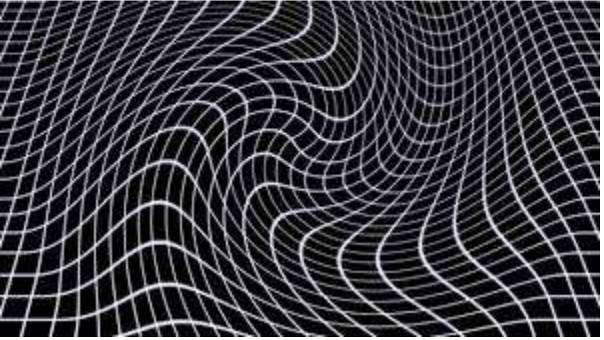
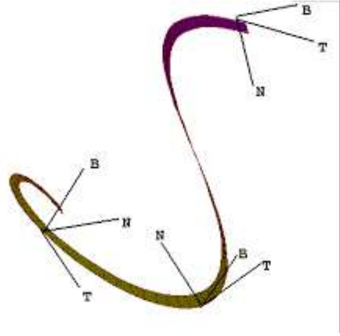
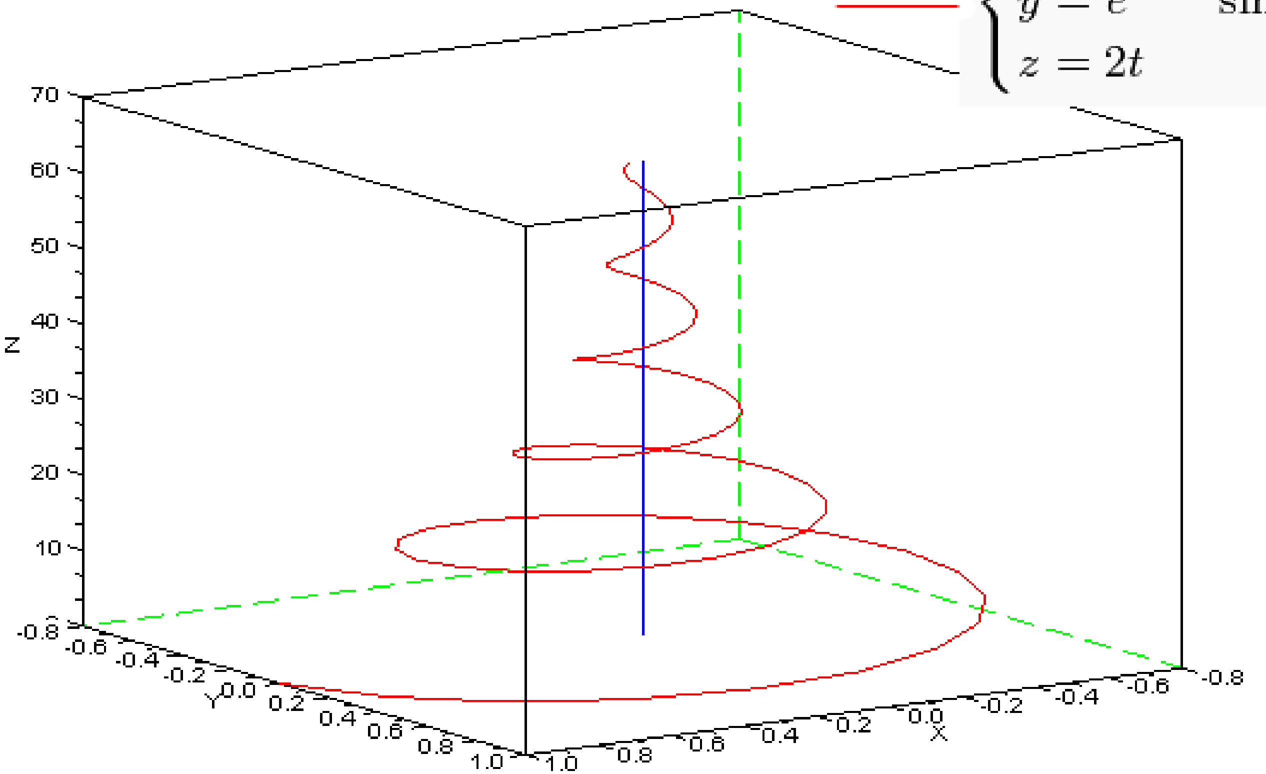


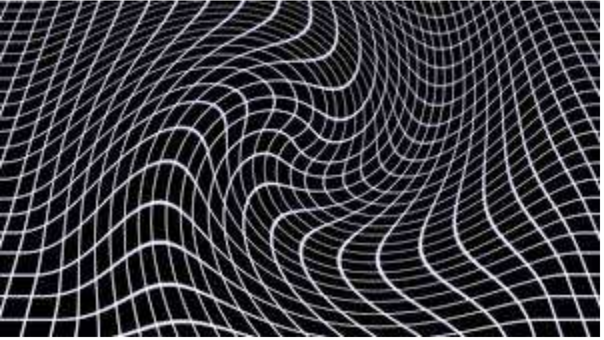


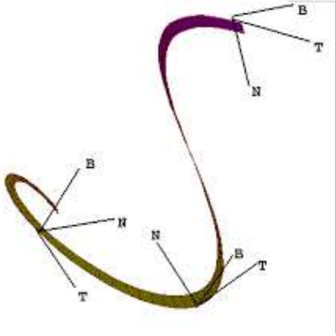
Chapitre 1 : 2D

Courbes Paramétrées et coordonnées polaires

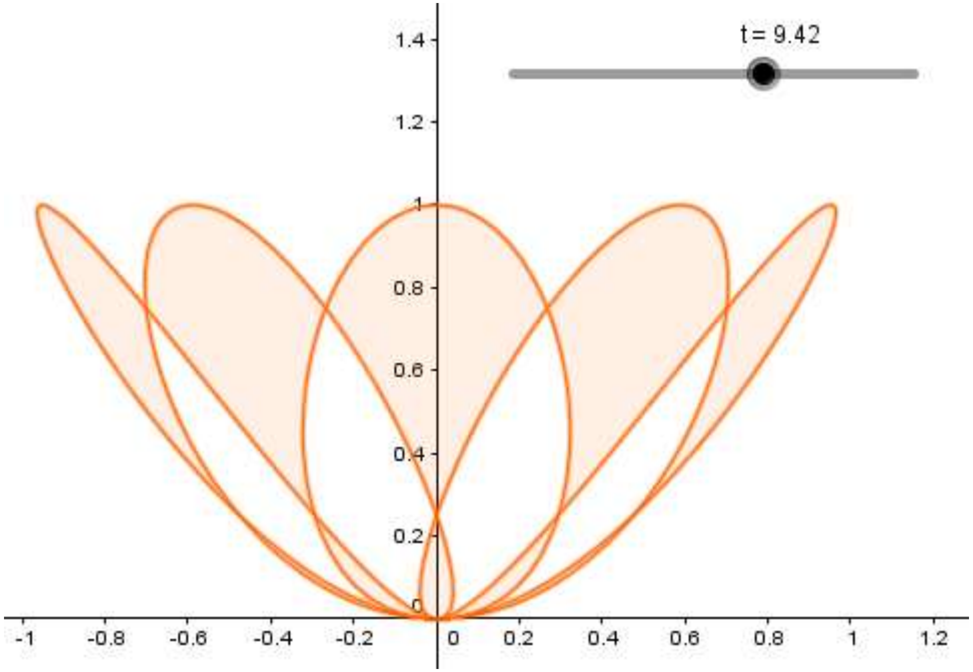
$$\begin{cases} x = e^{-0.1t}\cos t \\ y = e^{-0.1t}\sin t \\ z = 2t \end{cases}$$





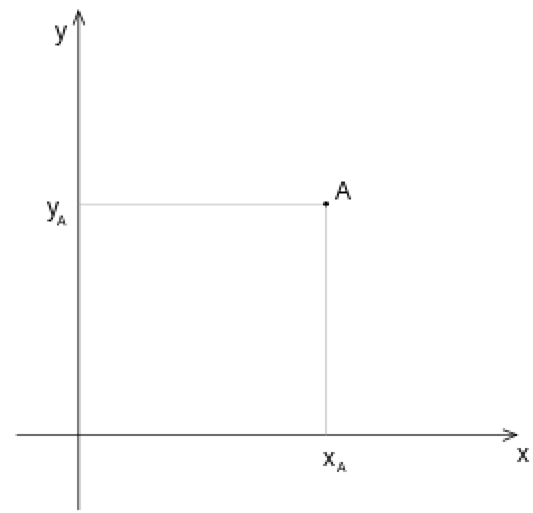


Partie 2 : Courbes polaires



Systèmes de coordonnées dans un plan

- Un système de coordonnées représente un point du plan par un couple de nombres (réels en général) appelés coordonnées.



- Habituellement, on utilise des coordonnées cartésiennes qui correspondent à des projections sur des axes perpendiculaires.
- On peut également utiliser un système de coordonnées introduit par Newton, appelé système de coordonnées polaires.

- Il peut être d'utilisation pratique dans de nombreux cas.

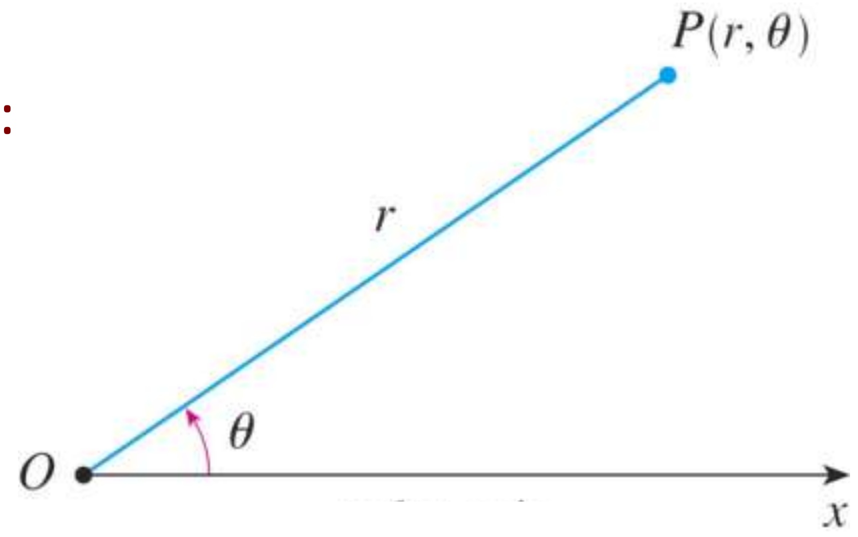
Pole et axe polaire

- On choisit un point *O* du plan que l'on appelle le pôle (ou origine).
- On trace un rayon (demi-droite) partant de *O,* on l'appelle axe polaire.
  - Cet axe est généralement tracé horizontalement vers la droite et correspond à l'axe des abscisses (x) en coordonnées Cartésiennes.

Coordonnées polaires

Si P est un point du plan ($\neq O$), soient :

- r la distance de O à P.
- θ l'angle (généralement mesuré en radians) entre l'axe polaire et la ligne OP.



Si $P = O$, alors $r = 0$, on convient que $(0, \theta)$ represente le pole pour toute valeur de θ.

P est représenté par le couple (r, θ).

r, θ sont appelés coordonnées polaires de P.

Coordonnées polaires

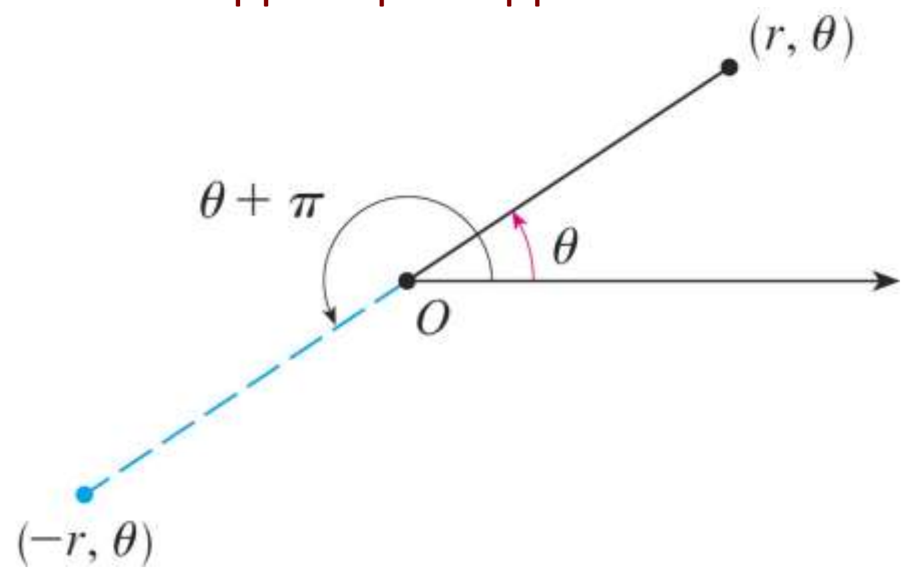
On étend la définition des coordonnées polaires (r, θ) au cas où r est negatif—comme suit.

On convient que les points ($-r$, θ) et (r, θ) sont sur la même droite (radiale) passant par O et à la même distance | r | de *O*, mais sur les côtés opposés par rapport à *O*.

Si $r > 0$, le point (r, θ) se trouve dans le même quadrant que θ.

Si $r < 0$, il se trouve dans le quadrant situé du côté opposé par rapport au pole.

Notons que ($-r$, θ) représente le même point que (r, $\theta + \pi$).



Exercice

Tracer les points de coordonnées polaires :

a. $(1, 5\pi/4)$

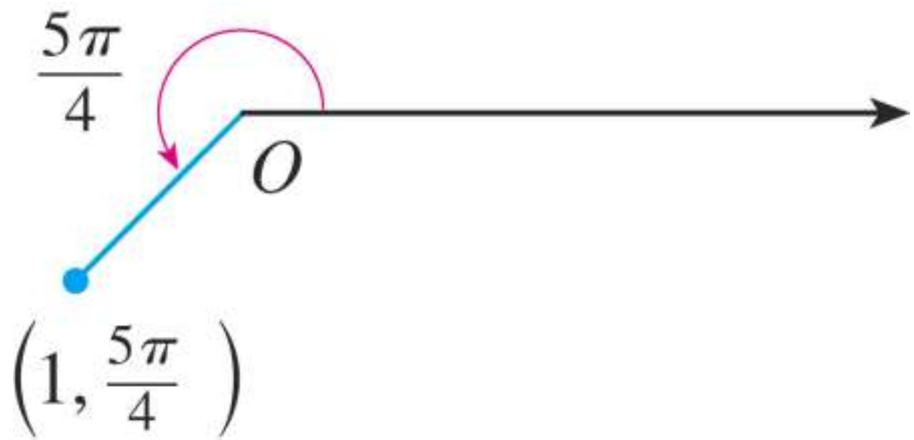
b. $(2, 3\pi)$

c. $(2, -2\pi/3)$

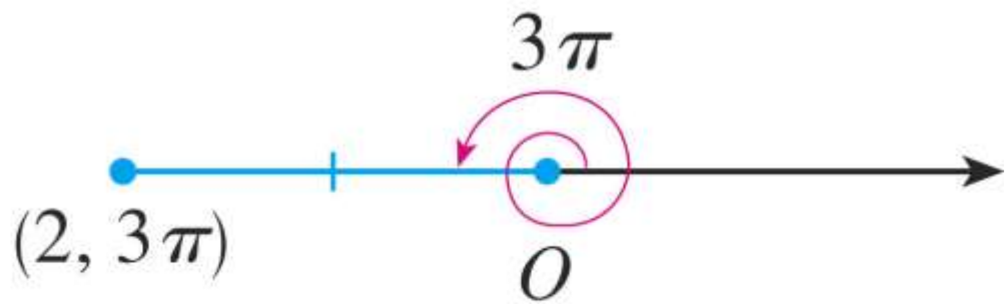
d. $(-3, 3\pi/4)$

Solution

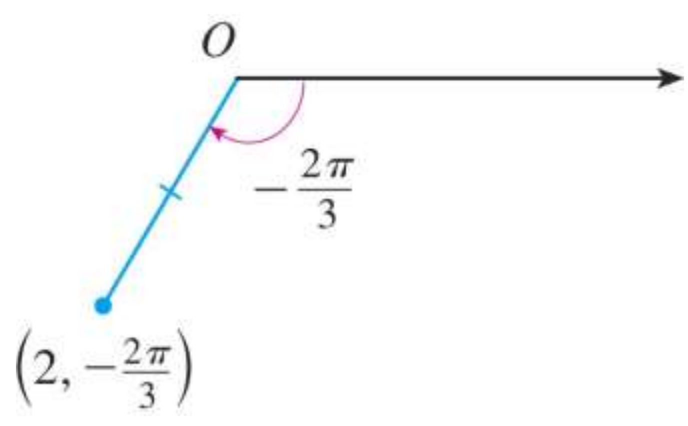
Le point (1, 5π/4) :



Le point (2, 3π) :

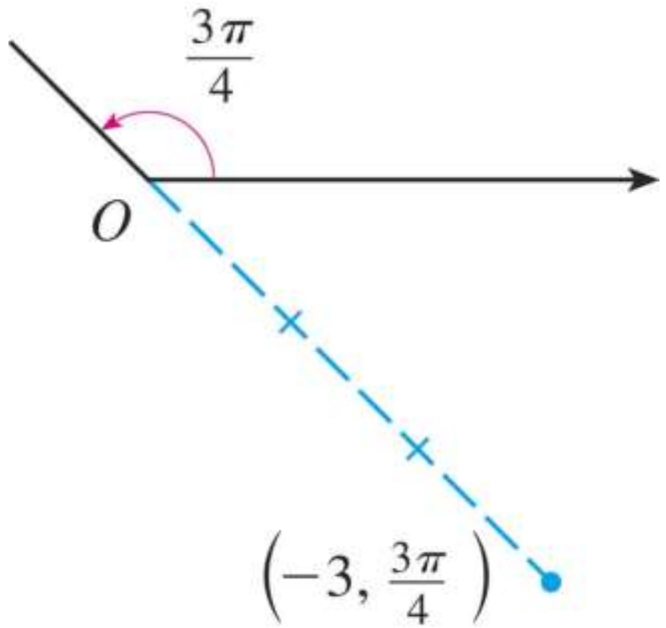


Le point (2, –2π/3) :



Le point (–3, 3*π*/4) :

- Il est situé dans le 4ème quadrant**.**
- L’angle 3*π*/4 est dans le second quadrant
 et *r* est négatif.

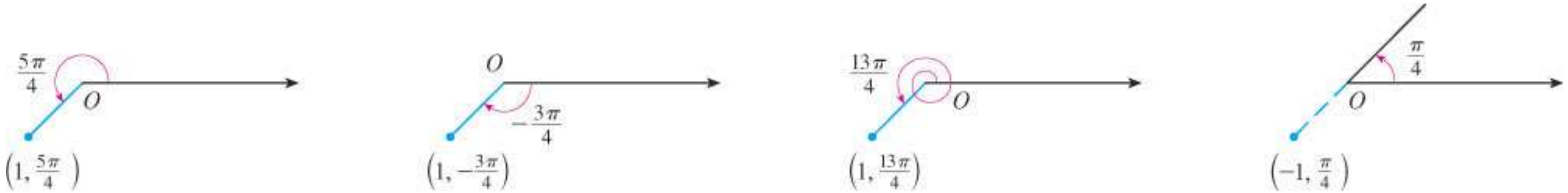


CARTÉSIENNES ET POLAIRES

En coordonnées Cartésiennes, chaque point a une représentation unique.

Alors que, en coordonnées polaires, chaque point a une infinité de représentations.

Par exemple, le point $(1, 5\pi/4)$ de l'exercice précédent peut aussi s'écrire : $(1, -3\pi/4)$, $(1, 13\pi/4)$, or $(-1, \pi/4)$.



Un point de coordonnées polaires (r, θ) s'écrit aussi : $(r, \theta + 2n\pi)$ et $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ où n est un entier relatif quelconque.

CARTÉSIENNES ET POLAIRES

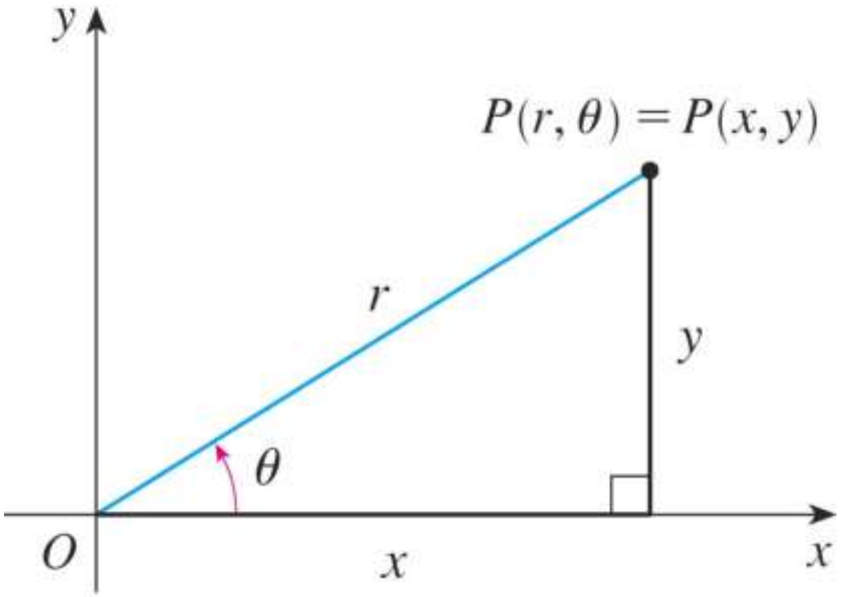
Le passage des coordonnées polaires aux Cartésiennes s'obtient facilement du fait que :

- Le pole correspond à l'origine.
- L'axe polaire coincide avec l'axe des abscisses positives.

Si le point *P* a pour coordonnées polaires (r, θ), ses coordonnées Cartésiennes (x, y) sont :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

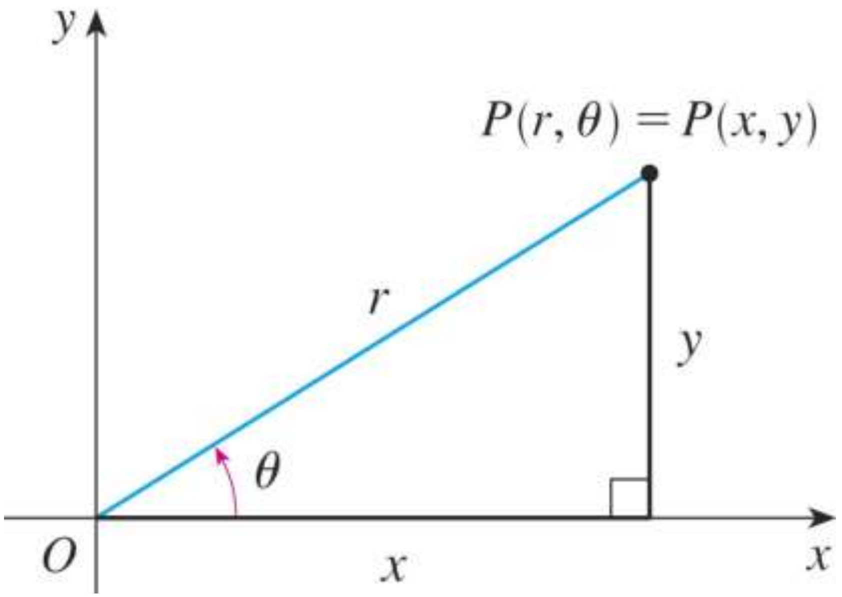


CARTÉSIENNES ET POLAIRES

Pour trouver *r* et *θ* quand *x* et *y* sont connus, on utilise les équations :

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

- Elle sont déduites des équations précédentes ou simplement « lues » sur la figure.



Exercices

1. Convertir les coordonnées polaires du point (2, $\pi/3$) en coordonnées Cartésiennes.

2. Représenter le point de coordonnées Cartésiennes (1, –1) en termes de coordonnées polaires.

Solution 1

- Puisque r = 2 et $\theta = \pi/3$,

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

- Donc, le point est $(1, \sqrt{3})$ en coordonnées Cartésiennes.

Solution 2

Si on choisit $r > 0$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Comme le point (1, –1) se trouve dans le 4ème quadrant, on peut choisir $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$.

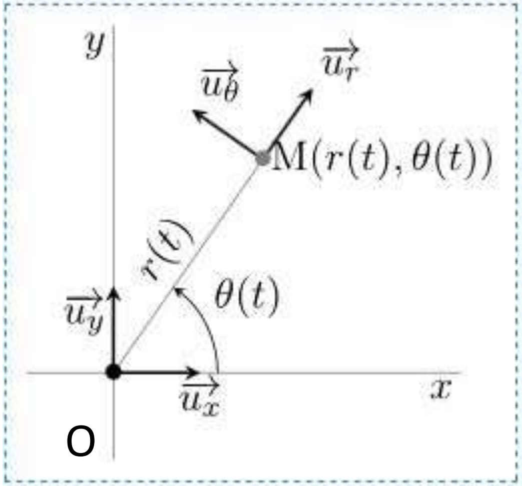
Aussi, une réponse possible est : $(\sqrt{2}, -\pi/4)$

Une autre réponse possible est: $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$

Base comobile

Repère cartésien R d'origine O, et de base orthonormée directe ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$). Le point O est le pole et l'axe (O,$\mathbf{u}_x$) l'axe polaire, pour le système de coordonnées polaires.
Les coordonnées cartésiennes x et y s'expriment en fonction des coordonnées polaires r et θ :

$$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta.$$



- Le vecteur position du point M dans R : **OM** est souvent noté **r,** on note $\mathbf{u}_r$ le vecteur unitaire de même direction :

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r = r\,(\cos\theta\,\mathbf{u}_x + \sin\theta\,\mathbf{u}_y),$$

- $\mathbf{u}_\theta$ vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{u}_r$ (sens direct). (M, $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$) forme un repère orthonormé direct local, que l'on appelle base comobile.

$$\mathbf{u}_\theta = \cos(\theta+\pi/2)\,\mathbf{u}_x + \sin(\theta+\pi/2)\,\mathbf{u}_y = -\sin\theta\,\mathbf{u}_x + \cos\theta\,\mathbf{u}_y$$

- On voit facilement, en dérivant les coordonnées de $\mathbf{u}_r$ et $\mathbf{u}_\theta$ par rapport à θ que :

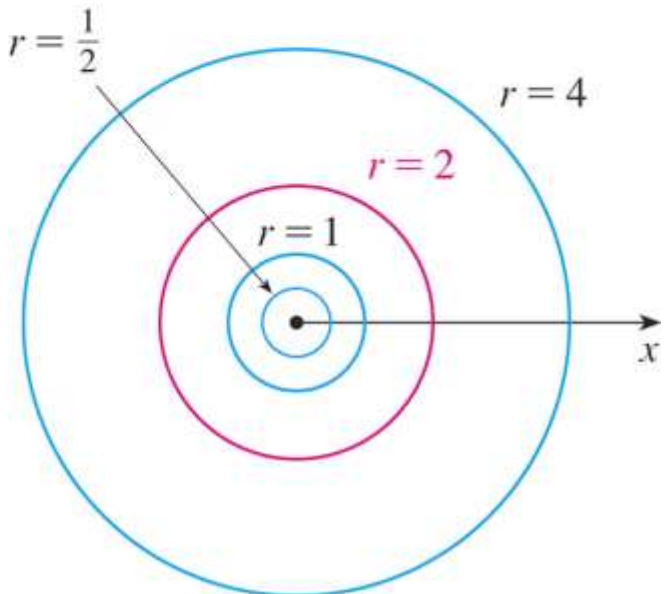
$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{u_r}$$

Courbes polaires

Le graphe d'équation polaire $r = f(\theta)$ [ou, plus généralement, $F(r, \theta) = 0$] est constitué de l'ensemble des points ayant au moins une représentation polaire (r, θ), dont les coordonnées satisfont l'équation.

Exemple : quelle est la courbe d'équation polaire $r = 2$?

- cette courbe est constituée de tous les points (r, θ) avec $r = 2$.
- r représente la distance du point au pole.



Donc, la courbe $r = 2$ est le cercle de centre O et rayon 2.
En général, l'équation $r = a$ représente un cercle de centre O et rayon $|a|$.

Exercice

Tracer la courbe polaire $\theta = 1$.

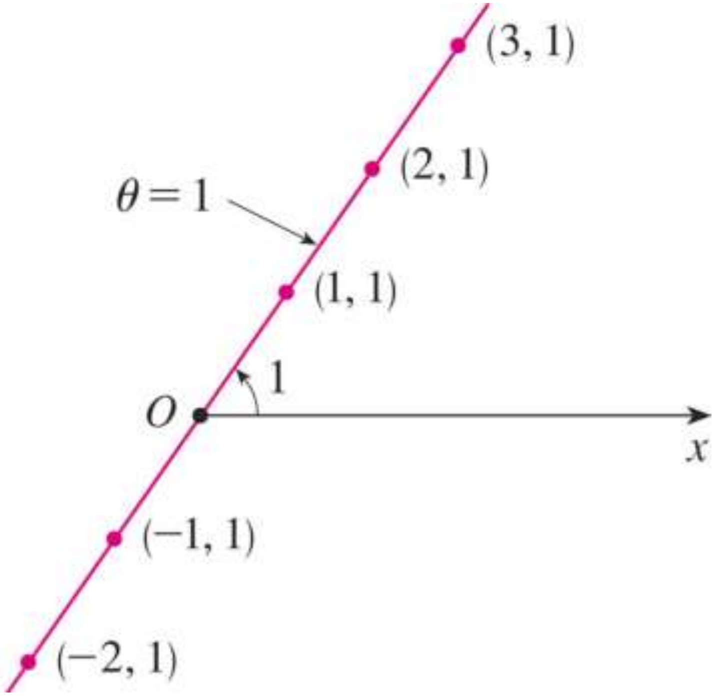
Solution

- Cette courbe est constituée de tous les points (r, θ) tells que l'angle polaire θ soit 1 radian.
- C'est la droite passant par O et faisant un angle de 1 radian avec l'axe polaire.

Notons que :

Les points (r, 1) de cette droite avec $r > 0$ sont dans le 1er quadrant.

Les points (r, 1) avec $r < 0$ sont dans le 3ème quadrant.



Exercice

a. Tracer la courbe d'équation polaire $r = 2 \cos \theta$.

b. Trouver une équation Cartésienne de cette courbe.

Solution :

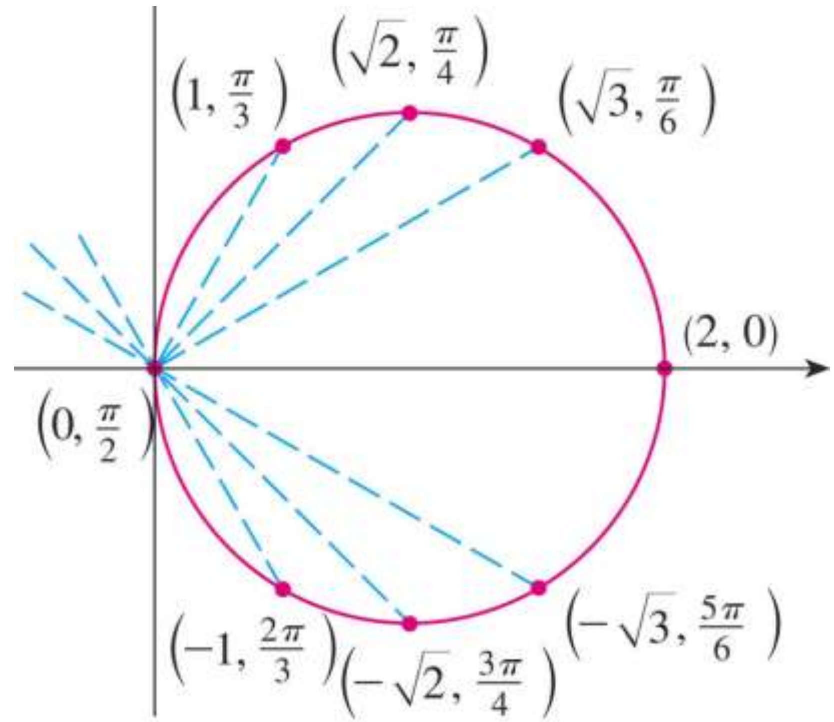
Pour commencer, nous indiquons les valeurs de r pour certaines valeurs de θ.

On trace les points correspondant pour (r, θ)

Puis, on joint ces points pour tracer la courbe—comme suit.

θ	$r = 2 \cos \theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



La courbe ressemble à un cercle.

On a seulement utilisé les valeurs de θ comprises entre 0 et π—si on laisse θ croître au-delà de π, on retrouve les mêmes points.

La courbe semble être un cercle.

Pour convertir l’équation polaire en Cartésienne, on utilise :

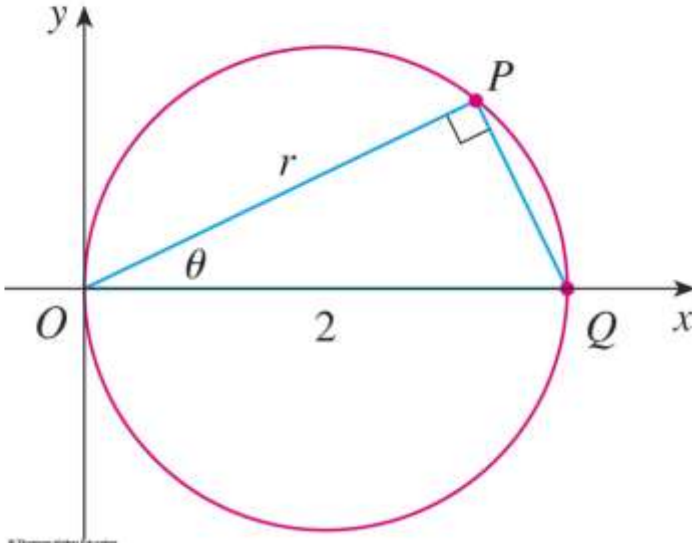
- $x = r \cos \theta$, donc $\cos \theta = x/r$.
- L’équation $r = 2 \cos \theta$ devient $r = 2x/r$.
- Ce qui donne : $2x = r^2 = x^2 + y^2$ ou $x^2 + y^2 - 2x = 0$

En complétant le carré, on obtiend : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

- L’équation est celle d’un cercle de centre (1, 0) et de rayon 1.

La figure montre que le cercle a l’équation $r = 2 \cos \theta$.

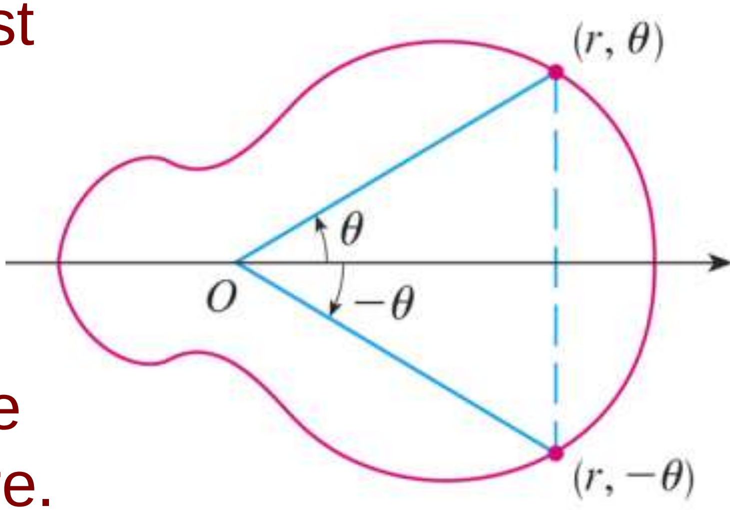
- L’angle *OPQ* est un angle droit, donc $r/2 = \cos \theta$.



Symétrie

Quand on trace une courbe polaire, il est quelquefois commode de tirer parti des symétries.

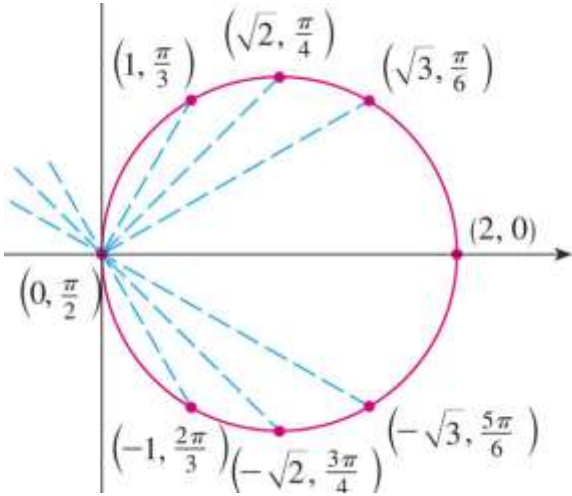
Si l'équation polaire est invariante lorsque θ est remplacé par $-\theta$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire.



La courbe de l'exemple précedent est symétrique par rapport à l'axe polaire, puisque $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

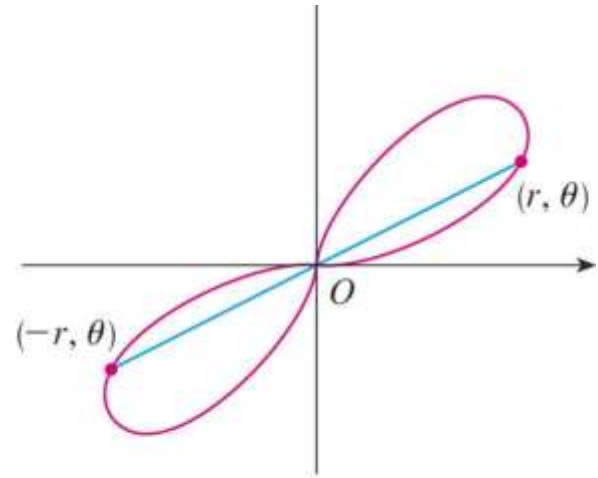
Cette propriété de symétrie aurait pu être utilisée pour tracer la courbe.

On a juste besoin de placer les points pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et ensuite de faire une réflexion par rapport à l'axe polaire pour obtenir le cerclecomplet.

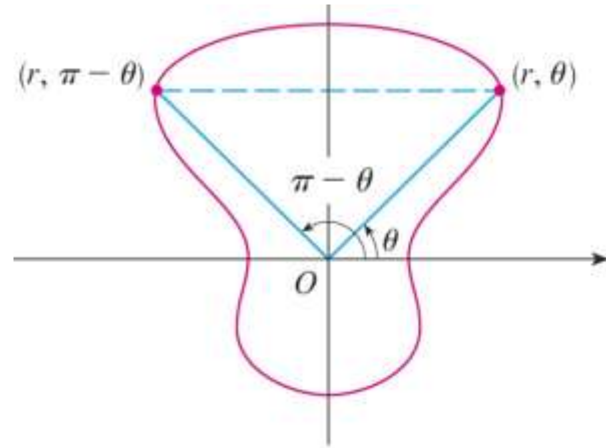


Autres symétries

Si l'équation est invariante lorsque r est remplacé par $-r$, ou quand θ est remplacé par $\theta + \pi$, la courbe est symétrique par rapport au pole.



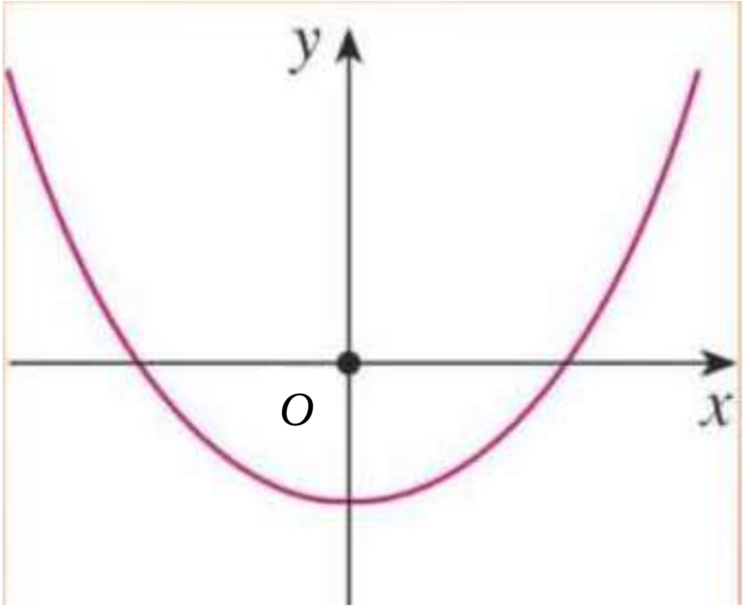
Ceci veut dire que la courbe est invariante par rotation d'angle π par rapport à l'origine.



Si l'équation est invariante quand θ est remplacé par $\pi - \theta$, la courbe est symétrique par rapport à la verticale $\theta = \pi/2$.

Exemple : parabole

$$r = \frac{1}{1 - \sin\theta}$$



Comme $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$, la courbe est symétrique par rapport à la verticale $\theta = \pi/2$. Les valeurs prises par r sont :

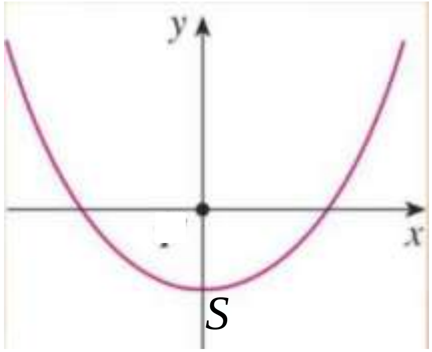
θ	r
0	1
$\pi/2$	∞
π	1
$3\pi/2$	$1/2$

Ceci correspond à la courbe tracée au dessus

(parabole verticale).

On le vérifie en passant à l'equation cartésienne.

$$r = \frac{1}{1 - \sin\theta}$$



L'équation polaire nous donne : $r\,(1 - \sin\theta) = 1$, donc : $r = 1 + r\sin\theta$

En élevant au carré on a : $r^2 = (1 + r\sin\theta)^2$, soit : $x^2 + y^2 = (1 + y)^2$

Après développement : $x^2 + y^2 = 1 + 2y + y^2$, on voit que :

$$x^2 = 1 + 2y = 2(1/2 + y)$$

La translation de ½ le long de l'axe des y sert à amener l'origine au sommet S de la parabole. Si on note $Y = y + ½$ l'ordonnée par rapport à l'origine placée au sommet de la parabole, on a :

$$Y = x^2/2$$

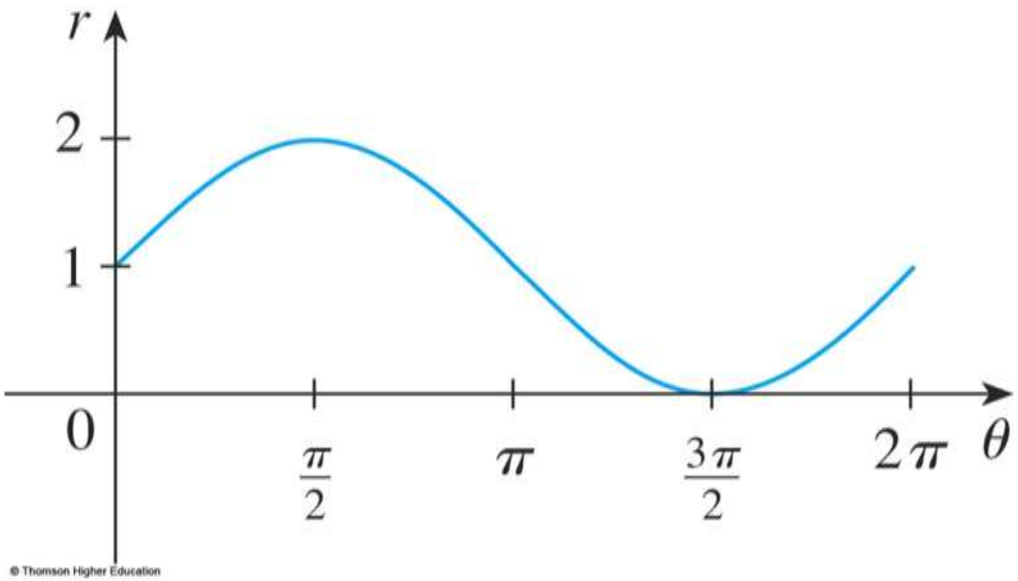
On retrouve l'équation de la parabole.

Exercice

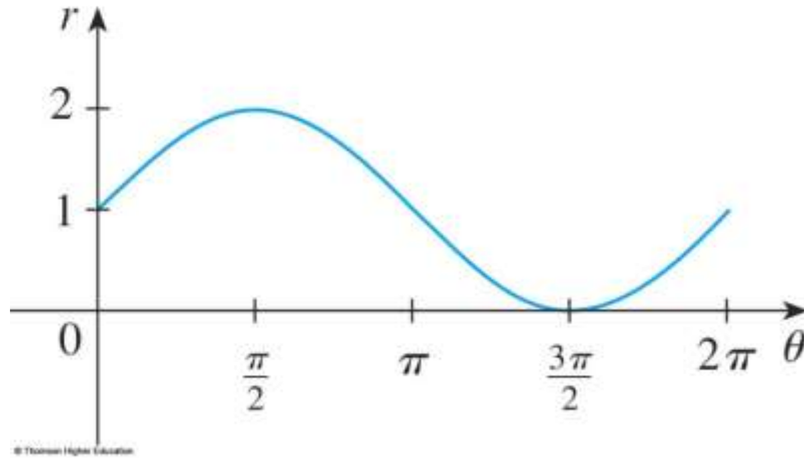
Tracer la courbe $r = 1 + \sin\theta$.

Solution

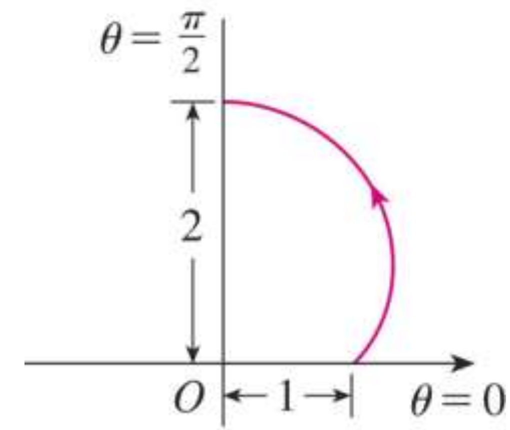
- On commence par tracer le graphe de la fonction $1 + \sin\theta$ en Cartésiennes en décalant la courbe de sinus d'une unité vers le haut.
- Ceci permet de lire en un coup d'œil la valeur de r correspondant à une valeur de θ, et son sens de variation.



Par exemple, on voit que, lorsque θ augmente de 0 à $\pi/2$, r (la distance de O) augmente de 1 à 2.

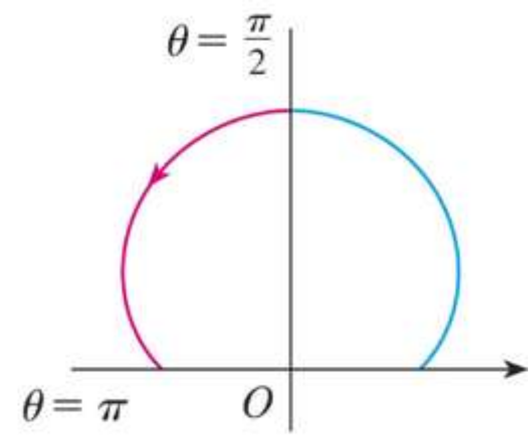


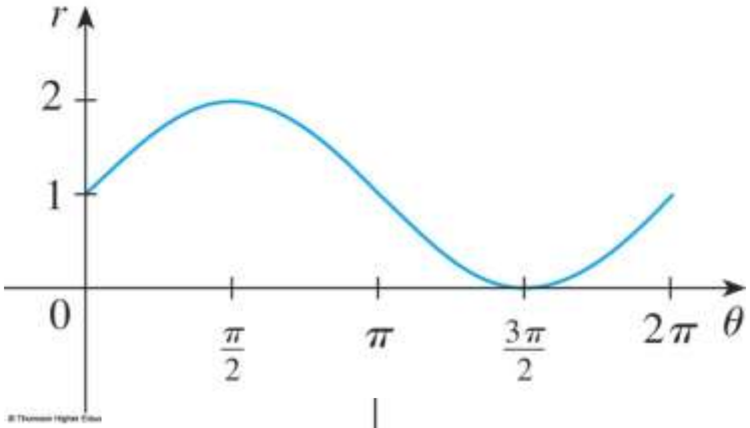
On en déduit la forme de la partie correspondante de la courbe polaire.



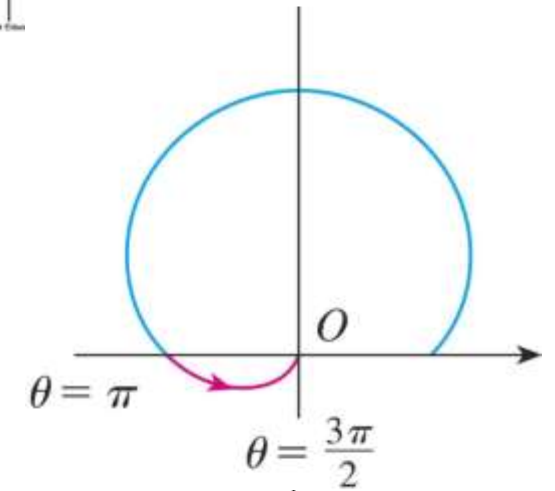
Lorsque θ augmente de $\pi/2$ à π, la figure montre que r décroit de 2 à 1.

On en déduit la forme de la partie suivante de la courbe.

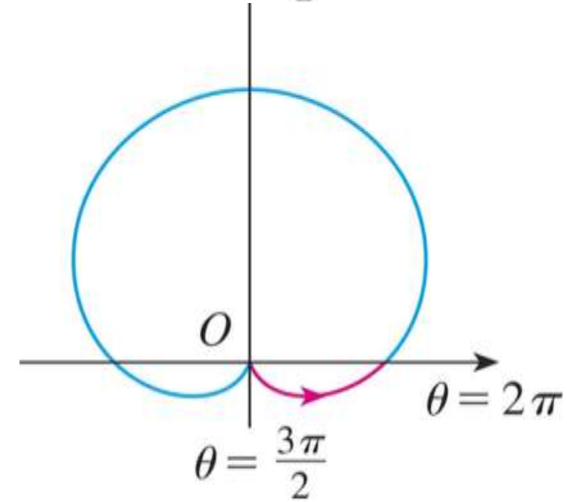


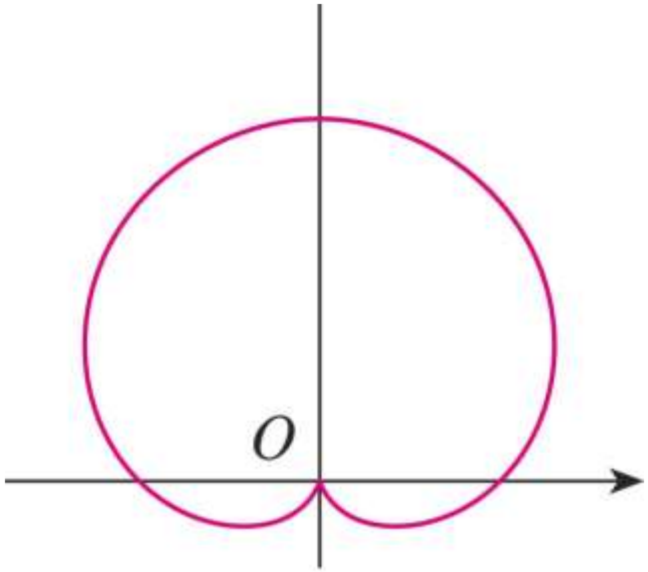


Quand θ croit de π à $3\pi/2$, r décroit de 1 à 0.



Finalement, quand θ passe de $3\pi/2$ à 2π, r croit de 0 à 1.





La courbe obtenue est appelée cardioïde—à cause de sa forme de coeur.

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe $\theta = \pi/2$, du fait que $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

TANGENTES AUX COURBES POLAIRES

Pour trouver la tangente à une courbe polaire $r = f(\theta)$, on regarde θ comme un paramètre et on écrit les équations paramétriques de la courbe :

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

Ensuite, on utilise la méthode classique pour trouver le vecteur tangent et la pente.

Le vecteur tangent a pour coordonnées dans la base cartésienne associée aux coordonnées polaires :

$$dx/d\theta = dr/d\theta\cos\theta - r\sin\theta$$

$$dy/d\theta = dr/d\theta\sin\theta + r\cos\theta$$

Exemple

Calculer le vecteur tangent à la courbe d'équation $r = a$ (où a est une constante positive). Montrer que le vecteur unitaire tangent à la courbe au point M est le vecteur que nous avons noté $\mathbf{u}_\theta$.

Solution :

En remplaçant dans les équations de la page précédente on obtient :

$$dx/d\theta = -\, r \sin \theta$$

$$dy/d\theta = r \cos \theta$$

C'est-à-dire $r\, \mathbf{u}_\theta$, donc le vecteur tangent est de norme r et le vecteur unitaire tangent est $\mathbf{u}_\theta$

TANGENTES AUX COURBES POLAIRES

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

Les tangentes horizontales se trouvent aux points pour lesquels $dy/d\theta = 0$ (pourvu que $dx/d\theta \neq 0$).

De même, les tangentes verticales sont aux points où $dx/d\theta = 0$ (pourvu que $dy/d\theta \neq 0$).

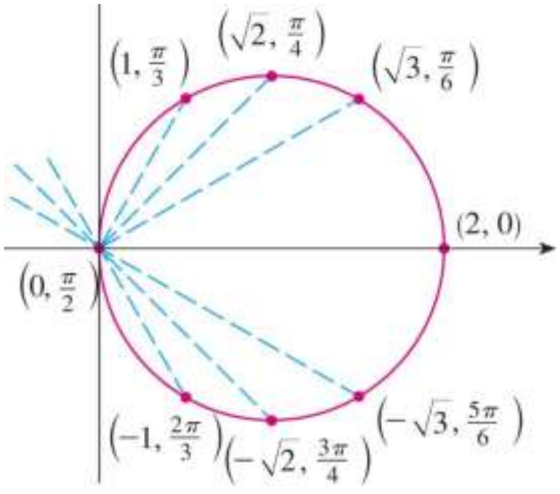
TANGENTES AUX COURBES POLAIRES

Notons que, au pole, $r = 0$, si $dr/d\theta$ est non nul, l'équation donnant la pente se simplifie en :

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Par exemple, la courbe polaire d'équation $r = 2\cos\theta$ passe par le pole ($r = 0$) quand $\theta = \pi/2$.

Comme le sinus est non nul en $\pi/2$, on en déduit que la droites $\theta = \pi/2$ (verticale) est tangente à la courbe $r = 2\cos\theta$ à l'origine.



Exercice :

On considère l'équation polaire : $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$

1. Montrer que la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire

2. Calculer les valeurs maximales et minimales de r et indiquer en quels points ces valeurs sont atteintes.

3. Déterminer les points où la tangente est verticale, et ceux où la tangente est horizontale. Donner l'allure de la courbe (la tracer).

4. Montrer qu'il s'agit bien d'une ellipse en en donnant l'équation cartésienne.

Solution

1. Quand on change θ en $-\theta$, $\cos\theta$ ne change pas et donc r est invariant.

2. $\cos\theta$ varie entre -1 (pour $\theta = \pi$) et 1 (pour $\theta = 0$). Donc les valeurs extrêmes du dénominateur sont 1 et 5 et r a pour valeur max 10 (pour $\theta = 0$) et min 2 (pour $\theta = \pi$). Les points sont sur l'axe polaire.

3. $x = 10\cos\theta/(3-2\cos\theta)$, $dx/d\theta = -30\sin\theta/(3-2\cos\theta)^2$

   $dx/d\theta = 0$ pour $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$ ou π (points extrémaux $(10,0)$ et $(2,\pi)$).

   $dy/d\theta = 0$ pour $3\cos\theta - 2 = 0$, c'est-à-dire $\cos\theta = 2/3$,

   et donc $r = 10/(5/3) = 6$.

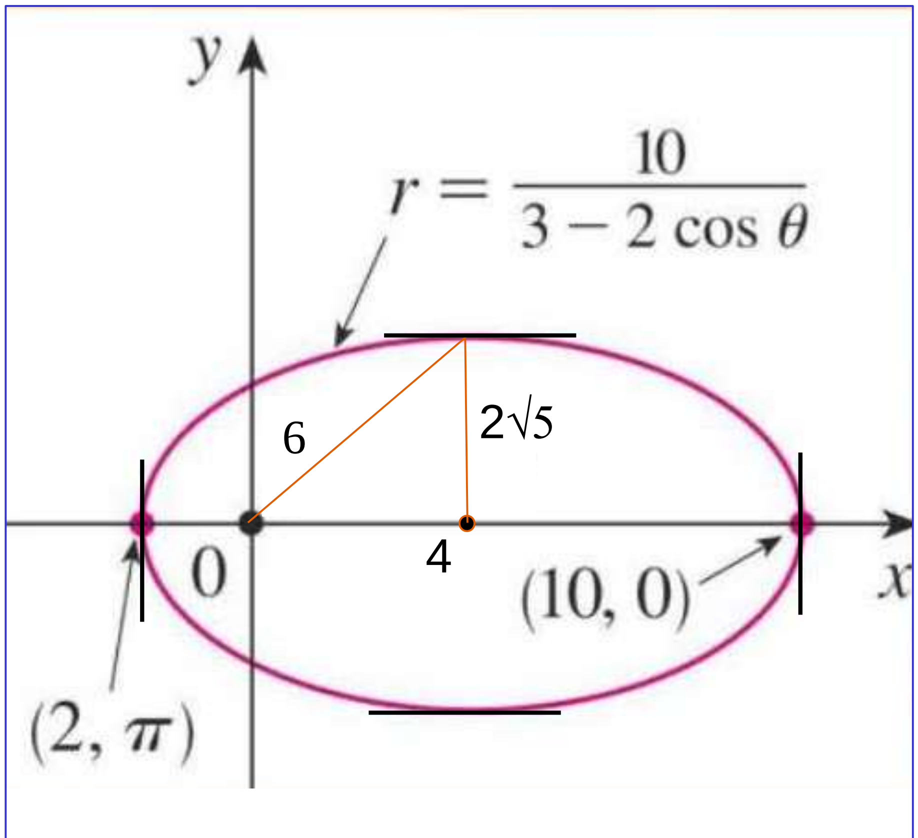
Les points de tangente horizontale sont donc d'abscisse :

$$x = r \cos\theta = 6(2/3) = 4$$

et d'ordonnées :

$$y = r \sin\theta \text{ avec } \sin\theta = \pm (1 - 4/9)^{0,5}$$

$$\text{donc } y = 2\sqrt{5} \text{ ou } y = - 2\sqrt{5}$$



4. Equation cartésienne :

L'équation polaire nous donne : $r\,(3 - 2\sin\theta) = 10$, donc :

$$3r = 10 + 2r\sin\theta$$

En élevant au carré on a : $9r^2 = (10 + 2r\sin\theta)^2$, soit :

$$9(x^2 + y^2) = (10 + 2x)^2$$

Après développement : $9x^2 + 9y^2 = 100 + 40x + 4x^2$, on voit que :

$$100 = 5(x^2 - 8x) + 9y^2 = 5(x - 4)^2 + 9y^2$$

La translation de 4 le long de l'axe des x sert à amener l'origine au centre de l'ellipse. Si on note $X = x - 4$ l'abscisse par rapport à l'origine placée au centre de l'ellipse, on a :

$$(X/6)^2 + (y/2\sqrt{5})^2 = 1$$

On retrouve l'équation de l'ellipse, avec $a = 6$ et $b = 2\sqrt{5}$.

Exercice

a. Pour la cardioïde $r = 1 + \sin\theta$, trouver la pente de la tangente quand $\theta = \pi/3$.

b. Trouver les points de la cardioïde pour lesquels la tangente est horizontale ou verticale.

Solution a)

$x = r \cos\theta = (1 + \sin\theta)\cos\theta = \cos\theta + ½ \sin 2\theta$

$y = r \sin\theta = (1 + \sin\theta)\sin\theta = \sin\theta + \sin^2\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta + \sin 2\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta}$$

On aussi utiliser :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta}$$

$$\boxed{\frac{\cos\theta + \sin 2\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta}} \Leftarrow$$

$$= \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{1-2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}$$

Solution

La pente de la tangente au point où $\theta = \pi/3$ est donc :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1+2\sin(\pi/3))}{(1+\sin(\pi/3))(1-2\sin(\pi/3))}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}/2)(1-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = -1$$

Solution b)

On voit que :

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta(1+2\sin\theta) = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1+\sin\theta)(1-2\sin\theta) = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

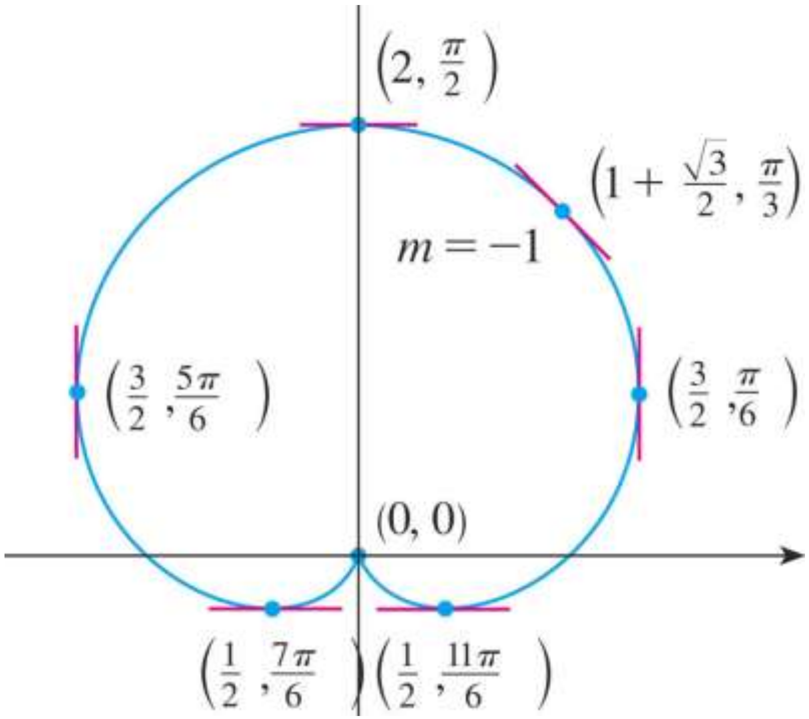
Donc, il y a des tangentes horizontales en :

$(2, \pi/2)$, $(½, 7\pi/6)$, $(½, 11\pi/6)$

et verticales en :

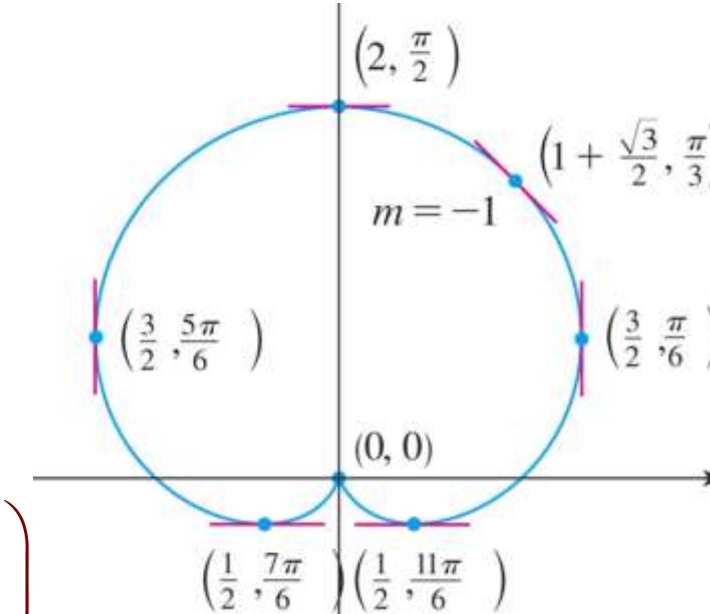
$(3/2, \pi/6)$, $(3/2, 5\pi/6)$

Quand $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ et $dx/d\theta$ sont tous les deux nuls, il faut aller y voir de plus près.



En $\theta = 3\pi/2$, r = 1+sinθ = 0 (pole), et dr/dθ = cosθ est également nul.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}$$



$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx}$$

$$=\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1+2\sin\theta}{1-2\sin\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$ $\Longleftarrow$ Forme indéterminée (0/0)

$$=-\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=\infty$$ $\Longleftarrow$ Règle de L'Hospital (s'écrit comme un rapport de deux dérivées)

$\boxed{\text{Tangente verticale au pole}}$

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx}=-\infty$$ $\Longleftarrow$ Par symétrie