\right\|$, donc en prenant la puissance $1/n$ et en faisant tendre n vers l'infini on obtiendra $r(A_2) \leqslant r(A_1)$.

Soit y de norme 1 tel que $\|A_2 y\| \geqslant \|A_2\| - \varepsilon$. Soit x tel que $\pi(x) = y$, avec $\|x\| \leqslant M$. Alors

$$\begin{aligned} \|A_2\| - \varepsilon \leqslant \|A_2 y\| = \|A_2 \pi x\| = \|\pi A_1 x\| &\leqslant M' \|A_1 x\| \\ &\leqslant M' \|A_1\| \|x\| \leqslant MM' \|A_1\| . \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|A_2\| \leqslant MM'\|A_1\|$, ce qui est le résultat annoncé.

Montrons que $r_{ess}(A_1) \geqslant r_{ess}(A_2)$.

On va utiliser le même type de méthode. Le seul problème est que, si on dit que $r_{ess}(A_2) = \inf \left\|A_2^n - K_n\right\|^{1/n}$, alors pour obtenir une majoration il faudra relever les opérateurs compacts K_n, ce qui n'est pas évident *a priori*.

Pour éviter ce problème, on utilise une caractérisation du rayon spectral essentiel démontrée dans [Nus70]. Si A est un opérateur sur un Banach E, notons $\widetilde{\gamma}(A)$ l'inf des réels r tels que $A(B(0,1))$ puisse se recouvrir par un nombre fini de boules de rayon r. Comme $A(B(0,1)) \subset B(0, \|A\|)$, $\widetilde{\gamma}(A)$ est bien défini, et majoré par $\|A\|$. Par exemple, $\widetilde{\gamma}(A) = 0$ si et seulement si A est un opérateur compact ; ainsi, on peut voir $\widetilde{\gamma}(A)$ comme une mesure de la non-compacité de A. Le théorème de Nussbaum affirme alors que $r_{ess}(A) = \lim \widetilde{\gamma}(A^n)^{1/n}$.

Pour montrer que $r_{ess}(A_2) \leqslant r_{ess}(A_1)$, on va voir que $\widetilde{\gamma}(A_2) \leqslant MM'\widetilde{\gamma}(A_1)$. Ce résultat appliqué à A_2^n et A_1^n donne $\widetilde{\gamma}(A_2^n) \leqslant MM'\widetilde{\gamma}(A_1^n)$, donc en prenant la puissance $1/n$ et en faisant tendre n vers l'infini on obtiendra le résultat.

Soit $r > MM'\widetilde{\gamma}(A_1)$, montrons que $A_2(B(0,1))$ est recouvert par un nombre fini de boules de rayon r. Cela donnera $\widetilde{\gamma}(A_2) \leqslant r$, et on conclura en faisant tendre r vers $MM'\widetilde{\gamma}(A_1)$.

Comme $r > MM'\widetilde{\gamma}(A_1)$, $A_1(B(0,M))$ est recouvert par un nombre fini de boules de rayon r/M', de centres respectifs $x_1, \dots, x_n$. Notant $y_i = \pi(x_i)$, on va voir que $A_2(B(0,1)) \subset \bigcup B(y_i, r)$. Fixons $y \in B(0,1)$. Soit x un de ses antécédents par π, vérifiant $\|x\| < M$. Alors il existe i tel que $A_1 x \in B(x_i, r/M')$, i.e. $\|A_1 x - x_i\| < r/M'$. Alors, comme $\|\pi z\| \leqslant M' \|z\|$, on obtient $\|\pi A_1 x - y_i\| < r$, i.e. $\pi A_1 x \in B(y_i, r)$. Mais $\pi A_1 x = A_2(y)$, donc $A_2(y) \in B(y_i, r)$, ce qui permet de conclure.

Montrons que, pour $|\lambda| > r_{ess}(A_1)$, π réalise une surjection de $E_\lambda(A_1)$ sur $E_\lambda(A_2)$.

On pourrait le prouver en adaptant la méthode de [Rue91], proposition 1.3, qui consiste à considérer des sommes des E_{λ_i}, mais on va plutôt montrer un résultat un peu plus fort, à savoir que si λ est une valeur propre isolée de multiplicité finie de A_1 et A_2 (sans supposer $|\lambda| > r_{ess}(A_1)$), alors π est une surjection de $E_\lambda(A_1)$ sur $E_\lambda(A_2)$. On peut supposer que $\lambda = 0$.

On décompose $E_2 = F_1 \oplus F_2$, où $F_1 = E_0(A_2)$, et F_2 son supplémentaire spectral (i.e. l'image du projecteur spectral $P_{\sigma(A_2)-\{0\}}$). Notant $G_i = \pi^{-1}(F_i)$, alors $E_1 = G_1 \oplus G_2$, et les G_i sont stables par A_1 (car les F_i sont stables par A_2). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{A_1} & G_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ F_1 & \xrightarrow{A_2} & F_1 \end{array}$$

et π est une surjection de G_1 sur F_1.

Comme 0 est encore une valeur propre isolée de multiplicité finie pour $A_{1|G_1}$ (car cette propriété est stable par restriction à un sous-espace stable admettant un supplémentaire stable) on peut décomposer G_1 en $H_1 \oplus H_2$ où $H_1 = E_0(A_{1|G_1}) \subset E_0(A_1)$, et H_2 est son supplémentaire spectral. On va montrer que π est nulle sur H_2, ce qui montrera que $\pi : H_1 \to F_1$ est surjective, et permettra de conclure.

L'opérateur A_2 agit sur l'espace F_1 de dimension finie, et a 0 pour seule valeur propre, il est donc nilpotent. Soit n tel que $A_{2|F_1}^n = 0$. Soit $y \in H_2$. Comme A_1 est inversible sur H_2 (car 0 n'est pas dans son spectre), A_1^n l'est également, donc il existe $z \in H_2$ tel que $y = A_1^n z$. Alors $\pi(y) = \pi(A_1^n z) = A_2^n(\pi z) = 0$ puisque $A_2^n = 0$ sur F_1. Cela montre que π est nulle sur H_2. $\square$

Références

[Bai01] Baillif, M.: Kneading Operators, Sharp Determinants and Weighted Lefschetz Zeta Functions in Higher Dimension. Preprint, 2001

[Bal00] Baladi, V.: Positive Transfer Operators and Decay of Correlations. In: Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 16. Singapore: World Scientific, 2000

[BK90] Baladi, V. and Keller, G.: Zeta Functions and Transfer Operators for Piecewise Monotone Transformations. Commun. Math. Phys. **127**, 459–477 (1990)

[BKRS97] Baladi, V., Kitaev, A., Ruelle, D. and Semmes, S.: Sharp Determinants and Kneading Operators for Holomorphic Maps. Proc. Steklov. Math. Inst. **216**, 186–228 (1997)

[BR96] Baladi V., Ruelle, D.: Sharp Determinants. Invent. Math. **123**, 553–574 (1996)

[GGK00] Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N.: Traces and Determinants of Linear Operators. In: Operator Theory, Vol. **116**. Birkhäuser, 2000

[MT88] Milnor, J. and Thurston, W.: Iterated Maps of the Interval. Lecture Notes in Mathematics **1342**. Springer, 1988

[Nus70] Nussbaum, R.D.: The radius of the essential spectrum. Duke Math. J. **37**, 473–478 (1970)

[Rue91] Ruelle, D.: Spectral properties of a class of operators associated with maps in one dimension. Erg. Theory and Dyn. Syst. **11**, 757–767 (1991)

[Rue94a] Ruelle, D.: Dynamical Zeta Functions for Piecewise Monotone Maps of the Interval. American Mathematical Society, CRM Monograph Series Vol. **4**, 1994

[Rue94b] Ruelle, D: Extending the results of “sharp determinants” to discontinuous weights. Fax, 1994

[Rue96a] Ruelle, D: Functional Equation for Dynamical Zeta Functions of Milnor-Thurston Type. Commun. Math. Phys. **88**, 63–88 (1996)

[Rue96b] Ruelle, D: Sharp Zeta Functions for Smooth Interval Maps. In: International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995) Longman, 1996, pp. 188–206